

**МОСКОВСКИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)  
филиал в г. Смоленске**

**А.А. Новиков, М.А. Амелина**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

**по курсу**

**«Математическое моделирование в электронике»**

**Части 1, 2, 3**

**Смоленск      2006**

# Математическое моделирование в электронике

## Курс лекций. Часть 1.

### Введение

Курс «Математическое моделирование в электронике» представляет собой введение в проблему автоматизированного проектирования электронных схем, то есть освещение одной из задач проектирования — постановку задачи и методы расчета электронных схем.

В настоящее время сложность и ответственность разрабатываемых схем уже давно перешла тот порог, который определялся возможностями так называемого «ручного» расчета, т.е. расчета, осуществляемого разработчиком на основе своего личного опыта и умением владеть законами Ома и калькулятором.

Представим себе объем работ, требуемый для действительно серьезного расчета электронной схемы средней степени сложности. При выполнении типового расчета по ТОЭ в схеме, содержащей 5 – 6 элементов, было необходимо рассчитать характер переходных процессов. Для этого составлялось характеристическое уравнение цепи, проводился расчет начальных условий, затем записывались аналитические выражения для токов и напряжений в отдельных элементах схемы, и, наконец, проводилась табуляция полученных расчетных соотношений. На эту работу уходит примерно 20 часов. Реальная задача разработчика гораздо сложнее. Даже если проектируется подобная простейшая цепь, то необходимо дополнительно оценить амплитудные и действующие значения токов и напряжений в схеме для определения границ применимости тех или иных элементов, затем уточнить их эквивалентные схемы, что примерно в 3–4 раза повысит порядок схемы, провести повторный уточненный расчет, вновь проверить применимость элементной базы и при необходимости внести коррективы. Затем необходимо выполнить конструкторскую проработку узлов устройства, и, возможно, вновь внести коррективы в связи с технологическими особенностями изготовления изделия. И если к тому же учесть, что все реальные схемы как минимум на порядок сложнее, то создается впечатление, что их вообще спроектировать нельзя. Конечно, в этом вопросе во многом помогает интуиция разработчика, однако, полагаясь только на интуицию получить в результате проектирования электронную схему адекватную исходным данным очень тяжело. Это тем более трудно, если учесть что для современных схем одним из основных требований является высокая надежность и постоянное улучшение массогабаритных, энергетических, экономических и других, часто противоречивых показателей. Выходом из такого положения может быть только автоматизация проектирования, позволяющая существенно сократить время разработки и избежать существенных ошибок проектирования.

В целом *проектирование* представляет собой комплекс работ по изысканию, исследованию, анализу, расчету, оптимизации, конструкторскому и технологическому обеспечению нового изделия или более эффективного прототипа. Теоретически в результате проектирования должен быть выдан комплект конструкторской документации, позволяющий полностью изготовить и наладить новую разработку в условиях серийного производства. В принципе, теоретически можно представить себе возможность проведения такой работы на ЭВМ, без участия человека, и даже выпуска готовой продукции, соответствующей заданному ТЗ. Однако сложность современной электронной техники такова, что до практического решения такой задачи пока еще очень далеко. Существуют САПР, позволяющие автоматизировать проектирование для отдельных унифицированных блоков и узлов, однако комплексное решение проблемы в ближайшее время не предвидится. Наверное, в этом есть и здравый смысл, ибо, полностью автоматизировав производство, мы замкнемся на готовом наборе стандартных решений, что приведет к выпуску морально устаревшей техники. Однако как весьма эффективный инструмент в руках инженера, САПР способны обеспечить решение десятков современных задач.

В нашу с вами задачу входит изучение методов анализа и расчета электронных схем, которые являются необходимой вводной частью к раскрытию проблемы автоматизированного проектирования.

Курс МАРЭС рассчитан на 2 семестра и является, таким образом, одним из важных курсов определяющих базовую подготовку по специальности. Курс органически связан с курсом «Автоматизированный анализ устройств ПЭ», «Электронные промышленные устройства» и другими.

При подготовке курса использовалась следующая учебная и научная литература:

1. Л.О. Чуа, Пен-Мин Лин «Машинный анализ электронных схем». Алгоритмы и вычислительные методы. М.: Энергия, 1980 г. Пер. с англ.

2. М.А. Амелина, С. А. Амелин Лабораторный практикум по курсу «Методы анализа и расчета электронных схем». Смоленск: СФ МЭИ, 2001. — 54 с.

3. Разевиг В.Д. Система сквозного проектирования электронных устройств Design Lab 8.0. – Москва, «Солон», 1999.

4. Разевиг В.Д. Система схемотехнического моделирования Micro-Cap 6. – М.: Горячая линия-Телеком, 2001. — 344 с., ил.

6. С.И. Зиенко, А.А. Новиков, Т.Н. Новикова Анализ линейных электронных схем. М. МЭИ, 1988.

При проектировании схем часто употребляется термин «параметр».

*Параметр* есть некоторая величина, характеризующая элемент, схему или устройство. Параметры подразделяются на параметры схем и параметры технического задания (см. рис. 1.1).

*Параметры схемы* подразделяются на внутренние и внешние.

*Внутренние параметры* включают параметры элементов (компонентов) схем: диодов, резисторов, конденсаторов, транзисторов, микросхем и др.

Внутренние параметры подразделяются на топологические, электрофизические, электрические и режимные. Например, в полевом транзисторе концентрация примеси в полупроводнике является электрофизическим параметром, длина и ширина канала топологическими параметрами, крутизна передаточной характеристики – электрическим параметром, предельные значения токов и напряжений – режимными параметрами.

Среди внутренних параметров отдельно выделяют управляемые и неуправляемые параметры. Управляемыми параметрами являются те, изменение которых физически легко осуществимо. К неуправляемым параметрам относят те, изменение которых в рамках рассматриваемой задачи либо неосуществимо, либо нецелесообразно.

Внешние параметры схемы подразделяются на входные и выходные.

*Входные параметры*, как правило, определяются техническим заданием на разрабатываемое устройство, например, чувствительность усилителя, напряжение питания, динамический диапазон сигналов и т.п.

*Выходные параметры* – это параметры по которым осуществляется оценка работоспособности схемы: например максимальная амплитуда выходного напряжения усилителя на заданной частоте, выходное сопротивление и коэффициент стабилизации источника вторичного электропитания и т.д. Кроме выходных параметров, являющихся числовыми характеристиками схемы вводят понятие *выходных характеристик*, т.е. функциональных зависимостей выходных параметров от некоторых величин: например, частоты входного сигнала, изменения напряжения питания, тока в нагрузке и т.п.

При оптимизации электронных схем употребляют термин варьируемые параметры, т.е. внешние и внутренние параметры, изменение которых способно привести к улучшению показателей системы.

*Параметры технического задания* — это параметры внешней среды, предельные режимные параметры, например: напряжение питания и допуски на него, диапазон рабочих температур и давлений, влажности, предельные значения напряжений и мощностей в отдельных точках схемы. Параметры технического задания используются как система одно- или двухсторонних ограничений, налагаемых на внешние параметры проектируемой схемы.

Термин «*расчет схемы*» означает определение ее параметров и характеристик при неизменных значениях внутренних параметров схемы и ее структуры: например, расчет статического режима, переходного процесса, АЧХ и ФЧХ схемы.

Для расчета схемы важен правильный выбор базисных переменных, т.е. тех переменных, которые используются для математического описания схемы (токи элементов, узловые потенциалы, гибридное

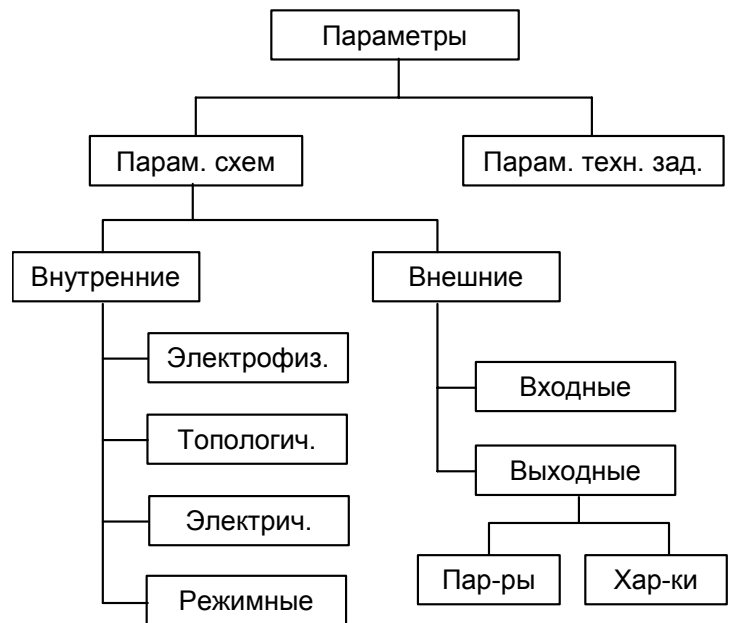


Рис. 1.1. Классификация параметров

описание).

Анализ схемы - это процесс определения изменения выходных и режимных параметров схемы в зависимости от изменения варьируемых параметров.

### Виды анализа и расчета электронных схем

*Расчет статического режима* схемы выполняется для построения карты режимов по постоянному току, определения различных статических параметров, например, выделяемой на элементах мощности. Данный вид расчета используется для определения начальных условий для расчета переходных процессов и определения рабочей точки для расчета малосигнальных параметров.

*Расчет малосигнальных параметров схемы и расчет переходных процессов* служит основой для определения динамических параметров схемы. Позволяет сделать вывод о работоспособности схемы при различных входных воздействиях.

*Расчет выходных параметров схемы* производят после расчета статического режима и переходных процессов. Это позволяет получить данные о соответствии или несоответствии внешних параметров схемы параметрам, указанным в ТЗ.

*Анализ схемы предполагает:*

1. *Анализ параметрической чувствительности*, т.е. определение степени влияния изменения внутренних параметров схемы на выходные параметры.

2. *Статистический анализ* позволяет найти характеристики схемы при статистическом отклонении параметров элементов схем (внутренних параметров). В результате могут быть построены гистограммы выходных параметров, по которым могут быть определены границы отбраковки годных изделий.

3. *Анализ на наихудший случай* – предполагает расчет выходных параметров схемы при наихудшем сочетании внутренних параметров схемы.

4. *Анализ влияния внешней среды* состоит в расчете влияния температуры, давления, влажности и т.п. на выходные параметры. Фактически, анализ выполняется в два этапа:

- вначале выясняются зависимости параметров компонентов электронной схемы от изменения внешней среды.
- осуществляется расчет зависимости внешних параметров от внутренних.

5. *Многовариантный анализ* представляет собой расчет схемы при различных комбинациях параметров элементов, задаваемых проектировщиком, который проводится за один сеанс расчета. В ряде случаев многовариантный анализ схемы позволяет обойтись без оптимизации параметров элементов схемы, поскольку разработчик получает результаты расчета совокупности схем и может выбрать наилучший вариант.

### Модели элементов и схем

Анализ и расчет электронных схем осуществляется на основе моделирования реальных компонентов, т.е. замены их некоторыми моделями, которые с той или иной степенью точности описывают поведение элементов схемы в различных режимах, т.е. на основе создания математических моделей компонентов. Математическую модель элемента можно рассматривать как некоторый оператор  $F$ , ставящий в соответствие системе внутренних параметров компонента или схемы  $X=x_1, x_2, \dots, x_n$  совокупность связанных с ними внешних параметров  $Y=y_1, y_2, \dots, y_m$ . Содержание внутренних и внешних параметров, их физический смысл меняется в зависимости от назначения модели.

Для моделей компонентов внешними параметрами являются обычно токи и напряжения, если модель предназначена для расчета схем. Для расчета самого компонента внешними параметрами выступают обычно плотности тока, распределение заряда и т.п. Внутренними параметрами в первом случае являются электрические параметры, а во втором случае - электрофизические и конструктивно-технологические. Связь между внешними и внутренними параметрами в первом случае (при расчете схем) осуществляется законами Ома, Кирхгофа, во втором случае (при расчете самого компонента) с использованием уравнений переноса, непрерывности, Пуассона.

Для моделей схем внутренними параметрами являются электрические параметры входящих в них компонентов, внешними параметрами – токи, напряжения, мощности, частотные и пр. характеристики. Связь между внешними и внутренними параметрами осуществляется с использованием законов Кирхгофа (для консервативных систем) и законов Максвелла, (для систем открытых, где возможны потери на излучение, не учитываемые законами Кирхгофа).

## Классификация моделей

Математические модели технических устройств могут быть классифицированы по ряду признаков:

1. По **характеру отображаемых процессов** выделяют:

- статические
- динамические модели.

2. По **способу представления модели** различают:

- аналитические
- графические
- табличные

*Аналитические модели* определяют прибор или компоненту в виде уравнений, описывающих его ВАХ или в форме дифференциальных уравнений описывающих переходные процессы в моделируемой схеме и характеризующие инерционность элемента.

*Графические модели* позволяют представить компоненты в виде графиков ВАХ или в виде эквивалентных схем замещения.

*Табличные модели* позволяют представить схему или элемент в виде цифровых таблиц, полученных в ходе экспериментального исследования объекта моделирования и соответствующих графикам экспериментальных ВАХ. Табличные модели используют обычно в том случае; если аналитическую модель построить трудно вследствие сложной зависимости. Иногда при сложных функциональных аналитических зависимостях для ВАХ их сознательно табулируют, если это позволяет объем памяти ЭВМ, и создают таким образом, возможно менее точную, но более удобную модель.

Перечисленные выше модели могут быть выполнены в виде подпрограмм, при таком представлении они превращаются в цифровую модель.

Аналитические и графические модели могут быть также заданы в виде алгоритма вычисления внешних параметров модели, при этом модель носит название алгоритмической модели. После оформления подпрограммы в соответствии с приведенным алгоритмом модель становится цифровой.

Цифровые модели могут быть достаточно точными, т.к. степень их сложности в основном определяется сложностью программы и допустимыми для расчета затратами машинного времени. В настоящее время цифровые модели используются все более широко в связи с развитием САПР РЭА.

3. По **характеру зависимостей** модели делятся на:

- линейные
- нелинейные

Имеется особый класс кусочно-линейных моделей, нелинейность которых проявляется в ограниченном количестве точек стыка линейных участков.

Нелинейные модели, естественно, оказываются более точными, но и более сложными.

4. По **диапазону рабочих сигналов** модели классифицируются на:

- модели большого сигнала
- малосигнальные

Малосигнальные модели, как правило, представляют собой линейные модели; модели для большого сигнала учитывают нелинейность характеристик активных и пассивных элементов схемы (биполярных и полевых усилительных приборов).

5. По **диапазону рабочих частот** выделяют:

- низкочастотные
- высокочастотные
- сверхвысокочастотные

Низкочастотные модели не учитывают инерционность компонентов модели и, поэтому низкочастотные модели используют для расчета схем по постоянному току (в статическом режиме).

Высокочастотные модели — модели более высокого уровня, они учитывают помимо особенностей статического режима инерционность компонентов. Поэтому такие модели дополняют системой дифференциальных уравнений, учитывающей инерционность компонентов, или эквивалентными схемами реальных приборов на высоких частотах — индуктивностями и емкостями выводов, инерционностями, определяющими физические процессы в компонентах (например, накопление заряда), емкостями областей структур и т.п.

Особенность низкочастотных и высокочастотных моделей состоит в том, что они выполняются на

сосредоточенных элементах и поэтому для этих моделей справедливы законы Кирхгофа.

СВЧ модели отличаются от высокочастотных моделей учетом пространственных и временных координат, поэтому для анализа и расчета СВЧ-схем необходимо использовать уравнения Максвелла. Применение законов Кирхгофа оправдано лишь в диапазоне частот до 10 ГГц, где размеры компонентов (особенно компонентов ИС) остаются меньше длины волны  $\lambda = 3$  см.

### Базовый набор элементов моделей

Существует ряд моделей, на основе которых может быть построена любая электрическая модель прибора. Эти модели получили название *базового набора элементов моделей*.

Идеальные активные элементы – идеальные источники напряжения или тока – вводятся для характеристики реальных источников электрической энергии, в которых неэлектрические виды энергии (химическая, механическая) преобразуются в электрическую. В зависимости от вида ВАХ и возможности управления выходными параметрами различают зависимые и независимые источники напряжения и тока.

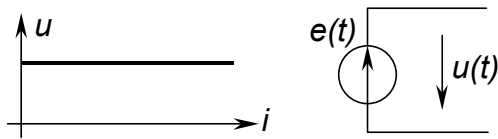


Рис. 1.2. Независимый идеальный источник ЭДС

Независимый идеальный источник напряжения представляет собой двухполюсный элемент, напряжение на котором, возможно, изменяется во времени по некоторому закону  $e(t)$ , не зависящему от величины тока, проходящего через источник. Выходная характеристика источника  $u(i)$ , его эквивалентная схема замещения (рис. 1.2).

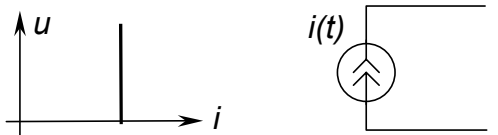


Рис. 1.3. Независимый идеальный источник тока

В режиме короткого замыкания величина тока источника стремится к бесконечности, источник отдает бесконечно большую мощность в нагрузку.

Независимый идеальный источник тока представляет собой двухполюсный элемент, выходной ток которого изменяется, возможно, по некоторому закону во времени независимо от напряжения на элементе. Источник отдает в нагрузку бесконечно большую мощность при холостом ходе.

Эквивалентная схема и ВАХ источника изображены на рис. 1.3.

Зависимые идеальные источники напряжения или тока представляют собой трехполюсные или четырехполюсные элементы (необратимые), которые ставят в зависимость от входного сигнала (напряжения или тока) выходной ток или напряжение. Если управление зависимыми источниками осуществляется током, то его вход представляет собой короткое замыкание, если напряжением — холостой ход. Изображение зависимых источников напряжения или тока приведено на рис. 1.4:

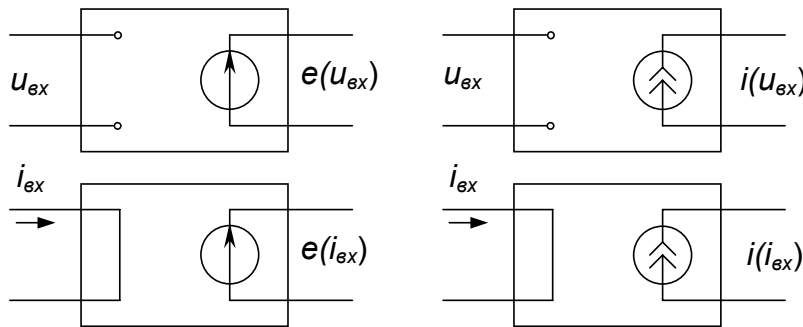


Рис. 1.4. Зависимые идеальные источники

Если управление зависимыми источниками осуществляется напряжением, то его вход представляет собой холостой ход, если током — короткое замыкание. Изображение зависимых источников напряжения или тока приведено на рис. 1.4:

### Пассивные элементы R, L, C

Идеальный линейный резистор характеризуется сопротивлением  $R$  и проводимостью  $G$ . Размерности величин:  $R[Ом]$ ,  $G[См]$ ,  $U=iR$ .

Нелинейное сопротивление характеризуется ВАХ (рис. 1.5):

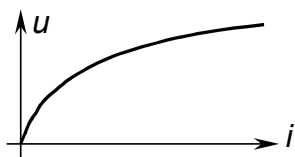


Рис. 1.5. ВАХ нелинейного резистора

Фазовые сдвиги в элементе отсутствуют.

Идеальный индуктивный элемент характеризуется потокосцеплением, возникающим при протекании тока через некоторый контур, причем считается, что активное сопротивление контура равно 0. Отношение потокосцепления к току называется индуктивностью  $L$ :

$$L = \frac{\Psi}{i}$$

Размерности величин:  $[i]=A$ ,  $[\Psi]=B\phi=B\cdot c$ ,  $[L]=B\phi/A=(B\cdot c)/A=Гн$

Энергия, накопленная в поле:

$$W_M = \frac{\Psi I}{2}$$

Закон электромагнитной индукции связывает скорость изменения магнитного потока и ЭДС, наводимую в контуре:

$$e = \frac{d\Psi}{dt}$$

Если  $L=const$ , то  $e = L \frac{di}{dt}$

Закон можно переписать в другом виде:

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t e(t) dt$$

Реактивное сопротивление контура переменному току зависит от частоты синусоидального сигнала:  $|X_L| = \omega L$ . Фазовый сдвиг между током и напряжением —  $90^\circ$  Ток отстает от напряжения на указанный угол. Если на индуктивность подано напряжение:  $u = U_m \cos \omega t$ , при этом ток в цепи:

$$i = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t$$

Мощность, циркулирующая в цепи:

$$P = u \cdot i = \frac{U_m^2}{\omega L} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{U_m^2}{2\omega L} \sin 2\omega t$$

Таким образом, мощность не потребляется нагрузкой, а осуществляется лишь периодический обмен энергией (рис. 1.6):

Идеальная емкость накапливает энергию электростатического поля.

Заряд емкости:

$$Q = Q_0 + \int_0^t i(t) dt \quad i = \frac{dQ}{dt}$$

Если емкость линейна, то заряд  $Q = CU$ , где  $C$  – собственно емкость конденсатора. Размерность величин:

$$[Q]=Кл, [U]=В, [C]=Кл/В=Ф$$

Энергия, накопленная в емкости:

$$W_\phi = \frac{QU}{2}$$

Для линейной емкости можно также записать:

$$W_\phi = \frac{CU^2}{2}; \quad i = C \cdot \frac{dU}{dt}; \quad u = U_0 + \frac{1}{C} \int_0^t i dt$$

Сопротивление емкостной цепи переменному току:

$$|X_C| = \frac{1}{\omega C}$$

Напряжение на емкости отстает от тока на  $90^\circ$ . Если ток в цепи:

$$i_c = I_m \cos \omega t,$$

То напряжение:

$$u_C = \frac{I_m}{\omega C} \sin \omega t$$

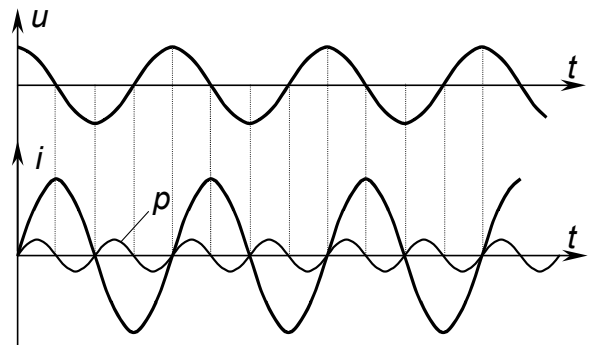


Рис. 1.6. Временные диаграммы гармонического сигнала на индуктивности

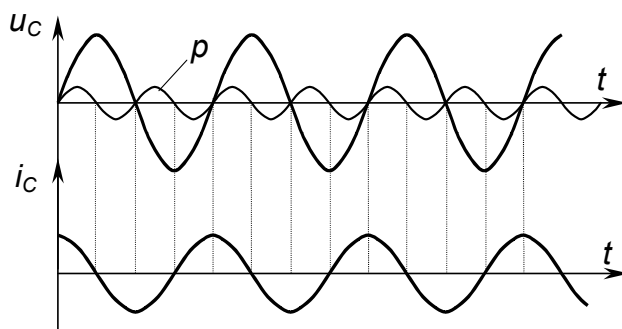


Рис. 1.7. Временные диаграммы гармонического сигнала на емкости

Мощность в цепи:

$$P = u_C \cdot i_C = \frac{I_m^2}{2\omega C} \sin 2\omega t$$

Т.е., как и в случае индуктивности, потребление мощности не происходит, осуществляется лишь обмен энергией между источником и нагрузкой (рис. 1.7).

Модели любого компонента электрической цепи могут быть отображены комбинацией простейших элементов базового набора. Рассмотрим модели реальных компонентов с учетом их частотных свойств.

## Пассивные компоненты и их модели

### Резистор

Вольтамперная характеристика реального резистора на постоянном токе не отличается от идеальной. При создании высокочастотной модели необходимо учитывать особенности изготовления. За счет наличия индуктивности выводов и резистивного слоя сопротивление резисторов на высокой частоте становится комплексным, приобретает индуктивный характер:

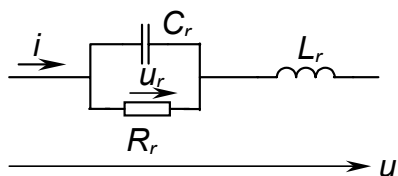


Рис. 1.8. Эквивалентная схема резистора с сосредоточенными параметрами

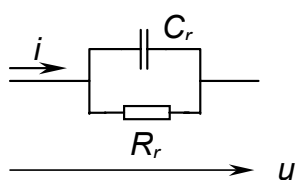


Рис. 1.9.

$$X_R = R + j\omega L$$

С повышением частоты проявляются также емкостные свойства резистора – в основном емкость между его выводами. Таким образом эквивалентная схема с сосредоточенными параметрами имеет вид (рис. 1.8):

В принципе, параметры резистора должны быть распределенными, однако их учет значительно усложняет анализ и применяется лишь при работе на СВЧ и при расчете элементов в гибридном исполнении. Приведенную эквивалентную схему можно описать системой 2-х дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} u = u_r + L_r \frac{di}{dt} \\ i = \frac{u_r}{R_r} + C_r \frac{du_r}{dt} \end{cases}$$

Здесь  $C_r$ ,  $L_r$  – величины паразитных параметров,  $u_r$  – напряжение на активной составляющей резистора. В зависимости от соотношения параметров эквивалентная схема резистора может быть упрощена. Для высокоомных резисторов, у которых  $R \gg \sqrt{\frac{L_r}{C_r}}$ , т.е. активное сопротивление значительно больше волнового, можно пренебречь его индуктивной составляющей. При этом модель принимает вид (рис. 1.9):

Полное сопротивление синусоидальному сигналу можно найти из расчета:

$$Z_R = \frac{R_r \cdot \frac{1}{j\omega C_r}}{R_r + \frac{1}{j\omega C_r}} = \frac{R_r}{1 + j\omega C_r R_r} = \frac{R_r}{1 + \omega^2 R_r^2 C_r^2} - j \cdot \frac{\omega C_r R_r^2}{1 + \omega^2 R_r^2 C_r^2}$$

Здесь первое слагаемое — активная составляющая полного сопротивления, второе — реактивная составляющая. При  $\omega \rightarrow 0$ ,  $Z_r \rightarrow R_r$ , при  $\omega \rightarrow \infty$   $Z_r \rightarrow \frac{1}{j\omega C_r}$ . Для низкоомных резисторов  $R \ll \sqrt{\frac{L_r}{C_r}}$ , можно пренебречь емкостной составляющей комплексного сопротивления. При этом схема имеет вид



(рис. 1.10):

Указанную особенность необходимо учитывать при проектировании схем, особенно СВЧ.

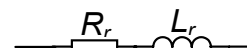


Рис. 1.10.

### Электрические конденсаторы

В электронике конденсаторы выполняют в виде токопроводящих обкладок, разделенных диэлектриком. Величина емкости зависит от площади обкладок \$S\$ и \$\varepsilon\$ диэлектрика. Различают конденсаторы с газообразным, жидким, твердым, оксидным диэлектриком. На высоких частотах необходимо учитывать потери в диэлектрике, токи утечки, индуктивное сопротивление обкладок и выводов. Эквивалентная схема конденсатора на высоких частотах имеет вид (рис. 1.11):

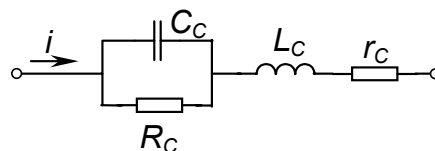


Рис. 1.11. Эквивалентная схема конденсатора на высоких частотах

Полное сопротивление конденсатора зависит от частоты и определяется по формуле:

$$|Z_C| = \sqrt{r_C^2 + \left( -\frac{1}{\omega C_C} + \omega L_C \right)^2}$$

Здесь сделано допущение о том, что \$R\_C \gg r\_C\$, что справедливо на высоких частотах практически всегда. Сопротивление утечки \$R\_C\$ учитывается, как правило, лишь в прецизионных схемах и при расчете медленных процессов. Зависимость \$Z\_C(f)\$ в соответствии с приведенным соотношением имеет вид (рис. 1.12):

Таким образом, после резонансной частоты  $f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_C C_C}}$  сопротивление конденсатора приобретает индуктивный характер. Следует отметить, что для электролитических конденсаторов величина емкости непостоянна, а также зависит от частоты работы, что объясняется процессами поляризации диэлектрика. Можно предложить аппроксимацию зависимости \$C\_C(f)\$ в виде:

$$C_C = \frac{C_0}{1 + \left( \frac{f}{f_0} \right)^\alpha},$$

где \$C\_0\$ – номинальная емкость конденсатора, \$f\_0\$ – частота, на которой емкость падает вдвое, \$\alpha\$ – некоторый коэффициент, учитывающий скорость спада емкости.

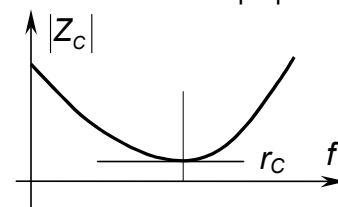


Рис. 1.12.

### Реальная индуктивность

Индуктивность представляет собой магнитопровод с выполненной на нем обмоткой. Эквивалентная схема индуктивности с учетом омического сопротивления обмотки имеет вид рис. 1.13:

Полное сопротивление реальной индуктивности переменному току частотой \$\omega\$ равно:

$$Z = r_L + j\omega L \quad |Z| = \sqrt{r_L^2 + (\omega L)^2}.$$

Индуктивность, выполненная на сердечнике из ферромагнитного материала, как правило, нелинейна при работе в сильных полях. Ее характеристика совпадает с магнитной характеристикой ферромагнетика и может быть изображена в виде графика (см. рис. 1.14):

Если на индуктивность подан постоянный подмагничивающий ток \$I\_0\$, то можно выделить дифференциальную индуктивность \$L\_\partial\$ и статическую индуктивность \$L\_{cm}\$ определяемую выражениями:

$$L_{cm} = \frac{\Psi_0}{I_0}; \quad L_\partial = \frac{d\Psi}{dI} \Big|_{i=I_0}$$

В обмотке за счет протекания тока создается напряженность магнитного поля \$H\$, определяемая по закону полного тока:

$$i \cdot w = H \cdot l_{cp} \Rightarrow H = \frac{i \cdot w}{l_{cp}}; \quad [H] = \frac{A}{m}$$

Если магнитная проницаемость материала \$\mu\$, то величина индук-

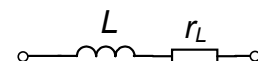


Рис. 1.13. Эквивалентная схема индуктивности

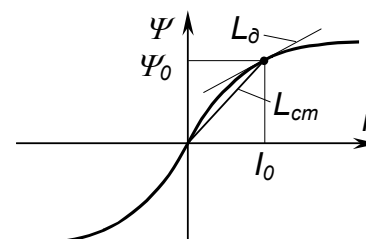


Рис. 1.14.

ции в сердечнике  $B = \mu\mu_0 H$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma H}{M}$ . Для тороидального сердечника в предположении равномерного распределения магнитного поля справедливо:

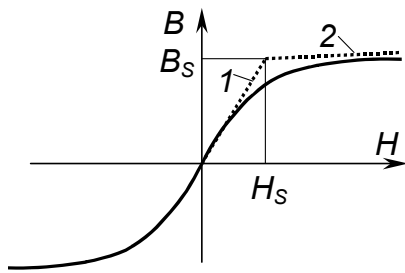


Рис. 1.15.

$$\Psi = BSw; \quad H = \frac{i \cdot w}{l_{cp}}; \quad l_{cp} = \pi \frac{d_1 + d_2}{2},$$

где  $l_{cp}$  – средняя длина магнитной силовой линии, равная полусумме внешнего и внутреннего диаметра кольца, умноженная на  $\pi$ . При этом индуктивность тороидального сердечника с обмоткой можно рассчитать по формуле:

$$L = \frac{\Psi}{i} = \frac{\mu\mu_0 S w^2}{l_{cp}}.$$

Магнитную характеристику материала обычно аппроксимируют кусочно-линейной функцией при грубом расчете (см. рис. 1.15). При этом в диапазоне:

$$-H_s \leq H \leq +H_s, \quad L = \frac{B_s}{H_s}, \quad \text{при } |H| > H_s \quad L = 0, \quad \text{т.е. } B = B_s$$

Такая аппроксимация является весьма грубой, в частности, она не отражает реальных физических процессов во второй области. Ведь, даже если предположить, что в области насыщения свойства ферромагнетика исчезают вовсе, то это означает, что  $\mu$  ферромагнетика становится равной 1. Т.е. при  $|H| > H_s$  магнитный поток необходимо считать по формуле:

$$B = \mu_0 H;$$

Это соответствует аппроксимации (рис. 1.15, линия 2). В ряде случаев оказывается более удобной аппроксимации магнитной характеристики аналитическим выражением вида:

$$B = B_s \cdot \text{th} \beta H;$$

где коэффициент  $\beta$  выражает «крутизну» и момент перегиба магнитной характеристики.

Переменная величина индуктивности может привести к различию переходных процессов в схемах, если сердечник работает с подмагничиванием или без него. Ряд магнитных материалов обладает гистерезисными свойствами, которые проявляются в том, что кривая намагничивания превращается в петлю, которая зависит от напряженности поля перемагничивания  $H$ , скорости и амплитуды  $B_m$  индукции в сердечнике. Существует ряд моделей, описывающих эту петлю. Рассмотрим модель Джилса-Аттертона. Основа модели – безгистерезисная кривая, которая представляет собой зависимость безгистерезисной намагниченности от  $H$ . Она получается в том случае, когда в дополнение к постоянной составляющей на магнитный материал воздействует сильное переменное поле с амплитудой, постепенно убывающей до нуля.

Связь между  $B$ ,  $H$  и намагниченностью  $M$ :

$$B = \mu_0 (M + H) \quad (1.1)$$

При помещении образца во внешнее магнитное поле магнитные моменты отдельных доменов начинают поворачиваться, ориентируясь вдоль силовых линий магнитного поля. При слабых полях этот поворот сопровождается упругим прогибом доменной стенки, при сильных полях — смещением границ доменов (эффект сухого трения). Прогиб стенки — обратимый процесс, т.е. при снятии внешнего магнитного поля домен возвращается в исходное состояние, не изменяя границ. При «сухом трении» после снятия поля внутренняя намагниченность остается. Она характеризуется намагниченностью  $M$  (размерность А/М). Величина индукции определяется формулой (1.1).

Модель Джилса-Аттертона предполагает, что безгистерезисная намагниченность зависит от величины  $H$  по следующей формуле:

$$M_{an} = M_s \cdot \frac{\frac{H}{A}}{\left| \frac{H}{A} \right| + 1},$$

где  $M_s$  — намагниченность насыщения;  $A$  — коэффициент кривой (ее формы).

$$M_{an} = M_s \cdot \frac{H}{|H| + A},$$

где  $A$  определяется как величина напряженности, при которой  $M_{an} = \frac{M_s}{2}$ . Для введения гистерезисной зависимости в модель существует дифференциальное уравнение, учитывающее эффект сухого и вязкого трения. В больших полях (сухое трение) форма петли описывается уравнением:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_{an} - M}{K} \cdot \delta,$$

где  $\delta$  — учитывает коэффициент перемагничивания;  $K$  — величина коэрцитивной силы петли. На петле есть 4 участка с различными состояниями сердечника, каждое из которых связано с  $M$ ,  $M_{an}$  и  $H$ .

Коэрцитивная сила петли — напряженность магнитного поля, при которой индукция в образце (намагниченность) равна 0 (точка  $H_c$ ). В зависимости от участка, по которому ползет рабочая точка, изменяется и коэффициент  $\delta$  в дифференциальном уравнении.

Участок I:  $\frac{dM}{dH} > 0$ ;  $M_{an} > M$ ;  $\delta > 0$  (обычно принимается  $\delta=1$ )

Участок II:  $\frac{dM}{dH} = 0$ ;  $M = const$ ;  $\delta = 0$

Участок IV:  $\frac{dM}{dH} = 0$ ;  $M = const$ ;  $\delta = 0$

Участок III:  $\frac{dM}{dH} > 0$ ;  $M > M_{an}$ ;  $\delta < 0$  ( $\delta=-1$ )

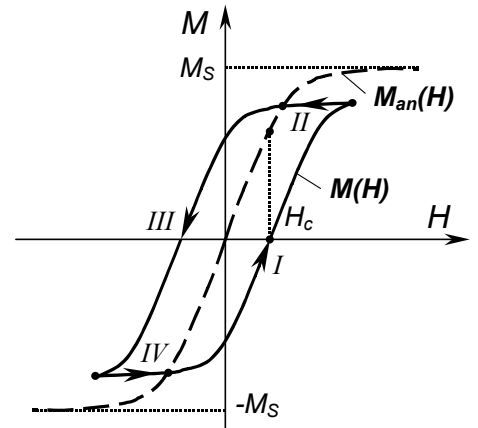


Рис. 1.16.

Коэффициент  $\delta$  берут соответствующим на любом шаге расчета петли. Рассмотрим поведение безгистерезисной кривой  $M_{an}$  и петли перемагничивания вблизи  $H$ , равной  $H_c$ .

Пусть в петле:  $\left. \frac{dM_{an}}{dH} \right|_{H \approx 0} = \left. \frac{dM}{dH} \right|_{H \approx H_c}$ , т.е. характеристики  $M$  и  $M_{an}$  имеют одинаковый наклон.

Рассмотрим треугольник с вершинами  $0$ ,  $H_c$ ,  $M_{an}(H_c)$ :

$$M_{an}(H_c) = \frac{dM}{dH} \cdot H_c$$

Уравнение Джилса-Аттертона описывает явление вязкого трения, соответствующее малым возмущениям внешнего поля. Это достигается введением добавки следующего вида:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_{an} - M}{K} \cdot \delta + \frac{C}{1+C} \cdot \frac{dM_{an}}{dH},$$

где  $C$  — коэффициент (отношение начальной и безгистерезисной магнитной проницаемости при  $H=0$ );  $K=H_c$ .

Т.к. при малых полях доменные стенки сначала прогибаются, намагниченность материала оказывается заметно меньше, чем если бы доменные структуры одновременно повернулись бы на определенный угол.

Введем понятие начальной магнитной проницаемости  $\mu_i$ , которая всегда меньше чем  $\mu_{an}$ . Этот эффект учитывается с помощью коэффициента  $C$  в уравнении:

$$C \approx \frac{\mu_i}{\mu_{an}} < 1$$

С помощью полного уравнения Джилса-Аттертона можно посчитать петлю перемагничивания, интегрируя это уравнение, например, методом Эйлера. Итерационная формула имеет вид:

$$M_{k+1} = M_k + \left\{ \frac{M_{an_k} - M_k}{K} \cdot \delta + \frac{C}{1+C} \cdot \left. \frac{dM_{an}}{dH} \right|_{H=H_k} \right\} \cdot (H_{k+1} - H_k).$$

Т.к. время в явном виде не входит, модель — безинерционная, т.е. ни один из параметров не изменяется при  $\Delta v$  (изменении скорости), что увеличивает потери в материале (вихревые токи, нелинейность гистерезисных процессов и т.д.).

Можно предложить модифицировать модель путем введения зависимости  $K$  от скорости  $V$  перемагничивания. Анализ показал, что такая зависимость:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_{an} - M}{K_0 + K_f \cdot \left| \frac{dH}{dt} \right|} \cdot \delta + \frac{C}{1+C} \cdot \frac{dM_{an}}{dH},$$

где  $\left| \frac{dH}{dt} \right|$  — модуль мгновенной скорости перемагничивания материала.

### Модель перемагничивания ферромагнитных материалов второго уровня сложности

Модель перемагничивания Джилса-Атертона не выражает в явном виде зависимость магнитной индукции  $B$  от напряженности магнитного  $H$ , а устанавливает их взаимосвязь через систему дифференциальных уравнений, описывающих поведение доменных структур. Основные параметры модели представлены в табл. 3.1.

Как известно, магнитная индукция в магнитопроводе  $B$  связана с напряженностью внешнего магнитного поля  $H$  и намагниченностью материала  $M$  соотношением:

$$B = \mu_0 \cdot (M + H) \quad (3.1)$$

где  $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$  - магнитная постоянная, Гн/м;

$B$  – индукция, Тл;

$H$  – напряженность внешнего магнитного поля, А/м;

$M$  – намагниченность, А/м.

Основой для построения модели петли является нелинейная безгистерезисная кривая намагничивания, которая описывается зависимостью безгистерезисной намагниченности  $M_{an}$  от величины напряженности внешнего магнитного поля  $H$ . Зависимость  $M_{an}(H)$  в модели определяется соотношением:

$$M_{an}(H) = M_s \cdot \frac{H/A}{|H/A| + 1} \quad (3.2)$$

где  $A$  - параметр формы безгистерезисной кривой намагничивания, А/м;

$M_s$  - намагниченность насыщения, А/м, которая определяет максимальную величину собственного магнитного поля доменов, ориентированных по направлению внешнего магнитного поля.

Таблица 3.1. Список параметров модели петли перемагничивания

Параметр	Смысловое значение	Размерность	Значение по умолчанию
LEVEL	Индекс уровня модели	–	1
AREA	Площадь поперечного сечения магнитопровода	см <sup>2</sup>	0.1
PATH	Средняя длина магнитной силовой линии	см	1
GAP	Ширина воздушного зазора	см	0
PACK	Коэффициент заполнения сердечника	–	1
MS	Намагниченность насыщения	А/м	10 <sup>6</sup>
A	Параметр формы безгист. кривой намагничивания	А/м	10 <sup>3</sup>
C	Постоянная упругого смещения доменных границ	–	0.2
K	Постоянная подвижности доменов	А/м	500
Дополнительные параметры модели уровня 1			
ALPHA	Параметр магнитной связи доменов	–	10 <sup>-3</sup>
GAMMA	Параметр демпфирования доменов	с <sup>-1</sup>	∞

Описание гистерезисных процессов в ферромагнетике основано на теории движения доменных стенок в магнитном поле. «Сухое» трение между доменными стенками учитывается введением зависимости дифференциальной магнитной проницаемости  $dM/dH$  от «запаздывания» величины намагниченности  $M$  по сравнению с безгистерезисной намагниченностью  $M_{an}(H)$  с учетом направления перемагничивания в виде:

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_{an}(H) - M}{K} \cdot \delta \quad (3.3)$$

где  $\delta$  – коэффициент, учитывающий направление перемагничивания,

$K$  – постоянная подвижности доменов, А/м.

В модели, таким образом, вершины петель симметричных циклов будут несколько смещены относительно безгистерезисной кривой намагничивания (рис. 3.1). Рассмотрим физический смысл и значения параметров и коэффициентов уравнений (3.2) и (3.3).

На «усе» предельного цикла перемагничивания ( $H \gg A$ ) гистерезисная и безгистерезисная кривые совпадают (рис. 3.1), поэтому в соответствии с (3.2):

$$M_{an} \approx M_S \approx M,$$

и, следовательно,

$$M_S = B_S/\mu_0 - H_S, \quad (3.4)$$

где  $B_S$  - индукция насыщения, Тл.

Последний параметр является справочным для магнитного материала, при необходимости он может быть легко измерен путем перемагничивания материала по предельному циклу (рис. 3.1, кривая 2).

Анализируя (3.2), несложно видеть, что параметр  $A$  формы безгистерезисной кривой намагничивания численно равен напряженности внешнего магнитного поля, при которой безгистерезисная намагниченность равна  $M_S/2$ . Для пересчета безгистерезисной кривой  $B_{an}(H)$  в зависимость  $M_{an}(H)$  можно воспользоваться соотношением, аналогичным (3.4):

$$M_{an}(H) = B_{an}(H)/\mu_0 - H. \quad (3.5)$$

В большинстве практических случаев для ферромагнетиков с высоким значением относительной магнитной проницаемости можно пренебречь величиной  $H$  в соотношении (3.5) и определять коэффициент  $A$  как напряженность поля  $H_a$ , соответствующую индукции  $B_S/2$  на кривой  $B_{an}(H)$  (кривая 3 на рис. 3.1). Для нахождения  $H_a$  в принципе можно построить полную безгистерезисную кривую 3, однако более просто провести измерение лишь одной петли с амплитудой индукции  $B_{ma} = B_S/2$  (петля 1 на рис. 3.1). Если считать, что отклонение амплитуды напряженности магнитного поля  $H_{ma}$  для этой петли от безгистерезисной кривой близко к коэрцитивной силе  $H_{ca}$ , то

$$A \approx H_{ma} - H_{ca}. \quad (3.6)$$

Безразмерный коэффициент  $\delta$  принимает значения  $+1, -1, 0$  в зависимости от направления перемагничивания и текущего положения рабочей точки на петле перемагничивания (рис. 3.1). Несложно видеть, что при увеличении напряженности внешнего магнитного поля, когда  $dH/dt > 0$ , и движении по участку I петли ( $dM/dH > 0$ ), намагниченность  $M(H)$  отстает от безгистерезисной  $M_{an}(H)$  ( $M(H) < M_{an}(H)$ ), т.е.  $\delta = +1$ . При переходе на участок II, определяемый «сухим» трением,  $dM/dH = 0$ , поэтому  $\delta = 0$ . При движении по участку III  $dM/dH$  снова положительно, но, т.к.  $M(H) > M_{an}(H)$ , то  $\delta = -1$ . И, наконец, на участке IV вновь  $\delta = 0$ .

Здесь уместно отметить, что оригинальное описание модели [79], в котором равенство  $\delta = 0$  на участках II и IV не упоминалось, приводило к существенным ошибкам при попытках решения уравнения (3.3).

Значение коэффициента  $K$  удобно оценить из рассмотрения предельного цикла перемагничивания 2 (рис. 3.1). В точке  $H = H_C$  выполняются условия:

$$M \approx 0, \quad M_{an} \approx \mu_{an} \cdot H_C$$

где  $\mu_{an}$  - относительная магнитная проницаемость безгистерезисной кривой намагничивания вблизи начала координат.

Если считать, что магнитная проницаемость  $\mu_c$  на «спинке» петли 2 близка к  $\mu_{an}$ , т.е.  $dM/dH = \mu_c \approx \mu_{an}$ , то из (3.3) следует, что

$$K \approx H_C. \quad (3.7)$$

Реальные процессы перемагничивания ферромагнетика осуществляются путем упругого прогиба доменных границ, предшествующих необратимому перемещению доменной стенки. Таким образом, уравнение, описывающее эти процессы, должно описывать эффект «вязкого» трения, которое в приложении к чисто механическим системам означает, что указанная составляющая силы пропорциональна скорости перемещения. В магнитной среде эта составляющая учитывается добавкой, пропорциональной  $dM_{an}/dH$ , что приводит, согласно [79], к уравнению

$$\frac{dM}{dH} = \frac{M_{an} - M}{K} \cdot \delta + \frac{C}{1+C} \cdot \frac{dM_{an}}{dH}, \quad (3.8)$$

где  $C$  - постоянная упругого смещения доменных границ.

В области малых внешних полей (начальная кривая намагничивания), когда необратимого перемещения доменных стенок не происходит, собственное намагничивание ферромагнетика осуществляется лишь за счет упругого смещения доменных границ. В этом режиме намагничивание описывается лишь вторым членом урав-

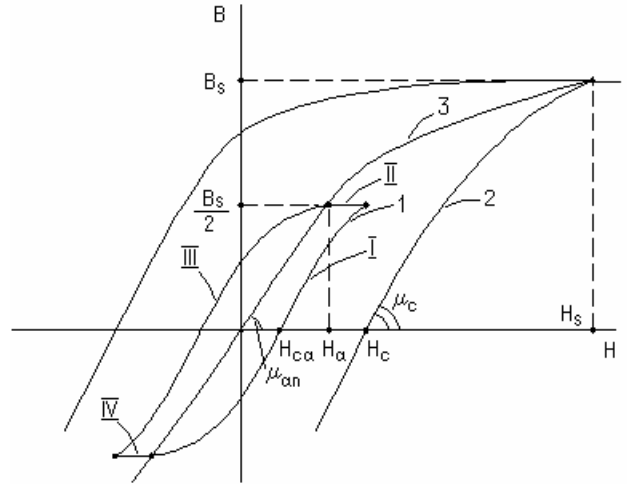


Рис. 3.1. Семейство расчетных петель перемагничивания (1, 2) и безгистерезисная кривая намагничивания (3)

нения (3.8). Если известна относительная магнитная проницаемость начальной кривой намагничивания  $\mu_i$  и безгистерезисной кривой  $\mu_{an}$ , то их отношение может быть определено формулой

$$\frac{dM / dH}{dM_{an} / dH} \approx \frac{\mu_i}{\mu_{an}} = \frac{C}{1+C}.$$

Тогда константа  $C$  определится соотношением

$$C = \frac{\mu_i}{\mu_{an} - \mu_i}. \tag{3.9}$$

Приведенные выше соотношения дают возможность оценить степень влияния того или иного параметра на форму петли перемагничивания. Так, параметр  $M_s$  определяет предельный цикл перемагничивания,  $K$  - ширину петли гистерезиса,  $A$  - «резкость» изгиба спинки петли перемагничивания. Параметр  $C$  обеспечивает моделирование слабых полей и связывает наклон безгистерезисной и начальной кривых намагничивания.

Как видно из приведенных соотношений, модель не учитывает частотных свойств петли перемагничивания, поэтому все приведенные рассуждения позволяют определить параметры модели для заданной частоты перемагничивания материала.

### Трансформатор

Представляет собой магнитопровод, на котором выполнены 2 или более обмотки.

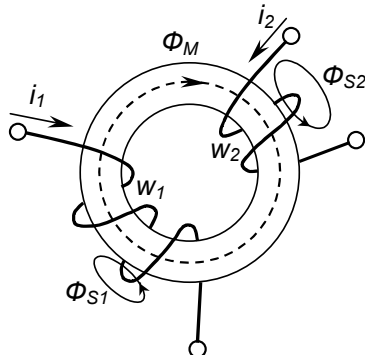


Рис. 1.17.

По магнитопроводу замыкается магнитный поток  $\Phi_M$ , который обеспечивает магнитную связь между обмотками. Существуют потоки рассеяния  $\Phi_{S1}$  и  $\Phi_{S2}$ , создаваемые токами  $i_1$  и  $i_2$ , не замыкающиеся по магнитопроводу и не являющиеся общими для обмоток. Обмотки имеют омические сопротивления  $r_1$  и  $r_2$ , а также другие паразитные параметры, например, межвитковые и межобмоточные емкости.

Идеальный трансформатор представляется элементом, в котором отсутствуют потоки рассеяния, активные сопротивления обмоток, паразитные емкости. Индуктивность намагничивания равна бесконечности, т.е. ток намагничивания равен 0. При этом обмотки пронизывают одинаковые потоки и по закону электромагнитной индукции для обеих обмоток можно записать, что:

$$u_1 = e_1 = \frac{d\Psi_M}{dt} = w_1 \frac{d\Phi_M}{dt}; \quad u_2 = e_2 = \frac{d\Psi_M}{dt} = w_2 \frac{d\Phi_M}{dt}; \quad e_2 = e_1 \frac{w_2}{w_1} = e_1 n$$

Здесь  $n=w_2/w_1$  — коэффициент трансформации трансформатора.

Из закона сохранения энергии следует, что:

$$i_1 \cdot e_1 = i_2 \cdot e_2, \quad \text{m.e. } i_2 = \frac{i_1}{n}$$

Это же вывод можно получить, используя закон полного тока с учетом того обстоятельства, что

$$i_\mu = 0: \quad \sum i w = 0; \quad i_1 \cdot w_1 = i_2 \cdot w_2, \quad i_2 = \frac{i_1}{n}$$

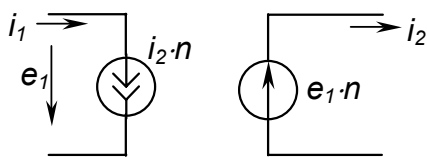


Рис. 1.18.

При указанных допущениях трансформатор можно представить эквивалентной схемой, изображенной на рис. 1.18:

Модель крайне проста, однако применяется крайне редко, т.к. не позволяет учесть принципиально важных для трансформатора явлений — накопления энергии в магнитопроводе и необходимость восстановления магнитного состояния сердечника.

Для ее учета представляют трансформатор совершенным элементом, в котором отсутствуют потоки рассеяния, но имеется конечная величина индуктивности намагничивания  $L_\mu$ . Последняя определяет ток намагничивания, протекающий по первичной обмотке, и приводит к эквивалентной схеме в виде

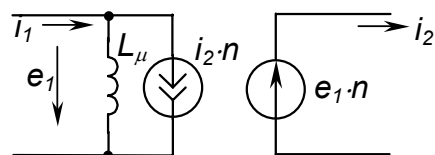


Рис. 1.19.

рис. 1.19:

В ряде случаев, особенно при расчете достаточно простых цепей, представляется удобным «привести» трансформатор к одной из сторон: первичной или вторичной, представив процесс передачи энергии через магнитопровод непосредственным подключением нагрузки к цепи источника энергии. Если, например,

трансформатор нагружен на активное сопротивление  $R$ , то величина тока нагрузки в первичной цепи определится:

$$i_{12} = i_2 \cdot n = \frac{u_2}{R_2} \cdot n,$$

Тогда эквивалентное сопротивление нагрузки, подключенной к первичной цепи, равно:

$$R_2' = \frac{u_1}{i_{12}} = \frac{u_1 \cdot R_2}{u_2 \cdot n} = \frac{R_2}{n^2}$$

Несложно показать, что индуктивность, включенная в качестве нагрузки, приводится к первичной стороне в виде:

$$L_2' = \frac{L_2}{n^2}$$

Емкость — в соответствии с соотношением:

$$C_2' = C_2 \cdot n^2$$

Таким образом; эквивалентная схема «приведенного» к первичной обмотке трансформатора имеет вид (рис. 1.20):

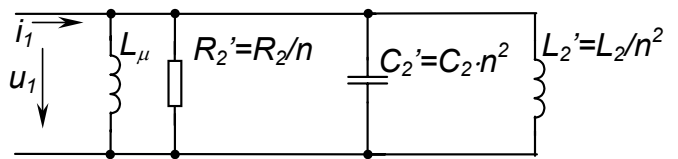


Рис. 1.20.

Выполнение трансформатора с сердечником из магнитопровода в виде ферромагнетика приводит к нелинейной зависимости  $L(i)$ .

Совершенная эквивалентная схема трансформатора с учетом  $L_\mu$  позволяет учесть важнейшую особенность его — необходимость восстановления исходного магнитного состояния сердечника. Так, с учетом приведенной выше эквивалентной схемы, можно показать, что подача импульсного напряжения на трансформатор в соответствии со схемой рис.1.21, приведет к тому, что на вторичной обмотке будет формироваться импульс напряжения вида (рис. 1.22):

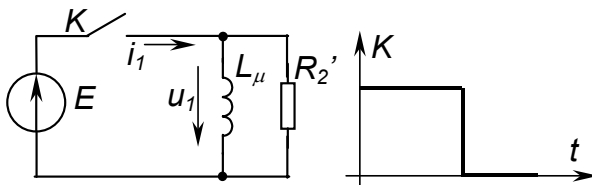


Рис. 1.21.

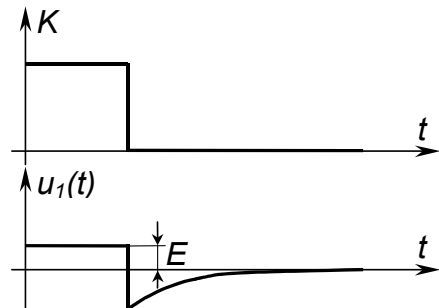
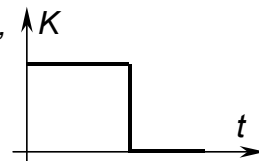


Рис. 1.22.

Действительно, процесс перемагничивания сердечника в период времени  $0 \leq t \leq t_u$  описывается соотношением:

$$\frac{d\psi}{dt} = E$$

После завершения накопления энергии (при  $t=t_u$ ) ток  $i_\mu$  замыкается по цепи  $L_\mu, R_2$ . При этом, по-прежнему:

$$\frac{d\psi}{dt} = u_1(t), \text{ причем } u_1(t) = -R_2' \cdot i_\mu(t)$$

Если рабочая точка при перемагничивании возвратилась в исходное состояние, то этот факт означает, что:

$$\Delta B_1 = \Delta B_2, \text{ т.е. } \Delta \psi_1 = \Delta \psi_2 \quad \int_0^{t_u} E dt = - \int_{t_u}^{\infty} u_1(t) dt$$

Последнее условие формулируется как равенство вольт-секундных площадей на обмотке при ее перемагничивании. Причем, равенство выполняется независимо от формы напряжения на обмотке. В частности, если обеспечить, что при  $0 \leq t \leq t_u$   $u_1=E$ , а при  $t_u \leq t \leq t_u+t_B$   $u_1=E_2$ , то окажется, что  $E_1 t_u = E_2 t_B$ .

Таким образом, при расчете трансформаторных цепей необходимо учитывать время восстановления магнитного состояния и формировать специальными цепями (цепями восстановления), форму напряжения при восстановлении. В показанном выше случае, при размыкании ключа К и отсутствии нагрузки, напряжение на ключе может стремиться к бесконечности, что приведет к его пробое.

Приведенные модели трансформатора являются низкочастотными, т.к. не учитывают влияние индуктивностей рассеяния и емкостей между обмотками. Полная эквивалентная схема трансформатора, приведенная к первичной цепи имеет вид рис. 1.23:

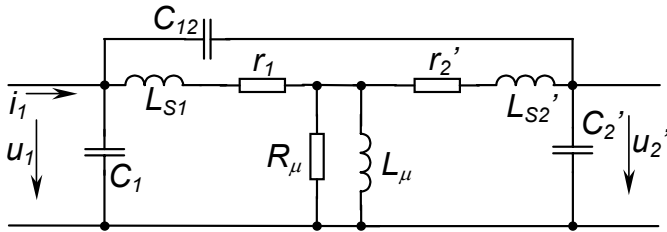


Рис. 1.23.

Здесь  $L_{S1}$ ,  $L_{S2}'$  — индуктивность рассеяния первичной обмотки и приведенная к первичной индуктивность рассеяния вторичной обмотки;

$C_1$ ,  $C_2'$  — емкость первичной и приведенная к первичной емкость вторичной обмотки;

$C_{12}$  — емкость между первичной и вторичной обмотками,

$R_{\mu}$  — эквивалентное сопротивление, отображающее потери в магнитопроводе.

Расчет переходных процессов в такой схеме, разумеется, весьма сложен, поэтому ее в ряде случаев упрощают. Дело в том, что индуктивность намагничивания имеет величину на 3-4 порядка большую, чем индуктивность рассеивания. Поэтому постоянные времени при расчете могут различаться на 4 и более порядков. С другой стороны, в зависимости от того, является трансформатор понижающим или повышающим, существенно меняется приведенная величина индуктивности рассеивания  $L_{S2}'$  (спорное утверждение!):

$$L_{S2}' = \frac{L_{S2}}{n^2}$$

Аналогично, в повышающих трансформаторах наибольшее влияние имеет приведенная к первичной обмотке емкость вторичной  $C_2'$ :

$$C_2' = C_2 \cdot n^2$$

Как правило, индуктивности рассеяния не оказывают существенного влияния на процессы в цепях намагничивания, поэтому оказывается возможным объединить индуктивности рассеяния в одну. То же следует и для резисторов, отображающих омические потери в обмотках. Поэтому для *повышающего* трансформатора  $n \gg 1$  эквивалентная схема трансформатора имеет вид рис. 1.24, для понижающего — соответственно, рис.1.25:

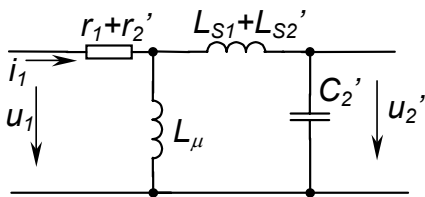


Рис. 1.24.

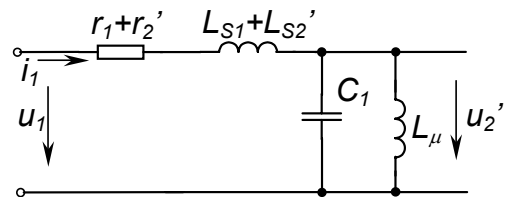


Рис. 1.25.

## Модели полупроводниковых приборов

Модели полупроводниковых приборов, как правило, нелинейные, можно сформировать двумя способами. При первом (физическом) способе проводят анализ электрических процессов, происходящих в структуре полупроводникового прибора, выражают токи и напряжения на электродах прибора в соответствии с процессами, происходящими в нем, что, собственно, и дает ВАХ прибора. Полученную модель представляют базовыми моделями резисторов, индуктивностей и емкостей, зависимыми и независимыми источниками тока и напряжения, добавив реактивные компоненты, соответствующие свойствам конструктивного оформления прибора, получают полную модель, причем в нее входят параметры структуры прибора и его корпуса.

При втором подходе используется ВАХ прибора, которая известна или снята экспериментально. ВАХ аппроксимируется с заданной точностью на том участке, на котором предполагается работа прибора. При этом модель будет содержать некоторые эмпирические коэффициенты, не связанные с ре-



альной физической структурой прибора. При втором подходе за основу может быть принята также некоторая графическая модель.

Рассмотрим

### Модель полупроводникового диода

Как известно из курса ФОЭТ, вывод ВАХ полупроводникового диода использует решение уравнения непрерывности, которое связывает концентрацию носителей заряда в любой точке полупроводника с параметрами электрического поля в полупроводнике, скоростью генерации и рекомбинации носителей заряда, диффузией носителей и временем. При этом, с учетом некоторых допущений (нулевая ширина р-п-перехода, отсутствие омического сопротивления базовой области перехода, отсутствие явлений пробоя перехода и поверхностных состояний), ВАХ перехода имеет вид:

$$I = I_0 \cdot \left( e^{\frac{U}{\varphi_T}} - 1 \right); \quad \text{здесь } I_0 = q \cdot S \cdot \left( \frac{D_p p_{n0}}{L_p} + \frac{D_n n_{p0}}{L_n} \right),$$

Где  $q$  – заряд электрона,  $S$  – площадь рп-перехода,  $p_{n0}$ ,  $n_{p0}$  – концентрации неосновных носителей в областях n и p, соответственно;  $D_p$ ,  $D_n$  – коэффициенты диффузии дырок и электронов. Электрическое обозначение диода на принципиальной схеме имеет вид:

Статическая характеристика диода, соответствующая приведенному выражению, изображена на рис. 1.26.

Последнее выражение и характеристика есть статическая характеристика (модель) рп-перехода. Точность модели относительно невысока, что определяется принятыми допущениями. Реальная ВАХ отличается от идеальной наличием участка рекомбинационной составляющей прямого тока, термогенерационной составляющей обратного тока, токами утечки, явлениями пробоя на обратной ветви ВАХ, наконец, наличием сопротивления базовой области рп-перехода и емкостями рп-перехода, характеризующими инерционность процессов в приборе.

Вольт-амперную характеристику реального диода с учетом указанных характерных особенностей можно представить в виде рис. 1.27, а модель диода на основе такой аппроксимации в виде рис. 1.28:

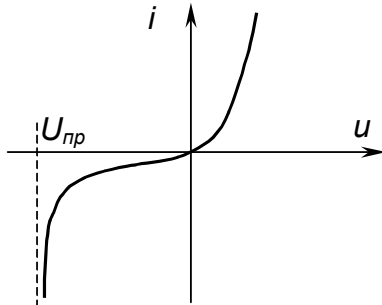


Рис. 1.27.

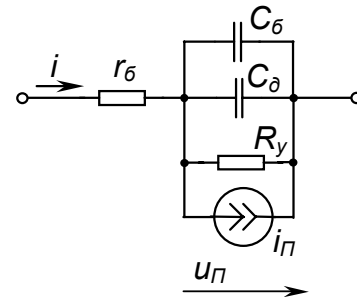


Рис. 1.28.

В указанной модели  $i_n(u_n)$  – нелинейный источник тока, описывающий статический режим прибора в виде:

$$i = (i_n + i_y) = I_0 \cdot \left( e^{\frac{u-i \cdot r_б}{m \cdot \varphi_T}} - 1 \right) + \frac{u - i \cdot r_б}{R_y} - I_0 \cdot e^{A \cdot (U_{np} + B \cdot u)}$$

В последнем выражении  $I_0$  – по-прежнему, тепловой ток прибора,  $r_б$  – сопротивление базовой области перехода,  $m$  – коэффициент, учитывающий реальную конфигурацию перехода,  $U_{np}$  – напряжение лавинного или туннельного пробоя перехода,  $A$ ,  $B$  – коэффициенты аппроксимации ВАХ вблизи участка пробоя, причем  $A < 0$ ,  $B > 0$ ;  $R_y$  – сопротивление утечки рп-перехода. Необходимо отметить, что многие величины, входящие в модель – нелинейные. Сопротивление базы  $r_б$ , например, уменьшается с ростом тока через диод вследствие эффекта модуляции сопротивления, связанного с количеством носителей заряда в базовой области. Зависимость  $r_б(i)$  можно представить в виде:

$$r_б = \frac{1}{k_1 + k_2 \cdot i},$$

где  $K_1$ ,  $K_2$  – некоторые коэффициенты, о величине которых речь пойдет ниже.

Емкостные составляющие модели – барьерная и диффузионная емкость  $pn$ -перехода. Барьерная емкость  $C_{\delta}$  – нелинейная емкость, обусловленная наличием объемного заряда неподвижных ионов донорной и акцепторной примеси вблизи границ области объемного заряда. Нелинейная величина, зависящая от напряжения на переходе в соответствии с выражением:

$$C_{\delta} = C_{\delta 0} \cdot \left( \frac{\Delta\varphi_0}{\Delta\varphi_0 - U_{\Pi}} \right)^n$$

Здесь  $C_{\delta 0}$  – величина барьерной емкости при  $U_{\Pi}=0$ ,  $\Delta\varphi_0$  – контактная разность потенциалов, равная 0,5 – 1В для полупроводников различных типов,  $n$  – показатель степени, равный  $1/2$  для резких переходов и  $1/3$  для плавных. Формула точно отражает поведение барьерной емкости при обратном смещении ( $U_{\Pi}<0$ ) и может дать большие погрешности при  $U_{\Pi}>0$ , т.к. в области больших токов диода, когда  $U_{\Pi} \approx \varphi_0$ ,  $C_{\delta} \rightarrow \infty$ . При расчете могут возникать ошибки типа деления на ноль или переполнения разрядной сетки машины. Емкостью  $C_{\delta}$  при расчетах практически пренебрегать нельзя, поэтому предложены различные варианты устранения подобных неточностей и ошибок. Например, модель Гуммеля-Пуна аппроксимирует емкость  $C_{\delta}(U_{\Pi})$  на прямом участке ВАХ выражением:

$$C_{\delta} = C_{\delta 0} \cdot \left( 1 + n \cdot \frac{U_{\Pi}}{\Delta\varphi_0} \right);$$

На прямом участке вольт-амперной характеристики важное значение имеет нелинейная диффузионная емкость  $pn$ -перехода, которая определяется эффектом накопления носителей заряда в области базы при прямом смещении. Величина  $C_{\delta}(i)$  определяется соотношением:

$$C_{\delta} = (I_0 + i) \cdot \frac{\tau}{m \varphi_T}$$

Здесь  $\tau$  – постоянная времени жизни неосновных носителей заряда в области базы  $pn$ -перехода.

Рассмотрим уравнение, описывающее  $pn$ -переход в областях, далеких от пробойных участков. При этом:

$$\frac{du_{\Pi}}{dt} = \frac{1}{C_{\delta} + C_{\delta 0}} \left( i - I_0 \cdot \left( e^{\frac{U_{\Pi}}{m \varphi_T}} - 1 \right) - \frac{U_{\Pi}}{R_y} \right),$$

а напряжение на диоде определяется суммой двух составляющих:

$$u = U_{\Pi} + U_{r\delta} = U_{\Pi} + \frac{i}{k_1 + k_2 \cdot i}$$

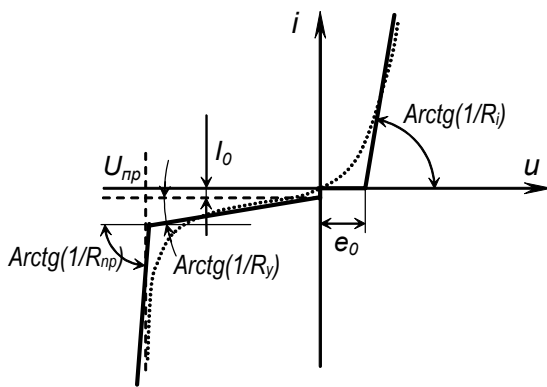


Рис. 1.29.

Полученная модель достаточно сложна, т.к., прежде всего, нелинейна. На практике достаточно часто используют кусочно-линейную аппроксимацию ВАХ, достаточно точно соответствующую реальной на отдельных участках характеристики. Заменяем ВАХ следующей кусочно-ломаной линией (рис. 1.29):

Параметры аппроксимирующих прямых:  $R_i$ ,  $e_0$ ,  $I_0$ ,  $R_y$ ,  $U_{np}$ ,  $R_{np}$  определяются по аппроксимируемой характеристике. Данной аппроксимации соответствует кусочно-линейная модель полупроводникового диода. Ее можно представить в виде следующей эквивалентной схемы (рис. 1.30):

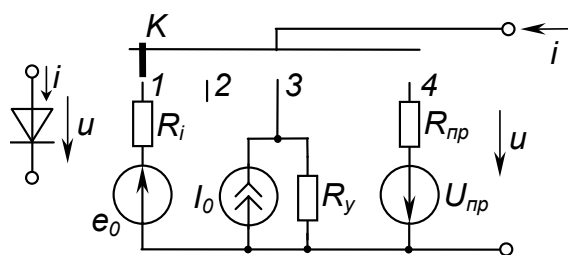


Рис. 1.30.

Положение ключа К на указанной модели определяется из следующих условий:

1. положение при  $i>0, u>e_0$ .
2. положение при  $0 \leq U \leq e_0$ .
3. положение при  $-U_{np} \leq U \leq 0; i<0$ .
4. положение при  $U < -U_{np}$ .

Подобная модель достаточно груба, она используется обычно при начальном приближенном расчете

электронной схемы, при самых грубых приближениях ее иногда еще более упрощают и приводят к виду (рис. 1.31):

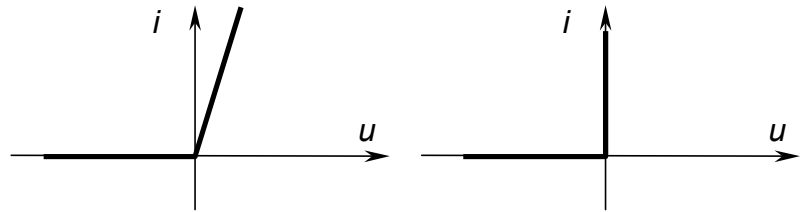


Рис. 1.31.

Для точного расчета электронных схем с использованием диодов и принятой первоначально точной модели, требуется определить ряд параметров модели:  $r_b$ ,  $C_{b0}$ ,  $n$ ,  $m$ ,  $I_0$ ,  $\tau$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $R_y$ . Рассмотрим способ экспериментального определения параметров модели по вольт-амперной характеристике (рис. 1.32):

где по аппроксимации ВАХ определяется  $R_y = \frac{\Delta U_{обр}}{\Delta I_{обр}}$ .

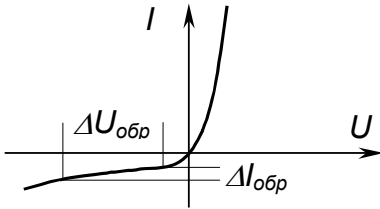


Рис. 1.32.

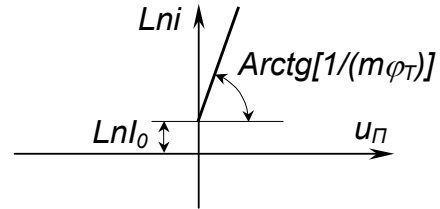


Рис. 1.33.

Величины  $m$  и  $I_0$  определяются путем логарифмирования ВАХ в области больших токов. При этом единицей в выражении для тока перехода можно пренебречь, что приводит к выражению:

$$\ln i = \ln I_0 + \frac{U_{\Pi}}{m \varphi_T}$$

Построив зависимость  $Lni(u_{\Pi})$ , можно получить параметры аппроксимации  $\ln I_0$  и  $m$ , как показано на рисунке 1.33.

Величину  $C_{b0}$  можно определить из справочников. Построив зависимость  $C_b(U)$ , по двум точкам, составив систему уравнений, можно определить величину  $\Delta \varphi_0$  и  $n$ . Величина постоянной времени жизни носителей  $\tau$ , как правило, задается в справочнике, ее экспериментальное определение в диоде состоит в измерении постоянной времени рассасывания носителей при переключении тока в диоде с прямого на обратный.

Коэффициенты аппроксимации зависимости  $r_b(i)$  определяются в соответствии с формулой:

$$r_b = \frac{1}{(k_1 + k_2 \cdot i)}$$

Определение коэффициентов происходит при подаче на диод импульсов прямоугольного тока амплитудой  $I$ . Напряжение на диоде формируется за счет заряда барьерной и диффузионной емкостей, а также установления напряжения собственно на  $r_b$ . Вид экспериментально снятой осциллограммы напряжения на диоде изображен на рис. 1.34.

В первый момент после подачи импульса тока  $I$  напряжение на диоде скачком возрастает до величины  $U(0)$ . Так как эффект модуляции сопротивления  $r_b$  определяется накоплением заряда в базе диода, то в первые моменты времени, когда заряд в базе еще равен 0, это эквивалентно отсутствию тока через диод (в статике). Поэтому величина  $U(0)$  определяется как:

$$U(0) = \frac{I}{(k_1 + k_2 \cdot 0)}; \quad k_1 = \frac{I}{U(0)}$$

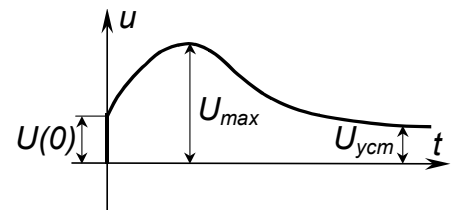


Рис. 1.34.

Дальнейшее изменение напряжения определяется процессом быстрого заряда диффузионной емкости  $C_d$   $pn$ -перехода и относительно медленного накопления носителей заряда в базе диода. После установления напряжения на диоде оно определяется величиной  $U_{ycm}$ .

$$U_{ycm} = U_{\Pi}(I) + U_{r_b}(I)$$

Т.к. емкость перехода перезаряжается значительно быстрее, чем накапливаются заряды в базе, и, следовательно, снижается сопротивление  $r_b$ , то можно положить, что:

$$U_{\max} = U_{\Pi}(I) + U_{r\delta}(0) = U_{\Pi}(I) + U(0)$$

При этом можно записать:

$$U_{\max} = U_{\Pi}(I) + U(0); \quad U_{\Pi}(I) = U_{\max} - U(0)$$

$$r_{\delta_{\text{усм}}} = \frac{U_{\text{усм}} - U_{\Pi}(I)}{I} = \frac{U_{\text{усм}} - U_{\max} + U(0)}{I}$$

$$\frac{1}{k_1 + I \cdot k_2} = \frac{1}{\frac{I}{U(0)} + I \cdot k_2} = \frac{U_{\text{усм}} - U_{\max} + U(0)}{I}$$

$$K_2 = \frac{1}{U_{\text{усм}} - U_{\max} + U(0)} - \frac{1}{U(0)} = \frac{U_{\max} - U_{\text{усм}}}{U(0)(U_{\text{усм}} - U_{\max} + U(0))}$$

### Модель биполярного транзистора

Транзистор представляет собой структуру, состоящую из 2-х рп-переходов. В нормальном усилительном режиме работы эмиттерный переход инжектирует носители заряда, которые, частично рекомбинируя в области базы попадают в коллекторный переход и создают коллекторный ток. Ток рекомбинации носителей заряда в базе создает ток базы. Геометрия транзистора определяется таким образом, что рекомбинационная составляющая тока базы мала по сравнению с инжекционной составляющей тока эмиттера, поэтому создается возможность малой величиной базового тока управлять значительными величинами тока коллектора. Таким образом, транзистор обладает способностью усиления тока, что определяет его основные свойства. Эквивалентная схема такой структуры может быть отображена двумя источниками тока и двумя рп-переходами, а также элементами, дополняющими модели рп-переходов (рис. 1.35):

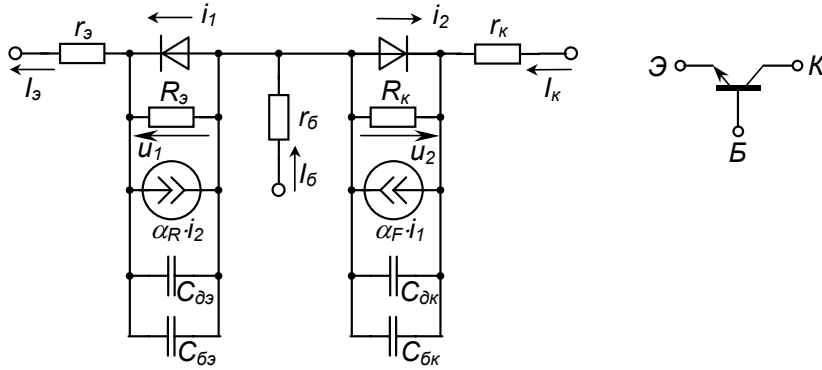


Рис. 1.35.

Такая модель, предложенная Эберсом и Моллом в 1954 году, получила названия модели Эберса-Молла.

Как и для случая рп-перехода, токи диодов, инжектирующиеся через переходы, определяются в виде:

Как и для случая рп-перехода, токи диодов, инжектирующиеся через переходы, определяются в виде:

$$i_1 = I'_{\kappa 0} \cdot \left( e^{\frac{U_2}{m_{\kappa} \phi_T}} - 1 \right); \quad i_2 = I'_{\varepsilon 0} \cdot \left( e^{\frac{U_1}{m_{\varepsilon} \phi_T}} - 1 \right).$$

В статике, пренебрегая токами через сопротивления утечек, можно записать:

$$I_{\varepsilon} = I'_{\varepsilon 0} \cdot \left( e^{\frac{U_1}{m_{\varepsilon} \phi_T}} - 1 \right) - \alpha_R \cdot I'_{\kappa 0} \cdot \left( e^{\frac{U_2}{m_{\kappa} \phi_T}} - 1 \right)$$

$$I_{\kappa} = \alpha_F \cdot I'_{\varepsilon 0} \cdot \left( e^{\frac{U_1}{m_{\varepsilon} \phi_T}} - 1 \right) - I'_{\kappa 0} \cdot \left( e^{\frac{U_2}{m_{\kappa} \phi_T}} - 1 \right)$$

$$I_{\delta} = I_{\varepsilon} - I_{\kappa}$$

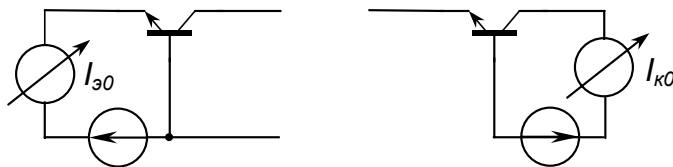


Рис. 1.36.

Несложно получить, что величина токов  $I'_{\varepsilon 0}$  и  $I'_{\kappa 0}$  соответствует токам эмиттерного и коллекторного переходов при величине напряжения  $U_2=0$  и  $U_1=0$ , соответственно, т.е. при закорачивании выводов коллектора и базы, и эмиттера и базы, соответственно и большой величине отрицательного напряжения на переходе. В справочной литературе более часто встречаются в качестве параметров на транзисторы, токи  $I_{\varepsilon 0}$  и  $I_{\kappa 0}$ , которые определяются токами эмиттерного и коллекторного переходов, соответственно, при разомкнутом электроде коллектора и эмиттера:  $I_{\kappa}=0$ ;  $I_{\varepsilon}=0$  (рис. 1.36).

Рассмотрим соотношения, связывающие  $I_{\varepsilon 0}'$  и  $I_{\kappa 0}'$  с величинами  $I_{\varepsilon 0}$  и  $I_{\kappa 0}$ . В этом случае, например, при обрыве коллекторного перехода, ток  $I_{\kappa}=0$ . Подставляя в уравнения модели  $I_{\kappa}=0$ , несложно получить:

$$I_{\varepsilon 0}' = \frac{I_{\varepsilon 0}}{1 - \alpha_F \alpha_R}; \quad I_{\varepsilon} = I_{\varepsilon 0} \cdot \left( e^{\frac{U_1}{m \varphi_T}} - 1 \right)$$

$I_{\varepsilon 0}$  — это обратный ток эмиттерного перехода при подаче на него запирающего напряжения, много большего  $m \varphi_T$ , и обрыве коллектора.

Аналогично можно показать, что:

$$I_{\kappa 0}' = \frac{I_{\kappa 0}}{1 - \alpha_F \alpha_R}; \quad I_{\kappa} = -I_{\kappa 0} \cdot \left( e^{\frac{U_2}{m \varphi_T}} - 1 \right)$$

Биполярный транзистор характеризуется коэффициентом передачи тока эмиттера  $\alpha$  или тока базы  $\beta$ . Связь между коэффициентами осуществляется соотношениями:

$$\alpha = \frac{I_{\kappa}}{I_{\varepsilon}}; \quad \beta = \frac{I_{\kappa}}{I_{\varepsilon}}; \quad \alpha = \frac{\beta}{\beta + 1}; \quad \beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha}.$$

Динамические параметры транзистора учитываются в модели Эберса-Молла емкостными параметрами: барьерными емкостями  $C_{\varepsilon \varepsilon}$  и  $C_{\varepsilon \kappa}$ , диффузионными емкостями  $C_{\varepsilon \varepsilon}$  и  $C_{\varepsilon \kappa}$ :

$$C_{\varepsilon \varepsilon} = \frac{\tau_F}{m_{\varepsilon} \varphi_T} \cdot (i_{\varepsilon} + I_{\varepsilon 0}'); \quad C_{\varepsilon \kappa} = \frac{\tau_R}{m_{\kappa} \varphi_T} \cdot (i_{\kappa} + I_{\kappa 0}')$$

Здесь  $\tau_F$  и  $\tau_R$  — постоянные времени жизни для нормального и инверсного включения транзистора.

Следует отметить, что транзистор представляет собой существенно нелинейную структуру, поэтому все его параметры  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $C_{\kappa}$ ,  $C_{\varepsilon}$  не постоянны, а зависят от режима, т.е. величины напряжений  $U_1$  и  $U_2$ , а также токов  $i_1$  и  $i_2$ .

### Определение параметров модели биполярного транзистора

Определение теплового тока  $I_{\varepsilon 0}$  и  $m_{\varepsilon}$  осуществляется путем снятия зависимости  $I_{\varepsilon}(U_{\varepsilon \varepsilon})$  (рис. 1.37). Указанная зависимость в полулогарифмическом масштабе имеет вид (рис. 1.37):

Измерение  $\beta_N$  ( $\alpha_N$ ) осуществляется при  $U_{\kappa \varepsilon}=0$  (рис. 1.38).

$$\beta_F = \frac{I_{\varepsilon} - I_{\varepsilon 0}}{I_{\varepsilon 0}}; \quad \alpha_F = \frac{\beta_F}{1 + \beta_F}.$$

Аналогично, в инверсном режиме измеряются параметры  $I_{\kappa 0}$ ,  $m_{\kappa}$  и  $\beta_R$ .

Определение сопротивлений  $r_{\varepsilon}$ ,  $r_B$  и  $r_{\kappa}$  осуществляется в измерительной схеме рис. 1.39.

1. При разомкнутом ключе К снимается зависимость  $I_{\varepsilon}=f(U_{\kappa \varepsilon})$ , имеющая вид, показанный на рис. 1.40.

2. Сопротивление  $r_{\kappa}$  определяется аналогичным образом при инверсном включении транзистора и разомкнутом ключе К.

3. Для определения  $r_B$  в измерительной установке определяется значения напряжения  $U_{\varepsilon \varepsilon}$  при замкнутом ключе К  $U_{\varepsilon \varepsilon 1}$  и разомкнутом ключе К ( $U_{\varepsilon \varepsilon 2}$ ) и при одинаковых значениях тока  $I_{\varepsilon}$ :

$$U_{\varepsilon \varepsilon 1} = U_{\varepsilon} + r_B I_{\varepsilon} + r_{\varepsilon} I_{\varepsilon}, \quad U_{\varepsilon \varepsilon 2} = U_{\varepsilon} + I_{\varepsilon} (r_B + r_{\varepsilon}).$$

$U_{\varepsilon}$  — напряжение на переходе Э-Б. Т.к.  $r_B \gg r_{\varepsilon}$ , то  $I_{\varepsilon} (r_B + r_{\varepsilon}) \gg r_B I_{\varepsilon} + r_{\varepsilon} I_{\varepsilon}$ , откуда:

$$r_B = \frac{U_{\varepsilon \varepsilon 2} - U_{\varepsilon \varepsilon 1}}{I_{\varepsilon}}.$$

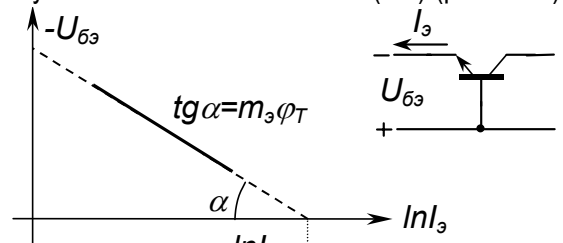


Рис. 1.37.

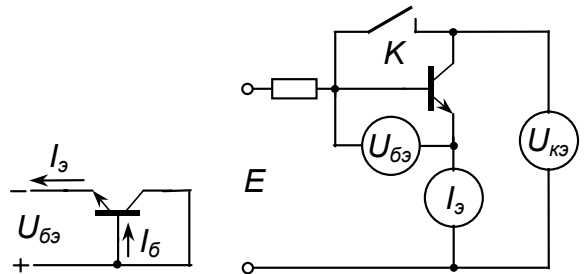


Рис. 1.38.

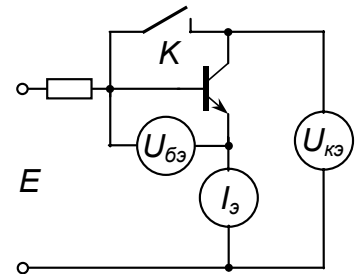


Рис. 1.39.

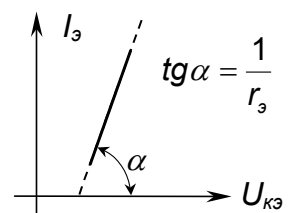


Рис. 1.40.

Для определения параметра  $\tau_F$  измеряется граничная частота усиления тока  $f_T$  как функция тока  $I_K$ . Аналитически эта связь определяется как:

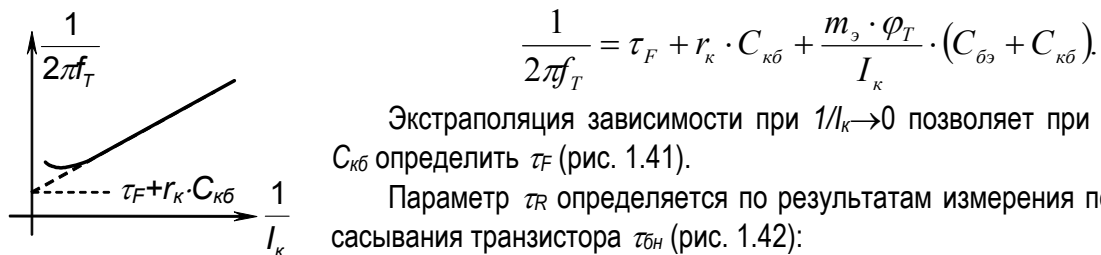


Рис. 1.41.

Экстраполяция зависимости при  $1/I_K \rightarrow 0$  позволяет при известных  $r_k$  и  $C_{кб}$  определить  $\tau_F$  (рис. 1.41).

Параметр  $\tau_R$  определяется по результатам измерения постоянной расщепления транзистора  $\tau_{бн}$  (рис. 1.42):

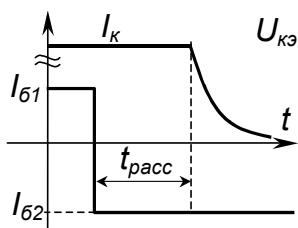


Рис. 1.42.

Измеряем  $t_{pacc}$  с использованием временных диаграмм, далее опреде-

ляем:

$$\tau_{бн} = \frac{t_{pacc}}{\ln \left[ \frac{I_{б1} + |I_{б2}|}{\frac{I_{кн}}{\beta_F} + |I_{б2}|} \right]}$$

Далее вычисляется:

$$\tau_R = \frac{1}{\beta_R} \cdot \left[ \tau_{бн} \cdot \frac{\beta_F + \beta_R + 1}{\beta_F} - \tau_F \cdot (\beta_R + 1) \right].$$

### Малосигнальная динамическая модель биполярного транзистора

Для активного нормального режима малого сигнала широко используется простая модификация модели Эберса-Молла, которая может быть получена из основной модели при учете:

- а) прямого смещения эмиттерного перехода  $U_{бэ} > 0$ ;
  - б) большого отрицательного смещения на коллекторном переходе  $U_{бк} < 0$ ;
  - в) малого изменения напряжений и токов относительно рабочей точки по постоянному току.
- Рассмотрим для этого случая уравнения Эберса-Молла:

$$I_\beta = I'_{\beta 0} \cdot \left( e^{\frac{U_{бэ}}{m_\beta \varphi_T}} - 1 \right) + \alpha_R \cdot I'_{\kappa 0} \quad I_\kappa = \alpha_F \cdot I'_{\beta 0} \cdot \left( e^{\frac{U_{бэ}}{m_\beta \varphi_T}} - 1 \right) + I'_{\kappa 0}.$$

Выразим ток коллектора  $I_K$  через ток эмиттера  $I_\beta$ :

$$I_\kappa = \alpha_F \cdot I_\beta - \alpha_F \alpha_R I'_{\kappa 0} + I'_{\kappa 0} = \alpha_F \cdot I_\beta + (1 - \alpha_F \alpha_R) I'_{\kappa 0}$$

$$I_\kappa = \alpha_F \cdot I_\beta + I_{\kappa 0}$$

Для малых приращений (режим малого сигнала):

$$i_\kappa = \alpha_F \cdot i_\beta = \alpha_F \cdot \frac{u_{бэ}}{r_{\beta \text{ дифф}}}, \quad \text{где } r_{\beta \text{ дифф}} = \frac{m_\beta \varphi_T}{I_\beta}.$$

Таким образом, малосигнальная эквивалентная схема БТ в нормальном активном режиме выглядит следующим образом (рис. 1.44).

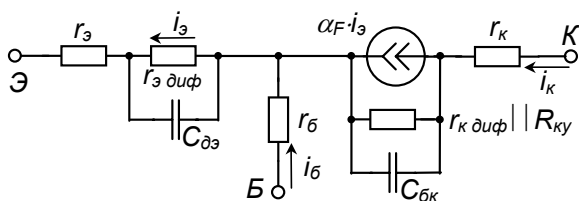


Рис. 1.44.

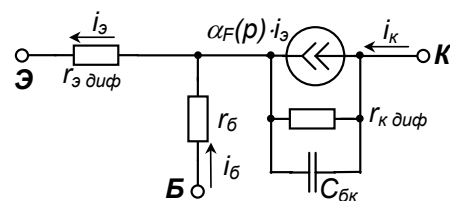


Рис. 1.45.

Отметим, что в большинстве режимов можно пренебречь  $r_\beta$ ,  $r_k$  и  $R_{к\gamma}$  ( $r_{\beta \text{ дифф}} \gg r_\beta$ ,  $R_{к\gamma} \gg r_{к \text{ дифф}}$ ,  $r_{к \text{ дифф}} \gg r_k$ ), а диффузионная емкость эмиттерного перехода  $C_{бэ}$  учитывается частотно-зависимым коэффициентом передачи тока эмиттера  $\alpha_F(p) = \frac{\alpha_F}{1 + p\tau_\beta}$ . С учетом сказанного малосигнальная инерционная схема замещения БТ преобразуется к виду рис. 1.45.

$$\alpha_F(p) = \frac{\alpha_F}{1 + p\tau_\gamma}; \quad \beta_F(p) = \frac{\alpha_F(p)}{1 - \alpha_F(p)} = \frac{\alpha_F}{1 + p\tau_\gamma} \cdot \frac{1}{\frac{1 + p\tau_\gamma - \alpha_F}{1 + p\tau_\gamma}} = \frac{\alpha_F}{1 + p\tau_\gamma - \alpha_F};$$

$$\beta_F(p) = \frac{\frac{\alpha_F}{1 - \alpha_F}}{1 + \frac{p\tau_\gamma}{1 - \alpha_F}} = \frac{\beta_F}{1 + (\beta_F + 1)p\tau_\gamma}; \quad \beta_F(p) = \frac{\beta_F}{1 + p\tau_\beta}, \quad \text{где } \tau_\beta = (\beta_F + 1)\tau_\gamma.$$

Учитывая, что ток эмиттера равен сумме коллекторного и базового токов, схему рис. 1.45. можно преобразовать к виду 1.46, используя следующие тривиальные преобразования:

$$i_\gamma = i_\delta + \alpha_F(p) \cdot i_\gamma + \frac{u}{r_k} + u \cdot pc_{\delta k} \Leftrightarrow i_\gamma - i_\delta = \alpha_F(p) \cdot (i_\delta + i_k) + \frac{u}{r_k} + u \cdot pc_{\delta k} \Leftrightarrow$$

$$i_k(1 - \alpha_F(p)) = i_\delta \cdot \alpha_F(p) + \frac{u}{r_k} + u \cdot pc_{\delta k} \Leftrightarrow i_k = \frac{\alpha_F(p)}{(1 - \alpha_F(p))} \cdot i_\delta + \frac{u}{r_k \cdot (1 - \alpha_F(p))} + \frac{u \cdot pc_{\delta k}}{1 - \alpha_F(p)}$$

$$i_k = \beta_F(p) \cdot i_\delta + \frac{u}{r_k \cdot \frac{1}{1 + \beta_F(p)}} + u \cdot pc_{\delta k} \cdot (1 + \beta_F(p)) \quad \text{или} \quad \boxed{i_k = \beta_F(p) \cdot i_\delta + \frac{u}{r_k^*} + u \cdot pc_{\delta k}^*},$$

где:

$$\beta_F(p) = \frac{\beta_F}{1 + p\tau_\gamma(1 + \beta_F)} = \frac{\beta_F}{1 + p\tau_\beta};$$

$$c_{BK}^*(p) = c_{BK}(1 + \beta_F(p)); \quad r_k^*(p) = \frac{r_k}{1 + \beta_F(p)}$$

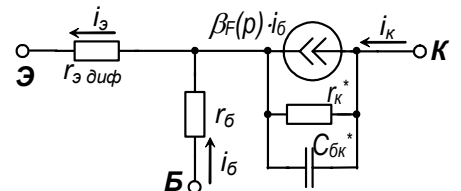


Рис. 1.46.

**Разновидность модели Эберса-Молла, используемая в программах моделирования электронных схем (DESIGN LAB, MICROCAP и др.)**

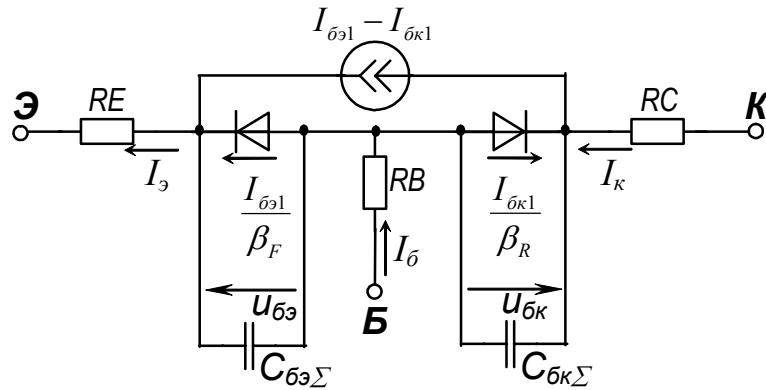


Рис. 1.35А. Модифицированная модель Эберса-Молла биполярного транзистора

Уравнения для статического режима (на постоянном токе)

$$\begin{cases} I_{\delta\epsilon 1} = I_0 \cdot \left( e^{\frac{U_{\delta\epsilon}}{n_F \varphi_T}} - 1 \right); & I_{\delta\kappa 1} = I_0 \cdot \left( e^{\frac{U_{\delta\kappa}}{n_R \varphi_T}} - 1 \right); \\ I_\delta = \frac{I_{\delta\epsilon 1}}{\beta_F} + \frac{I_{\delta\kappa 1}}{\beta_R}; & I_\kappa = I_{\delta\epsilon 1} - \frac{\beta_R + 1}{\beta_R} \cdot I_{\delta\kappa 1}; & I_\gamma = \frac{\beta_F + 1}{\beta_F} \cdot I_{\delta\epsilon 1} - I_{\delta\kappa 1} \end{cases}$$

## Уравнения для паразитных емкостей

Суммарная паразитная емкость эмиттерного и коллекторных переходов:

$$C_{\text{бэ}\Sigma} = t_f \cdot G_{\text{бэ}} + C_{j\text{бэ}}(U_{\text{бэ}}) \quad C_{\text{бк}\Sigma} = t_r \cdot G_{\text{бк}} + C_{j\text{бк}}(U_{\text{бк}}),$$

где  $t_f$ ,  $t_r$  — forward transit time, reverse transit time (прямое и обратное время пролета). Величины, характеризующие инерционные процессы накопления носителей при прямом смещении на переходе б-э и б-к соответственно.

$G_{\text{бэ}} = \frac{dI_{\text{бэ}}}{dU_{\text{бэ}}}$ ,  $G_{\text{бк}} = \frac{dI_{\text{бк}}}{dU_{\text{бк}}}$  — проводимости переходов база-эмиттер и база-коллектор на постоянном

токе при прямом смещении на соответствующем переходе.

$C_{j\text{бэ}}(U_{\text{бэ}})$ ,  $C_{j\text{бк}}(U_{\text{бк}})$  — барьерные емкости переходов база-эмиттер и база-коллектор, имеют сложную зависимость от напряжения на соответствующих переходах  $U_{\text{бэ}}$ ,  $U_{\text{бк}}$ . При прямом и обратном смещениях на переходах вычисляется по разным формулам:

$$C_{j\text{бэ}(c)} = C_{JE(c)} \cdot \left(1 - \frac{V_{\text{бэ}(c)}}{V_{JE(c)}}\right)^{-M_{JE(c)}}, \quad \text{при } V_{\text{бэ}(c)} \leq FC \cdot V_{JE(c)};$$

$$C_{j\text{бэ}(c)} = C_{JE(c)} \cdot (1 - FC)^{-(1+M_{JE(c)})} \cdot \left(1 - FC \cdot (1 + M_{JE(c)}) + \frac{M_{JE(c)} V_{\text{бэ}(c)}}{V_{JE(c)}}\right), \quad \text{при } V_{\text{бэ}(c)} > FC \cdot V_{JE(c)}.$$

## Модель полевого транзистора

Полевые транзисторы – приборы, в которых используются эффекты изменения параметров полупроводника при воздействии на него электрического поля. Полевые транзисторы по принципу действия подразделяют на приборы с управляющим рп-переходом, МДП-транзисторы, МДП-транзисторы с вертикальным каналом. Рассмотрим принцип работы МДП-транзистора (рис. 1.47):

При подаче на затвор положительного потенциала достаточной величины происходит инверсия проводимости в приповерхностном слое полупроводника подложки, в результате чего образуется канал n-типа, проводимость которого зависит от величины приложенного напряжения. Таким образом, величина тока стока полевого транзистора оказывается зависящей от величины напряжения затвор-исток.

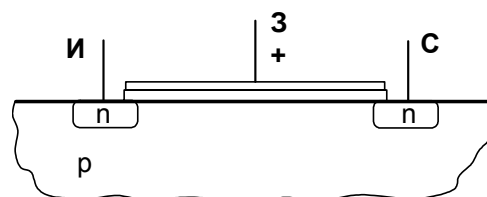


Рис. 1.47.

Более детальное рассмотрение процессов в транзисторе приводит к тому, что ток стока зависит от напряжения сток-исток и вследствие эффекта перекрытия канала, вблизи области стока, таким образом, в целом полевой транзистор в статике представляется нелинейным источником тока вида:  $i_c(U_{3и}, U_{си})$ . Полная модель полевого транзистора для не очень высоких частот может быть представлена в виде рис.1.48.

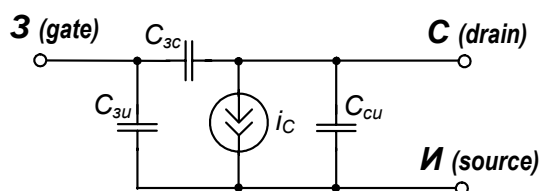


Рис. 1.48.

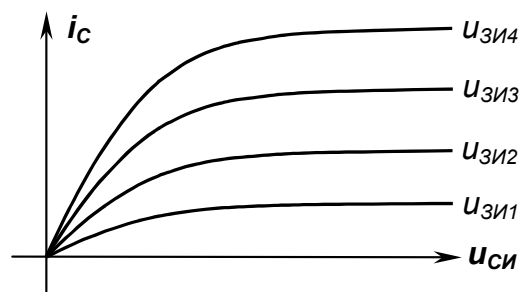


Рис. 1.49.

Здесь  $C_{3и}$ ,  $C_{3с}$ ,  $C_{си}$  – нелинейные, вообще говоря, емкости, образованные перекрытием затвора с областями стока и истока, а также емкостями выводов контактов стока и истока.

Нелинейную ВАХ источника тока можно аппроксимировать с достаточной точностью следующим выражением:

$$i = S \cdot (U_{3и} + U_0 + bU_{3и}^2) \cdot \left(1 - e^{\frac{-pU_{си}}{U_{3и} + U_0 + bU_{3и}^2}}\right).$$



Здесь  $S, b < 0, \rho > 0$  – параметры аппроксимации.

Для новой разновидности МДП-транзисторов – полевых приборов с вертикальной структурой характерен перегиб передаточных вольт-амперных характеристик. При этом аппроксимация ВАХ оказывается более точной в следующем виде,  $k > 0$ :

$$I_c = M \cdot \left( 1 - e^{\frac{-kSU_{cu}}{M}} \right); \quad M = I_S \cdot \left( 1 + th \left[ \frac{S(U_{zu} - U_S)}{I_S} \right] \right).$$

В схемотехнических САПР (PSPICE, MICROCAP) используется модель Шихмана-Ходжеса:

$$I_c = \begin{cases} 0 & \text{при } U_{zu} \leq U_{nop}; \\ \beta \cdot (1 + \lambda \cdot U_{cu}) \cdot (U_{zu} - U_{nop})^2 & \text{при } U_{nop} \leq U_{zu} \leq U_{cu} + U_{nop} \quad (\text{насыщ.}) \\ \beta \cdot (1 + \lambda \cdot U_{cu}) \cdot U_{cu} \cdot [2 \cdot (U_{zu} - U_{nop}) - U_{cu}] & \text{при } U_{cu} + U_{nop} \leq U_{zu} \quad (\text{лин.}) \end{cases}$$

**Динамическая модель для малого сигнала**

Для анализа на малом сигнале применяется схема замещения рис. 1.50. Обычно при работе в усилительном режиме точка покоя находится на пологом участке выходной ВАХ при нормальном включении транзистора (аналогично активной нормальной области БТ). В области низких частот модель описывается всего 2-мя параметрами — крутизной  $S$  и выходным сопротивлением  $r_{cu}$ :

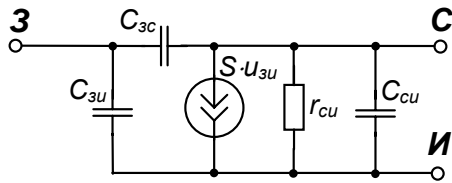


Рис. 1.50.

$$S = \left. \frac{\Delta I_c}{\Delta U_{zu}} \right|_{U_{cu} = const} = \frac{i_c}{u_{zu}};$$

$$r_{cu} = \left. \frac{\Delta U_{cu}}{\Delta I_c} \right|_{U_{zu} = const} = \frac{u_c}{i_c}.$$

Эти параметры легко определяются по выходной ВАХ транзистора.

**Макромодель операционного усилителя**

Для моделирования элементов аналоговых устройств используется макромодель операционного усилителя, которая в зависимости от количества учитываемых параметров, имеет различную степень сложности.

Наиболее простая модель учитывает  $K_0, R_{вых ОУ}, V_{т\text{ вых}}, t_{нар}$ , (для  $U_{т\text{ вых}}$ ); АЧХ усилителя (частоты излома  $\omega_1; \omega_2$ ), входные синфазное и дифференциальное сопротивления  $R_{вх\text{ сф}}, R_{вх\text{ диф}}$ , токи смещения  $I_{вх+}$  и  $I_{вх-}$ , эдс смещения нуля  $E_{см0}$ .

Рассмотрим модель ОУ, которая использует одну точку излома АЧХ. Ее условно можно разделить на 3 составные части (см. рис. 1.51):

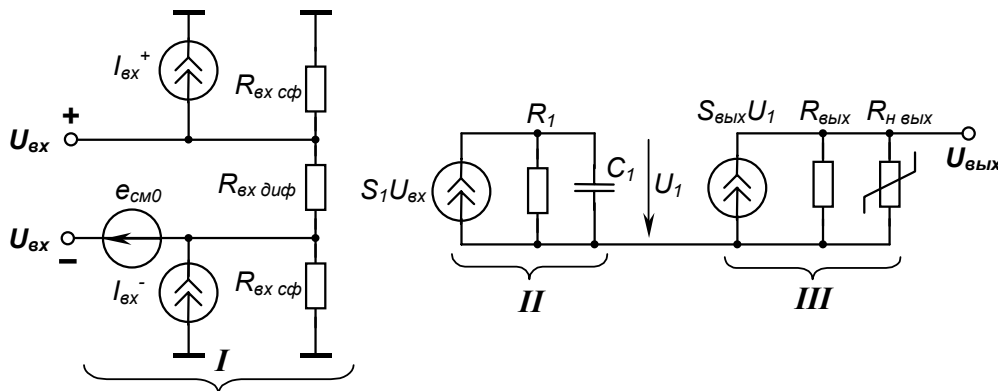


Рис. 1.51.

I — моделирует входные параметры;

II — моделирует частоту излома АЧХ  $\omega_1$  и ограничение скорости нарастания выходного напряжения на уровне

$$V_{вых\text{ т}} = \frac{U_{вых\text{ т}}}{t_{нар\text{ т}}} \quad (\text{с})$$

помощью управляемого источника тока с ВАХ типа симметричного ограничителя с линейным участком при малых входных напряжениях);

III — моделирует  $U_{вых}$  и ограничение  $U_{вых}$  на уровне  $U_{вых\text{ т}+}, U_{вых\text{ т}-}$ .

$R_{вых\text{ оу}}$  для линейного режима и коэффициент усиления на НЧ  $K_0$  — справочные параметры. Коэффициент передачи блока II на НЧ  $S_1 R_1$  принимают равным 1.

Для обеспечения общего коэффициента усиления по напряжению  $K_0$  должно выполняться соотношение:

$$S_{\text{вых}} \cdot R_{\text{вых}} = K_0; \quad S_{\text{вых}} = \frac{K_0}{R_{\text{вых}}}.$$

Максимальная скорость нарастания выходного напряжения в режиме большого сигнала  $V_{\text{вых}m}$  определяется временем перезаряда емкости  $C_1$  током источника  $S_1 U_{\text{вх}}$ . Т. к. выходное звено III имеет коэффициент передачи  $K_0$ , максимальная скорость заряда емкости  $C_1$  —  $V_{1m}$  определяется как:

$$V_{1m} = \frac{V_{\text{вых}m}}{K_0} = \frac{U_{\text{вых}m}}{K_0 \cdot t_{\text{нап}m}}.$$

Ограничение скорости перезаряда  $V_1$  на уровне  $V_{1m}$  (вне зависимости от скорости нарастания и величины входного напряжения  $U_{\text{вх}}$ ) имеет место тогда, когда источник тока  $S_1 \cdot U_{\text{вх}}$  — нелинейный, т.е. имеется участок насыщения, определяемый  $V_{1\text{max}}$ :

$$i_{C1} = C_1 \frac{dU_1}{dt} = C_1 \cdot V_1 \Rightarrow \left. \frac{dU_1}{dt} \right|_{\text{max}} = V_{1m}.$$

$$i_{C1m} = C_1 \cdot V_{1m} \Rightarrow I_{1m} = C_1 \cdot V_{1m}.$$

Поэтому передаточная характеристика зависимого источника  $S_1 U_{\text{вх}}$  имеет вид рис. 1.52. При этом точки перегиба передаточной характеристики  $U_{\text{вх}m}$  определяются как:

$$U_{\text{вх}m} = \frac{I_{1m}}{S_1} = \frac{C_1 \cdot V_{1m}}{S_1}$$

Для нахождения  $I_{1m}$  надо знать величину  $C_1$ . Необходимо учесть, что блок II формирует и частотную характеристику усилителя (рис. 1.53).

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}.$$

Задаемся произвольно величиной  $R_1$  (единицы кОм), определяем  $C_1$ :

$$C_1 = \frac{1}{\omega_1 R_1}.$$

Далее определяем значение  $S_1$  (учитывая допущение, что коэффициенты передачи всех блоков, кроме последнего равны 1):

$$S_1 = \frac{1}{R_1}.$$

Находим  $I_{1m}$  и  $U_{\text{вх}m}$ :

$$I_{1m} = C_1 \cdot V_{1m} = \frac{1}{\omega_1 R_1} \cdot \frac{V_{\text{вых}m}}{K_0}, \quad U_{\text{вх}m} = \frac{I_{1m}}{S_1} = I_{1m} \cdot R_1 = \frac{V_{\text{вых}m}}{\omega_1 \cdot K_0}.$$

Входные параметры (блок I) почти все справочные. Нельзя точно установить направление  $e_{\text{см}0}$ , т.к. она для ОУ гарантируется с точностью до знака. Входные токи в справочнике задаются так:  $I_{\text{вх}}$  и  $\Delta I_{\text{вх}}$ . Один из входных токов принимают равным справочному  $I_{\text{вх}}$ , второй —  $I_{\text{вх}} + \Delta I_{\text{вх}}$ .

Нелинейное сопротивление  $R_{\text{нвых}}$  обеспечивает ограничение выходного напряжения ОУ на уровне  $U_{\text{вых}m}^+$ ,  $U_{\text{вых}m}^-$ . В диапазоне рабочих значений  $U_{\text{вых}}$   $R_{\text{нвых}} = \infty$ , оно не влияет на работу модели. При выходе за диапазон ( $U_{\text{вых}} > U_{\text{вых}m}^+$  или  $U_{\text{вых}} < -U_{\text{вых}m}^-$ ) появляется малое дифференциальное сопротивление, шунтирующее избыточный ток источника  $S_{\text{вых}} \cdot U_1$  (см. рис. 1.54). Это сопротивление порядка 0,1...1 Ом обеспечивает быструю сходимость итерацион-

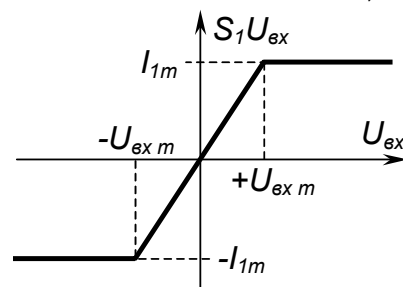


Рис. 1.52.

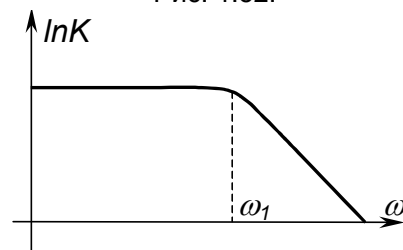


Рис. 1.53.

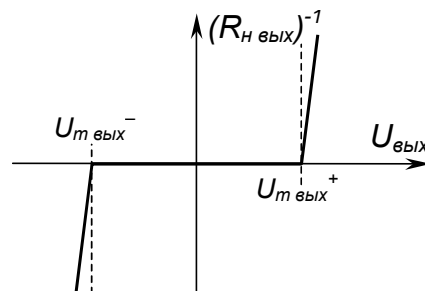


Рис. 1.54.

ных методов расчета.

Если ОУ имеет сложную АЧХ с несколькими изломами, то для моделирования частот излома ( $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и т.д.) в схеме появляются дополнительные блоки, аналогичные блоку II. В этих блоках выполняются следующие соотношения. Есть элементы  $S_2$ ,  $C_2$ ,  $R_2$ , принимается  $S_2 \cdot R_2 = 1$ ,  $R_2$  задается,  $C_2$  определяется:

$$C_2 = \frac{1}{\omega_2 R_2}.$$

Если есть еще блок, то в последнем блоке III источник тока не  $S_{\text{ввх}} \cdot U_1$ , а  $S_{\text{ввх}} \cdot U_2$ .

Предполагается, что  $\omega_2 \gg \omega_1$  и на скорость нарастания эта  $\omega_2$  не влияет.

## Часть 2

### Матрично-векторные параметры схем

Для расчета простых схем ранее были использованы уравнения в виде законов Кирхгофа, которые формулируются следующим образом:

*Первый закон Кирхгофа:* алгебраическая сумма токов в узле равна 0.

*Второй закон Кирхгофа:* алгебраическая сумма напряжений на сопротивлениях, входящих в любой замкнутый контур равна алгебраической сумме ЭДС. Или, что, то же самое, алгебраическая сумма падений напряжений на элементах вдоль любого замкнутого контура равна 0.

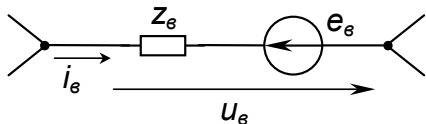


Рис. 2.1.

При рассмотрении реальных цепей электронной техники возникает необходимость работы с матричным описанием соотношений для элементов цепей. Рассмотрим ветвь, состоящую из резистора и источника ЭДС (рис. 2.1):

Уравнение закона Ома для ветви имеет вид:

$$u_e = z_e \cdot i_e + e_e$$

При записи уравнения необходимо правильно учитывать положительные направления тока и напряжения на элементах схемы.

Предположим, что схема содержит  $l$  ветвей, в которых имеются компоненты  $Z$  и  $E$ . Тогда систему уравнений, описывающих схему, можно записать в виде:

$$\begin{cases} u_{e1} = z_{e1} \cdot i_{e1} + e_{e1} \\ u_{e2} = z_{e2} \cdot i_{e2} + e_{e2} \\ \dots \\ u_{el} = z_{el} \cdot i_{el} + e_{el} \end{cases}$$

Переходя к более удобной матричной форме записи, получим:

$$U_e = Z_e \cdot I_e + E_e$$

где  $U_e$ ,  $I_e$ ,  $E_e$  матрицы вида:

$$U_e = \begin{pmatrix} u_{e1} \\ u_{e2} \\ \dots \\ u_{el} \end{pmatrix}; \quad I_e = \begin{pmatrix} i_{e1} \\ i_{e2} \\ \dots \\ i_{el} \end{pmatrix}; \quad E_e = \begin{pmatrix} e_{e1} \\ e_{e2} \\ \dots \\ e_{el} \end{pmatrix};$$

вектора напряжений ветвей, токов ветвей, эдс ветвей,

$$Z_e = \begin{pmatrix} z_{e1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_{e2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_{el} \end{pmatrix};$$

матрица сопротивлений ветвей.

Пусть некоторая ветвь электрической цепи имеет вид (рис. 2.2):

Ток ветви определяется соотношением:

$$i_{\epsilon} = y_{\epsilon} \cdot u_{\epsilon} + j_{\epsilon}$$

В матричном виде, по аналогии с предыдущим, его можно записать в следующем виде:

$$I_{\epsilon} = Y_{\epsilon} \cdot U_{\epsilon} + J_{\epsilon}$$

Здесь  $J_{\epsilon}$  – вектор источников тока ветви:

$$J_{\epsilon} = \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \dots \\ j_l \end{pmatrix};$$

матрица проводимости ветвей:

$$Y_{\epsilon} = \begin{pmatrix} y_{\epsilon 1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_{\epsilon 2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & y_{\epsilon l} \end{pmatrix};$$

Приведем последнюю форму записи уравнений к первой. Для этого умножим обе части уравнения на  $Y_{\epsilon}^{-1}$  слева. Получим:

$$\begin{aligned} Y_{\epsilon}^{-1} I_{\epsilon} &= Y_{\epsilon}^{-1} Y_{\epsilon} \cdot U_{\epsilon} + Y_{\epsilon}^{-1} J_{\epsilon} \\ U_{\epsilon} &= Y_{\epsilon}^{-1} \cdot I_{\epsilon} - Y_{\epsilon}^{-1} J_{\epsilon} \\ Y_{\epsilon}^{-1} &= Z_{\epsilon}; \quad -Y_{\epsilon}^{-1} \cdot J_{\epsilon} = E_{\epsilon} \\ U_{\epsilon} &= Z_{\epsilon} \cdot I_{\epsilon} + E_{\epsilon} \end{aligned}$$

Последнее соотношение говорит об идентичности записи уравнений по закону Ома для участков цепи, содержащих эдс, а знак минус в последнем выражении указывает на тот факт, что эдс в первой форме представления направлена против тока во второй форме.

Для определения режима в схеме из  $l$  ветвей необходимо записать  $2l$  уравнений. Приведенные записи по законам Ома дают лишь  $l$  уравнений, недостающие  $l$  уравнений необходимо найти из 1-го и 2-го законов Кирхгофа.

Рассмотрим некоторую произвольную схему, причем, т.к. нам безразлично пока, какие элементы входят в ее ветви, будем обозначать каждую ветвь линией, соединяющей соответствующие узлы – точки на схеме. Пусть изображенная таким образом скелетная схема имеет вид рис. 2.3.

В схеме имеется 5 узлов и 8 ветвей. Выберем положительные направления токов ветвей.

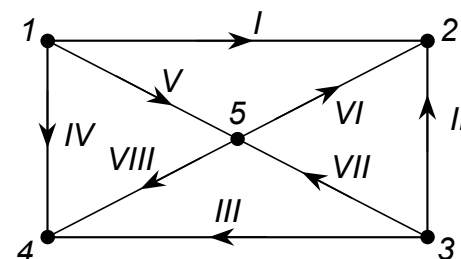


Рис. 2.3.

Построим совокупность ветвей, которые не образуют замкнутого контура и связана со всеми узлами схемы, например (см. рис. 2.4).

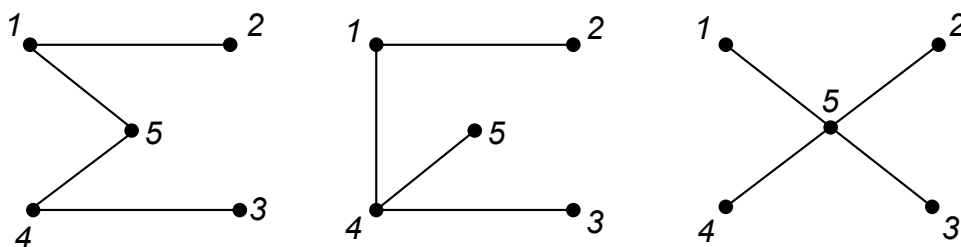


Рис. 2.4.

Таких совокупностей может быть несколько. Они называются деревом схемы. Ветви дерева называются ребрами; ветви, не входящие в дерево – хордами.

Они называются деревом схемы. Ветви дерева называются ребрами; ветви, не входящие в дерево – хордами.

Так как все узлы схемы связаны между собой совокупностью ребер схемы, то число независимых напряжений в схеме равно числу ребер выбранного дерева. В то же время нельзя записать ни одного уравнения по 2 закону Кирхгофа, в которые входили бы только напряжения ребер, т.к. любой замкнутый контур образуется хотя бы одной хордой. Таким образом, напряжения на хордах могут быть определены, исходя из второго закона Кирхгофа.

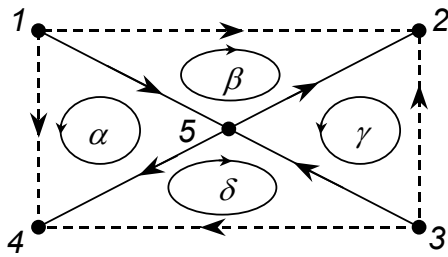


Рис. 2.5.

В схеме можно выделить несколько контуров для записи 2-го закона Кирхгофа. Выделим среди них только те, которые проходят только через одну хорду, а остальные – ребра. Такие контура получили названия *главных контуров*. Направления главных контуров определяются совпадающими с направлениями тока единственной хорды, которая входит в них. Возьмем за основу дерево выбранной скелетной схемы вида рис. 2.5.

Тогда главные контура, число которых равно числу хорд  $\sigma = 4$ , имеют вид, изображенный на рис. 2.5. Число уравнений, записанных по 2 закону Кирхгофа равно числу хорд, равно  $\sigma$ . Из них можно выразить напряжения хорд через напряжения ребер, которые являются независимыми.

С другой стороны, токи всех ребер дерева можно всегда выразить через токи хорд. Это следует из того, что всегда можно выбрать такое сечение схемы, в которые входит лишь одно ребро, т.к. они, по определению, не образуют замкнутых контуров. Такие сечения схемы называются *главными сечениями*, число их равно числу ребер и обозначается  $\nu$ . Для нашего случая имеем дерево и сечения вида рис. 2.6.

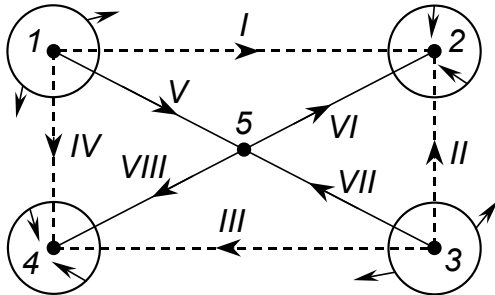


Рис. 2.6.

При этом направление главного сечения совпадает с направлением тока единственного ребра.

По первому закону Кирхгофа токи ребер выражаются через токи хорд, которые являются независимыми, а число уравнений по 1-му закону Кирхгофа равно числу ребер  $\nu$ .

Таким образом, общее число уравнений, составленных по 1-му и 2-ому законам Кирхгофа, равно:

$\nu + \sigma = l$ , т.е. числу ветвей схемы. Таким образом, в принципе, система  $l$  уравнений, записанная по закону Ома для схемы в матричном виде, дополнена  $l$  уравнениями по законам Кирхгофа, т.е. принципиально создается возможность ее решения, т.к. имеется система  $2l$  уравнений с  $2l$  неизвестными.

Возникает вопрос о практическом подходе к составлению системы уравнений по законам Кирхгофа.

Введем понятие матрицы главных контуров  $\Gamma$  и главных сечений  $II$ . Матрица главных контуров – прямоугольная матрица размером  $[\sigma, l]$  (первый индекс – номер строки, второй номер столбца), в которой для каждого контура отведена строка, а для каждой ветви – столбец. В пересечении  $k$ -той строки и  $s$ -того столбца записывается  $\Gamma_{ks} = +1$ , если  $k$ -ый контур проходит через  $s$ -тую ветвь и совпадает с ней по направлению; элемент  $\Gamma_{ks} = -1$ , если  $s$ -тая ветвь проходит через  $k$ -ый контур и противоположна с ним по направлению, и, наконец, элемент  $\Gamma_{ks} = 0$ , если в контур  $k$   $s$ -тая ветвь не входит.

Рассмотрим матрицу главных контуров для нашего примера:

$$\Gamma = \begin{matrix} & \begin{matrix} I & II & III & IV & V & VI & VII & VIII \end{matrix} \\ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & +1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Ранее нами был введен вектор напряжений на ветвях  $U_\epsilon$  размера  $[l, 1]$ . Если теперь перемножить матрицу  $\Gamma$  на вектор  $U_\epsilon$ , то получим систему уравнений по второму закону Кирхгофа в виде:

$$\Gamma \cdot U_\epsilon = 0$$

Скалярная запись последнего уравнения даст  $\sigma$  скалярных уравнений по второму закону Кирхгофа.

Рассмотрим способ составления уравнений по 1-му закону Кирхгофа. Определим матрицу главных сечений  $\Pi$  размера  $[l, l]$ , в которой каждому главному сечению отведена строка, а каждой ветви – столбец. Правило составления матрицы  $\Pi$  аналогично: элемент  $\pi_{ks}=1$ , если  $k$ -тое сечений включает в себя  $s$ -тую ветвь и направления их совпадают, элемент  $\pi_{ks} = -1$ ; если направления сечения и ветви противоположны, и, наконец, элемент  $\pi_{ks} = 0$ , если сечение  $k$  не включает в себя  $s$ -тую ветвь.

Перемножив матрицу  $\Pi$  на вектор токов ветвей  $I_\sigma$ , получим матричное уравнение по 1-му закону Кирхгофа. В скалярной форме записи, указанное уравнение представляет собой систему  $\nu$  алгебраических уравнений по 1-му закону Кирхгофа.

$$\Pi \cdot I_\sigma = 0$$

Таким образом, последние полученные нами уравнения в совокупности с уравнениями закона Ома дают систему  $2l$  уравнений, описывающих рассматриваемую схему.

Решение полученных  $2l$  скалярных уравнений, или матричных уравнений вида:

$$\begin{cases} U_\sigma = Z_\sigma \cdot I_\sigma + E_\sigma \\ \Gamma \cdot U_\sigma = 0 \\ \Pi \cdot I_\sigma = 0 \end{cases}$$

достаточно трудоемко. Рассмотрим возможность приведения его к более удобной форме и сокращению числа переменных в уравнениях.

### Метод контурных токов

Введем понятие вектора-столбца контурных токов  $I$ . Размер вектора  $[\sigma, 1]$ , он имеет вид:

$$I = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_\sigma \end{bmatrix};$$

Элементы матрицы  $\Gamma$  показывают, как  $k$ -ый контур входит в  $s$ -тую ветвь схемы. Очевидно, матрицу  $\Gamma$  можно использовать для связи величин контурных токов с токами ветвей. Для этого необходимо выполнить умножение матрицы  $\Gamma$  на вектор  $I$ . Для этого, очевидно, необходимо транспонировать матрицу  $\Gamma$ , заменив индексы у элементов местами:  $[\Gamma_{ij}]_t = [\Gamma_{ji}]$ . Теперь матрица  $\Gamma_t$  имеет размер  $[l, \sigma]$ , тогда можно осуществлять умножение:

$$I_\sigma = \Gamma_t \cdot I$$

Последнее уравнение отображает зависимость  $l$  токов ветвей от  $\sigma$  контурных токов. Выберем последние в качестве независимых переменных, т.е. будем искать контурные токи, протекающие, по определению, через хорды схемы.

Рассмотрим уравнение по закону Ома в виде:

$$U_\sigma = Z_\sigma \cdot I_\sigma + E_\sigma$$

Подставим в это уравнение значение  $I_\sigma$ , равное  $\Gamma_t \cdot I$ . Получим:

$$U_\sigma = Z_\sigma \cdot \Gamma_t \cdot I + E_\sigma$$

Умножим последнее равенство на матрицу контуров  $\Gamma$  слева. Получим:

$$\Gamma \cdot U_\sigma = \Gamma \cdot Z_\sigma \cdot \Gamma_t \cdot I + \Gamma \cdot E_\sigma$$

По второму закону Кирхгофа  $\Gamma \cdot U_\sigma = 0$ , тогда введем соответствующие упрощения:

$$\Gamma \cdot Z_\sigma \cdot \Gamma_t = Z \quad \Gamma \cdot E_\sigma = -E \Rightarrow Z \cdot I = E$$

Рассмотрим размерность полученных выражений:

$$\begin{aligned} [\Gamma_t] &= [l, \sigma], \quad Z_\sigma = [l, l] \\ [Z_\sigma \cdot \Gamma_t] &= [l, \sigma] \quad \Gamma = [\sigma, l] \Rightarrow Z = [\sigma, \sigma] \end{aligned}$$

Таким образом, матрица  $Z$  – квадратная матрица размера  $[\sigma, \sigma]$ , которая получила название матрицы сопротивлений схемы:

$$Z = \begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1\sigma} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2\sigma} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{\sigma 1} & z_{\sigma 2} & \dots & z_{\sigma\sigma} \end{vmatrix}$$

Вектор  $E$  имеет размерность:

$$\Gamma = [\sigma, 1] \quad E_{\sigma} = [1, 1] \Rightarrow E = [\sigma, 1]$$

Вектор  $E$  – вектор э.д.с. схемы.

Нахождение  $Z$  и  $E$  не представляет проблем, т.к. все компоненты этих матриц известны. Таким образом, мы приходим к матричному уравнению вида

$$Z \cdot I = E,$$

соответствующему  $\sigma$  скалярных уравнений, решение которых можно осуществить, обратив матрицу  $Z$ :

$$I = Z^{-1} \cdot E$$

Таким образом, число скалярных уравнений или порядок векторного уравнения снижен с  $2l$  до  $\sigma$ . Принципиальных трудностей при решении уравнения нет.

На практике, особенно при решении уравнений для реальных электрических схем, получил большее распространение *метод узловых потенциалов в матричном виде*, который в ряде случаев более удобен.

### Метод узловых потенциалов

Введем понятие вектора-столбца потенциалов схемы  $U$ . Будем отсчитывать потенциалы всех узлов схемы от некоторого базисного узла, который не охвачен ни одним сечением. Тогда вектор-столбец узловых потенциалов

$$U = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_v \end{vmatrix};$$

имеет размерность  $[v, 1]$ , равную числу узлов схемы без одного, т.е. числу ребер дерева.

Вспомним структуру матрицы главных сечений  $\Pi [v, l]$ . Элементы матрицы  $\Pi$  определяют сечения, на которых оканчиваются ветви схемы. При этом число элементов матрицы, отличных от 0 в каждом столбце, всегда равно 2, т.к. это означает, что ветвь соединяет два узла схемы. Исключения составляют ветви, выходящие из базисного узла, или в него входящие, т.к. для них число отличных от 0 элементов в столбце равно 1.

Таким образом, напряжение на ветви можно характеризовать разностью потенциалов между узлами, причем если ветвь соединяет узлы  $i$  и  $j$ , то напряжение равно  $U_{ij} = U_i - U_j$ ; если ветвь выходит из базисного узла схемы, то напряжение на ней равно потенциалу другого узла. Поэтому вектор напряжений на ветвях размерностью  $[l, 1]$  можно определить в виде матричного произведения матриц  $\Pi$  и  $U$ , однако при этом матрица  $\Pi$  должна быть предварительно транспонирована т.е.:

$$[\pi_{ij}]_t = [\pi_{ji}].$$

При этом размер матрицы  $\Pi_t = [l, v]$ , а выражение для напряжений на ветвях схемы имеет вид:

$$U_{\sigma} = \Pi_t \cdot U.$$

Вспомним выражение для закона Ома для представления ветвей в виде параллельно объединенного источника тока и проводимости:

$$I_{\sigma} = Y_{\sigma} \cdot U_{\sigma} + J_{\sigma}.$$

Подставляя в указанное выражение значение  $U_{\sigma}$ , выраженное через  $\Pi_t U$ , получим:

$$I_{\sigma} = Y_{\sigma} \cdot \Pi_t \cdot U + J_{\sigma}.$$

Умножим это уравнение на матрицу  $\Pi$  слева:

$$\Pi \cdot I_{\epsilon} = \Pi \cdot Y_{\epsilon} \cdot \Pi_t \cdot U + \Pi \cdot J_{\epsilon}.$$

По первому закону Кирхгофа в матричном виде:

$$\Pi \cdot I_{\epsilon} = 0.$$

Проведем переобозначения:

$$\Pi \cdot Y_{\epsilon} \cdot \Pi_t = Y \quad J = -\Pi \cdot J_{\epsilon}.$$

Здесь  $Y$  — квадратная матрица размером  $[v, v]$ , которая получила название матрицы проводимости схемы, вектор  $J$  — вектор размера  $[v, 1]$ , называющийся вектором задающих токов схемы.

Умножим полученное уравнение на  $Y^{-1}$  слева, получим:

$$Y \cdot U = J \quad \text{или} \quad U = Y^{-1} \cdot J.$$

Последнее соотношение реализует *метод узловых потенциалов в матричном виде*.

Последние соотношения позволяют провести расчет схемы по методу узловых потенциалов, однако, для получения результата необходимо определить значения матриц  $Y$  и  $J$ . В принципе, задача решается путем двукратного перемножения матриц  $\Pi$ ,  $Y_{\epsilon}$  и  $\Pi_t$ , а вектор задающих токов схемы  $J$  определяется путем умножения матрицы  $\Pi$  на вектор  $J_{\epsilon}$ . Однако такое решение задачи весьма громоздко, т.к. требует выполнения операций с матрицами. Существует формализованный способ построения матриц  $Y$  и  $J$ , который вытекает из свойств матрицы. Покажем этот способ, а затем докажем его.

1. Можно утверждать, что если схема состоит только из двухполюсников, то матрица  $Y$  диагонально симметрична, т.е. для любых  $k$  и  $s$ , принадлежащих интервалу  $k, s \in [1, v]$  справедливо соотношение:  $y_{ks} = y_{sk}$  (напомним, что размер матрицы  $Y = [v, v]$ , что определяется числом уравнений относительно узловых потенциалов, равного числу сечений схемы на единицу меньше, чем число узлов).

2. Элемент диагонали  $y_{kk}$  равен сумме проводимости ветвей, пересекаемых  $k$ -тым сечением. При этом  $y_{kk}$  называется собственной проводимостью  $k$ -го сечения.

3.  $y_{ks}$  — сумма проводимости ветвей, общих для  $k$ -го и  $s$ -го сечений;  $y_{ks}$  называется взаимной проводимостью  $k$ -ого и  $s$ -ого сечений.

При этом порядок составления матрицы состоит в следующем:

заготавливается квадратная таблица размером  $v \times v$ , т.е. числом строк и столбцов, равным количеству главных сечений. Поочередно рассматриваются все ветви, входящие в схему, и их проводимости вписываются с соответствующим знаком в соответствующие клетки в виде слагаемых. Проводимости ветвей алгебраически суммируются с теми элементами квадратной матрицы, которые расположены на пересечении строк и столбцов, имеющих номер пересекающих данную ветвь главных сечений. При этом знак составляющих взаимной проводимости определяется взаимным расположением главных сечений.

Рассмотрим пример. Допустим, в схеме имеются  $A, B, C, D$  сечения. Очередная ветвь проходит через сечения  $A, C, D$ , направления которых изображены на рисунке 2.7:

(Можно предположить, что рассматриваемая ветвь является хордой, т.к. через ребро, по определению, проходит лишь одно сечение).

При этом составляющие матрицы  $Y$ , соответствующие указанной ветви, имеют вид:

$A$	$B$	$C$	$D$	
$+y_{\epsilon}$	$0$	$-y_{\epsilon}$	$+y_{\epsilon}$	$A$
$0$	$0$	$0$	$0$	$B$
$-y_{\epsilon}$	$0$	$+y_{\epsilon}$	$-y_{\epsilon}$	$C$
$+y_{\epsilon}$	$0$	$-y_{\epsilon}$	$+y_{\epsilon}$	$D$

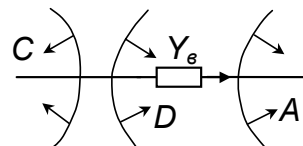


Рис. 2.7.

Очевидно, что если ветвь пересекает  $m$  сечений, то она вписывается в  $m^2$  клеток таблицы. Проводимость ребер дерева вписывается в клетки матрицы только один раз.

Вектор задающих токов схемы  $J$  — вектор-столбец,  $k$ -тая компонента которого равна алгебраической сумме токов, подтекающих к  $k$ -тому сечению. Причем знак «+» выбирается в случае, если ток ветви противоположен направлению сечения, а знак «-», если направления сечения и тока совпадают.

Рассмотрим пример, основанный на приведенной выше скелетной схеме некоторой цепи рис. 2.8:

В соответствии с выбранным направлением токов и главных сечений, матрица  $Y$  имеет вид:



$$Y = \begin{array}{c|cc|cc} & A & B & C & D \\ \hline A & y_1 + y_4 + y_5 & y_1 & 0 & y_4 \\ \hline B & y_1 & y_1 + y_2 + y_6 & y_2 & 0 \\ \hline C & 0 & y_2 & y_2 + y_3 + y_7 & y_3 \\ \hline D & y_4 & 0 & y_3 & y_3 + y_4 + y_8 \\ \hline & A & B & C & D \end{array}$$

Вектор задающих токов схемы:

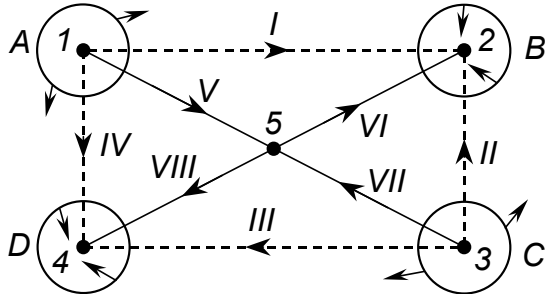


Рис. 2.8.

$$J = - \begin{bmatrix} j_1 + j_4 + j_5 \\ j_1 + j_2 + j_6 \\ j_2 + j_3 + j_7 \\ j_3 + j_4 + j_8 \end{bmatrix}$$

Докажем указанное правило составления матрицы проводимости и вектора задающих токов схемы.

По определению, матрица  $Y$  формируется в соответствии с соотношением:

$$Y = \Pi \cdot Y_{\epsilon} \cdot \Pi_t$$

Транспонируем обе части матрицы, используя предварительно сочетательный закон:

$$Y_t = (\Pi \cdot Y_{\epsilon} \cdot \Pi_t)_t = ((\Pi \cdot Y_{\epsilon}) \cdot \Pi_t)_t = \Pi \cdot (\Pi \cdot Y_{\epsilon})_t = \Pi \cdot (Y_{\epsilon})_t \cdot \Pi_t$$

Так как матрица  $Y_{\epsilon}$  диагонально симметрична и диагональна, следовательно  $Y_{\epsilon t} = Y_{\epsilon}$ . При этом, очевидно, что результат перемножения матриц после их транспонирования не изменится, т.е.  $Y_t = Y$ . Это означает, что матрица  $Y$  диагонально симметрична. Т.е. первое свойство матрицы доказано.

Будем теперь обозначать элементы матрицы буквами  $\pi_{ks}$ .

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1k} & \dots & \pi_{1l} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2k} & \dots & \pi_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{k1} & \pi_{k2} & \dots & \pi_{kk} & \dots & \pi_{kl} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_{v1} & \pi_{v2} & \dots & \pi_{vk} & \dots & \pi_{vl} \end{bmatrix}$$

Диагональный элемент  $y_{kk}$  матрицы  $Y$  получается умножением  $k$ -ой строки матрицы  $\Pi$  на  $k$ -ый столбец матрицы  $Y_{\epsilon} \Pi_t$ .

В свою очередь,  $k$ -ый столбец матрицы  $Y_{\epsilon} \Pi_t$  получается умножением матрицы  $Y_{\epsilon}$  на  $k$ -ый столбец матрицы  $\Pi_t$ . В результате элемент  $y_{kk}$  матрицы  $Y$  можно определить в виде:

$$y_{kk} = [k \text{ стр. } \Pi] \cdot [k \text{ столб. matr. } Y_{\epsilon} \cdot \Pi_t] = [k \text{ стр. } \Pi] \cdot [Y_{\epsilon} \cdot [k \text{ столб. } \Pi_t]] = [k \text{ стр. } \Pi] \cdot Y_{\epsilon} \cdot [k \text{ стр. } \Pi]_t = [\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}] \cdot Y_{\epsilon} \cdot [\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}]_t$$

(строка матрицы  $\Pi$  равна столбцу транспонированной матрицы  $\Pi_t$ ). Таким образом, можно записать, что:

$$y_{kk} = [\pi_{k1} y_{\epsilon 1} \quad \pi_{k2} y_{\epsilon 2} \quad \dots \quad \pi_{kl} y_{\epsilon l}] \times [\pi_{k1} \quad \pi_{k2} \quad \dots \quad \pi_{kl}]_t = [\pi_{k1}^2 \cdot y_{\epsilon 1} + \pi_{k2}^2 \cdot y_{\epsilon 2} + \dots + \pi_{kl}^2 \cdot y_{\epsilon l}] = \sum_{i=1}^l \pi_{ki}^2 \cdot y_{\epsilon i}$$

Таким образом, проводимость  $k$ -то сечения определяется суммой проводимостей ветвей, входящих в это сечение со знаком (+), т.к. для всех ветвей входящих в сечение  $\pi_{ki} = \pm 1$ , т.е.  $\pi_{ki}^2 = 1$ . Для ветвей, которые в сечения не входят  $\pi_{ki} = 0$ .

Таким образом, второе свойство матрицы  $Y$  доказано.

Для недиагональных элементов матрицы  $Y$  — проводимостей между сечениями  $k$  и  $s$  (где  $k \neq s$ ), по аналогии можно записать, что

$$y_{ks} = [\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}] \cdot Y_e \cdot [\pi_{s1}, \pi_{s2}, \dots, \pi_{sl}]^t$$

Т.к. матрица  $Y_e$  диагональная, то последнее соотношение можно раскрыть в скалярном виде:

$$y_{ks} = [\pi_{k1} \cdot \pi_{s1} \cdot y_{e1} + \pi_{k2} \cdot \pi_{s2} \cdot y_{e2} + \dots + \pi_{kl} \cdot \pi_{sl} \cdot y_{el}] = \sum_{i=1}^l \pi_{ki} \cdot \pi_{si} \cdot y_{ei}$$

Таким образом, стало очевидным и третье свойство матрицы  $Y$ :

Произведение  $\pi_{ki} \cdot \pi_{si}$  отлично от нуля лишь для тех ветвей, которые проходят одновременно через два сечения  $k$  и  $s$ , причем равно  $+1$ , если сечения направлены друг относительно друга одинаково, и равно  $-1$ , если сечения направлены встречно.

Полученные соотношения также доказывают правильность высказанного утверждения для составления матрицы  $Y$  при каноническом виде схемы с общим базисным узлом. Т.е., если сечения выбраны одинаковым образом относительно узлов схемы (например, все — наружу), то при определении взаимных проводимостей сечений знак проводимостей ветвей всегда отрицателен.

Рассмотрим вопрос о векторе  $J$ . По определению,  $J = -I \cdot J_e$ . Для  $k$ -той компоненты вектора:

$$j_k = -[\pi_{k1}, \pi_{k2}, \dots, \pi_{kl}] \cdot J_e = -[\pi_{k1} \cdot j_{e1} + \pi_{k2} \cdot j_{e2} + \dots + \pi_{kl} \cdot j_{el}] = -\sum_{i=1}^l \pi_{ki} \cdot j_{ei}$$

Поэтому  $k$ -тая компонента вектора  $J$  равна сумме задающих токов ветвей, причем компонента берется со знаком «-», если ток совпадает по направлению с сечением схемы, и «+», если ток противоположен сечению схемы.

Сложность матрицы  $Y$  и процесса ее составления существенно определяется выбором главных сечений схемы. Спецификой радиоэлектронных схем является то, что один из узлов схемы обычно принимают за базисный (нулевой), которому присваивается нулевой потенциал. В реальных схемах практически все узлы оказываются связанными теми или иными проводимостями с нулевым. При этом процедура составления матрицы  $Y$  существенно упрощается. Главные сечения можно выбрать охватывающими все узлы, кроме базисного, причем каждое главное сечение охватывает только 1 узел. Дерево схемы выбирается состоящим из ветвей, идущих от базисного ко всем узлам схемы. При этом каждое сечение характеризуется своим потенциалом, равным напряжению на соответствующем ребре, т.е. ветви, соединяющей названный узел с базисным. Направления главных сечений выбираются таким образом, чтобы они были направлены наружу.

В соответствии с указанным выше правилом, собственные проводимости сечений будут всегда вычисляться как арифметическая сумма проводимостей ветвей, исходящих из соответствующего узла, взятых со знаком плюс, а взаимные проводимости сечений учитываются со знаком минус, т.к. сечения всегда противоположно направлены. Для вектора задающих токов схемы правило не изменяется. Со знаком «-» учитываются токи, вытекающие из сечений, со знаком «+» — втекающие. Рассмотрим пример, пусть задана схема, изображенная на рисунке 2.9:

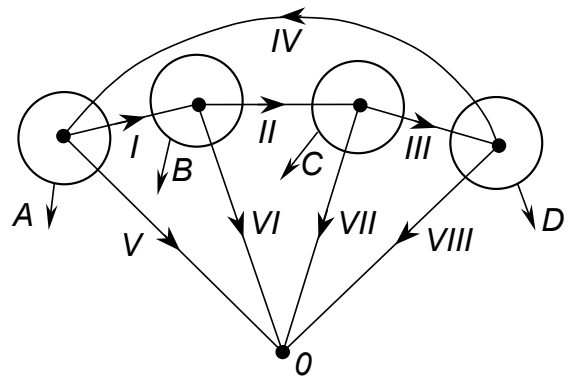


Рис. 2.9.

При указанном выборе дерева схемы матрица проводимости схемы имеет вид:

$$Y = \begin{vmatrix} y_1 + y_4 + y_5 & -y_1 & 0 & -y_4 \\ -y_1 & y_1 + y_2 + y_6 & -y_2 & 0 \\ 0 & -y_2 & y_2 + y_3 + y_7 & -y_3 \\ -y_4 & 0 & -y_3 & y_3 + y_4 + y_8 \end{vmatrix}$$

Вектор задающих токов схемы:

$$J = \begin{vmatrix} -j_1 + j_4 - j_5 \\ j_1 - j_2 - j_6 \\ j_2 - j_3 - j_7 \\ j_3 - j_4 - j_8 \end{vmatrix}$$

Нами рассмотрены соотношения и правила составления матрицы  $Y$  для схем, состоящих только из двухполюсных элементов. Однако реальные элементы электронных цепей многополюсные: например, активные элементы: транзистор, полевой транзистор, операционный усилитель, тиристор, магнитосвязанные элементы с потенциальным объединением обмоток и т.д. Параметры этих элементов также могут быть представлены в матричном описании, что необходимо для расчета схем матричными методами.

Рассмотрим трехполюсник, выходы которого (узлы) обозначены  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  (рис. 2.10). Выберем направления токов внутрь трехполюсника, а узловые потенциалы отсчитываются от некоторого внешнего узла, так что все узлы трехполюсника равнозначны, и ни один из них не является базисным. Тогда система уравнений трехполюсника в матричном виде имеет вид:

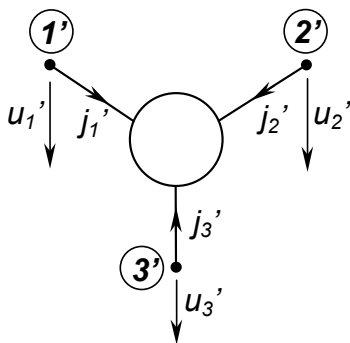


Рис. 2.10.

$$\begin{vmatrix} j_1' \\ j_2' \\ j_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' & y_{13}' \\ y_{21}' & y_{22}' & y_{23}' \\ y_{31}' & y_{32}' & y_{33}' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{vmatrix}$$

Можно записать ее более компактно в виде:

$$J' = Y' \cdot U'$$

Квадратная матрица  $Y'$  может быть рассмотрена как обобщенный параметр трехполюсного элемента. Все элементы матрицы имеют размерность проводимости, она называется матрицей проводимости трехполюсника.

Необходимо отметить, что матрица проводимости в указанном виде особенная. Линейно независимыми являются лишь 4 элемента матрицы из 9. Несложно показать [3], что в соответствии с законами Кирхгофа

$$\sum_{s=1}^3 y_{sk}' = 0 \quad (k = 1, 2, 3); \quad \sum_{k=1}^3 y_{sk}' = 0 \quad (s = 1, 2, 3)$$

Необходимо также отметить, что матрица  $Y$  проводимости трехполюсника как правило, несимметрична относительно главной диагонали, так как большинство реальных трехполюсных элементов необратимы. При смене номеров узлов в матрице соответствующим образом меняются строки и столбцы матрицы.

Если один из узлов матрицы подключен к базисному, то можно сформировать неособенную матрицу проводимости трехполюсника  $Y'$  путем вычеркивания соответствующего столбца и строки особенной матрицы. Например, если трехполюсник подключен в соответствии со схемой рис. 2.11, то соответствующие уравнения имеют вид:

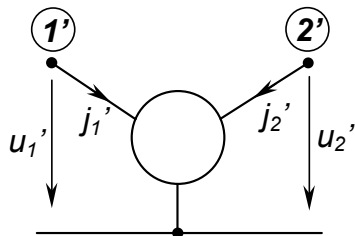


Рис. 2.11.

а матрица  $Y'$ :

$$\begin{cases} J_1' = y_{11}' \cdot u_1' + y_{12}' \cdot u_2' \\ J_2' = y_{21}' \cdot u_1' + y_{22}' \cdot u_2' \end{cases} \quad J' = Y' \cdot U' ,$$

$$Y' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' \\ y_{21}' & y_{22}' \end{vmatrix}$$

В случае, если по каким-то причинам известна лишь неособенная матрица проводимости трехполюсника, то особенную можно сформировать на основании приведенных выше уравнений, вытекающих из законов Кирхгофа:

$$\begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' & -y_{11}' - y_{12}' \\ y_{21}' & y_{22}' & -y_{21}' - y_{22}' \\ -y_{11}' - y_{21}' & -y_{12}' - y_{22}' & y_{11}' + y_{21}' + y_{12}' + y_{22}' \end{vmatrix}$$

Возникает вопрос о формировании матрицы проводимости схемы при наличии в ней трехполюсных элементов. Рассмотрим следующий подход к формированию. Вначале исключим трехполюсные элементы из схемы и запишем матрицу проводимости оставшейся части схемы, состоящей теперь только из двухполюсников. Для этого в схеме выберем базисный узел; составим дерево схемы и получим, таким образом, диагонально симметричную матрицу проводимости.

Включение трехполюсников изменит фактически токи узлов (сечений) к которым подключены элементы-трехполюсники. Пусть некоторые узлы схемы  $p$ ,  $q$  и  $r$  соединены с узлами 1', 2' и 3' трехполюсника, соответственно. Если бы схема трехполюсников не содержала, то матричное уравнение, записанное в соответствии с методом узловых потенциалов:

$$J = Y \cdot U,$$

означало бы компактную запись уравнений вида:

$$\begin{cases} j_1 = \sum_{s=1}^v y_{1s} \cdot u_s \\ \dots \\ j_v = \sum_{s=1}^v y_{vs} \cdot u_s \end{cases}$$

Теперь, когда токи узлов  $p$ ,  $q$  и  $r$  изменились, для них можно записать уравнения в виде:

$$j_p - j_1' = \sum_{s=1}^v y_{ps} \cdot u_s$$

$$j_q - j_2' = \sum_{s=1}^v y_{qs} \cdot u_s$$

$$j_r - j_3' = \sum_{s=1}^v y_{rs} \cdot u_s$$

Здесь токи узлов  $j_1'$ ,  $j_2'$ ,  $j_3'$  определяются равенствами, описывающими трехполюсник в матричном виде:

$$\begin{cases} j_1' = \sum_{k=1}^3 y_{1k}' \cdot u_k' \\ j_2' = \sum_{k=1}^3 y_{2k}' \cdot u_k' \\ j_3' = \sum_{k=1}^3 y_{3k}' \cdot u_k' \end{cases}$$

Если заменить потенциалы  $u_1'$ ,  $u_2'$ , и  $u_3'$  на эквивалентные  $u_p$ ,  $u_q$ , и  $u_r$ , получим:

$$j_p = \sum_{s=1}^v y_{ps} \cdot u_s + y_{11}' u_p + y_{12}' u_q + y_{13}' u_r$$

$$j_q = \sum_{s=1}^v y_{qs} \cdot u_s + y_{21}' u_p + y_{22}' u_q + y_{23}' u_r$$

$$j_r = \sum_{s=1}^v y_{rs} \cdot u_s + y_{31}' u_p + y_{32}' u_q + y_{33}' u_r$$

Таким образом, вектор задающих токов  $J$  для схемы, содержащей трехполюсники, записывается

аналогичным образом соответствующему вектору для схемы, трехполюсников не содержащих. Матрица проводимости схемы меняется: к элементам матрицы, записанной без учета трехполюсников на пересечении строк и столбцов с номерами узлов, соответствующих точкам подключения трехполюсника прибавляются соответствующие элементы матрицы проводимости трехполюсника. Если заменить номера узлов трехполюсника 1', 2' и 3' на номера  $p$ ,  $q$  и  $r$ , то остается лишь дописать соответствующие элементы  $Y'$  в матрицу проводимости  $Y$  в виде слагаемых:

$$Y' = \begin{vmatrix} y_{11}' & y_{12}' & y_{13}' \\ y_{21}' & y_{22}' & y_{23}' \\ y_{31}' & y_{32}' & y_{33}' \end{vmatrix} \begin{matrix} p \\ q \\ r \end{matrix}$$

Если один из узлов схемы соединен с базисным, то этот узел не учитывается при составлении матрицы проводимости схемы  $Y$ , а соответствующие элементы матрицы  $Y'$  не включаются в таблицу в виде слагаемых.

Активные элементы электронной техники: транзисторы, операционные усилители, в эквивалентной схеме могут быть представлены как зависимые источники тока или напряжения, отображающие их усилительные свойства. Возникает вопрос о матричном описании схем с такими элементами.

Во-первых, будем рассматривать лишь зависимые источники тока, управляемые напряжением, т.к. этот вид зависимых источников наиболее просто включается в матричное описание (другие типы зависимых источников; в принципе, могут быть преобразованы в указанный, либо использованы при другом подходе к описанию схем — в виде гибридных матриц).

Во-вторых, используем описанный выше подход, когда вначале при составлении матрицы  $Y$  все зависимые источники из схемы исключены. При этом из оставшихся двухполюсных элементов образуется диагонально симметричная матрица  $Y_0$ , для которой справедливо соотношение:

$$J_0 = Y_0 \cdot U.$$

Здесь  $J_0$  — вектор задающих токов схемы,  $U$  — вектор узловых потенциалов.

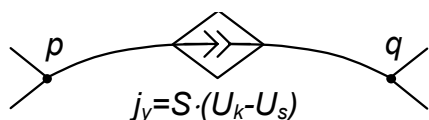


Рис. 2.12.

Если предположить, что имеется некоторый зависимый источник тока, подключенный к узлам  $p$  и  $q$  схемы, а его величина определяется соотношением (рис. 2.12):

$$j_y = S \cdot (U_k - U_s)$$

где  $U_k$ ,  $U_s$  — потенциалы узлов  $k$  и  $s$  схемы, а  $S$  — крутизна управления ( $A/B$ ), то несложно сообразить, что уравнения, описывающие ток в сечениях, будут иметь вид (при условленных положительных направлениях см с. 49):

$$\begin{cases} j_p - (S \cdot U_k - S \cdot U_s) = \sum_{i=1}^v y_{pi} \cdot u_i \\ j_q + (S \cdot U_k - S \cdot U_s) = \sum_{i=1}^v y_{qi} \cdot u_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} j_p = \sum_{i=1}^v y_{pi} \cdot u_i + S \cdot U_k - S \cdot U_s \\ j_q = \sum_{i=1}^v y_{qi} \cdot u_i - S \cdot U_k + S \cdot U_s \end{cases}$$

Каждый из зависимых источников тока, управляемых напряжением, характеризуется записью коэффициента  $S$  в четырех клетках матрицы:

$$\begin{array}{cccccc} & \dots & k & \dots & s & \dots \\ \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ +S \\ \dots \\ -S \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ -S \\ \dots \\ +S \\ \dots \end{array} & \begin{array}{c} \dots \\ p \\ \dots \\ q \\ \dots \end{array} \end{array}$$

Если один из узлов, к которым подключен источник тока, соединен с базисным (например  $q$ ), то в матрицу добавляются лишь два элемента  $+S$  и  $-S$ , расположенных на одной строке матрицы. Если соединен с базисным один из управляющих узлов источника, то остаются два элемента  $+S$  и  $-S$ , расположенных в одном столбце матрицы. Если источник соединен с базисным узлом и управляется напря-

жением, отсчитываемым от базисного узла, то в матрицу  $Y$  дописывается лишь один коэффициент  $+S$  или  $-S$ .

В целом, в соответствии со сформулированным выше правилом для составления матрицы проводимости  $Y$  и вектора-столбца задающих токов  $J$ , если направление зависимого источника тока совпадает с направлением главного сечения (а именно наружу), а потенциал узла входит в управляющую характеристику со знаком «+» (узлы  $p$  и  $k$  в приведенном примере), то управляющий параметр (крутизна управления) записывается в соответствующую клетку матрицы со знаком «+». Если оба этих условия не выполняются, то крутизна управления также записывается со знаком «+». Если выполняется лишь одно из условий, то крутизна управления записывается со знаком «-».

**ПРИМЕР**

Построить матрицу проводимости схемы  $Y$  усилительного каскада на полевом транзисторе с общим стоком (рис.2.13.).

Рассмотрим эквивалентную схему каскада по переменному току (рис. 2.14).

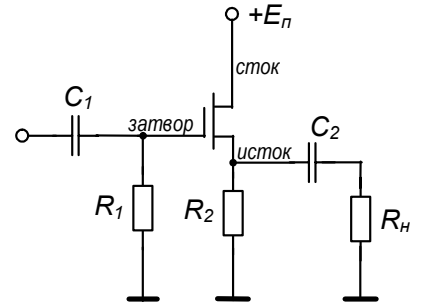


Рис. 2.13.

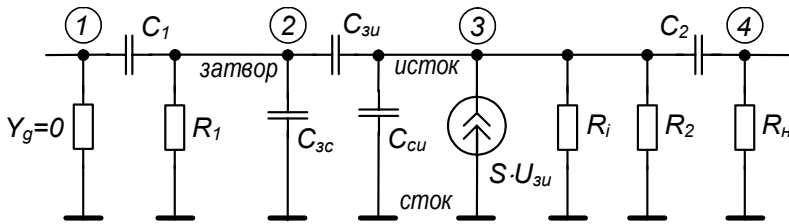


Рис. 2.14.

Для упрощения записи элементов матрицы преобразуем схему, заменив, по возможности, последовательно и параллельно включенные элементы общими комплексными проводимостями рис. 2.15.

$$Y_g = 0; \quad Y_1 = j\omega C_1; \quad Y_2 = \frac{1}{R_1} + j\omega C_{3c}$$

$$Y_3 = j\omega C_{3u}; \quad Y_4 = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + j\omega C_{cu}$$

$$Y_5 = j\omega C_2; \quad Y_6 = \frac{1}{R_H}$$

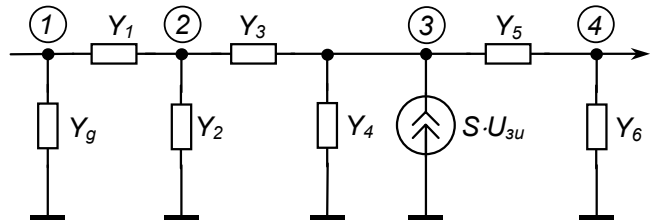


Рис. 2.15.

Схема приведена к каноническому виду. Составим дерево схемы в виде рис. 2.16.

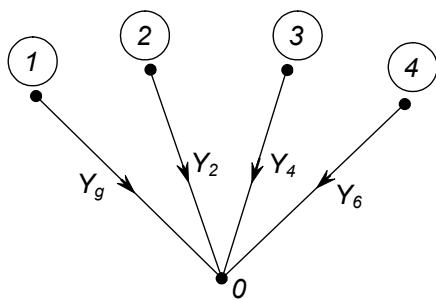


Рис. 2.16.

$j\omega C_1$	$-j\omega C_1$	0	0
$-j\omega C_1$	$j\omega(C_1 + C_{3c} + C_{3u}) + \frac{1}{R_1}$	$-j\omega C_{3u}$	0
0	$-j\omega C_{3u} - S$	$j\omega(C_2 + C_{cu} + C_{3u}) + \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_2} + S$	$-j\omega C_2$
0	0	$-j\omega C_2$	$j\omega C_2 + \frac{1}{R_H}$

Без учета зависимого источника тока матрица  $Y_0$  имеет вид:

$$Y_0 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ Y_g + Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 \\ -Y_1 & Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 & 0 \\ 0 & -Y_3 & Y_3 + Y_4 + Y_5 & -Y_5 \\ 0 & 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_6 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Полная матрица проводимости  $Y$ :

$$Y = \begin{array}{c|cccc|c} & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ \hline & Y_1 & -Y_1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & -Y_1 & Y_1 + Y_2 + Y_3 & -Y_3 & 0 & 2 \\ \hline & 0 & -Y_3 - S & Y_3 + Y_4 + Y_5 + S & -Y_5 & 3 \\ \hline & 0 & 0 & -Y_5 & Y_5 + Y_6 & 4 \\ \hline \end{array}$$

### Функции электронных схем

Метод узловых потенциалов позволяет рассчитать потенциалы всех узлов схемы, если задано входное воздействие, а также матрица проводимостей  $Y$  для схемы. Но иногда надо знать не сами потенциалы узлов, а связь между сигналами на входе и выходе схемы, т.е. определить усилительную способность схемы при различной нагрузке и различных источниках входного сигнала. Такие характеристики являются функциями схем, которые могут быть определены по матрице проводимости без расчета режима работы всей схемы. Схему представим четырехполюсником, в котором выведены входные и выходные узлы. Отметим, что схема представляет собой усилитель, фильтр и т.п. (но не генератор), т.е. в ней отсутствуют независимые источники сигнала.

$$I_{\text{вх}} = J_{\Gamma} - Y_{\Gamma} \cdot U_{\text{вх}}; \quad I_{\text{вых}} = Y_{\text{н}} \cdot U_{\text{вых}}$$

Перечислим основные функции схем:

1. Коэффициент передачи по напряжению  $K_U = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}$ ;
2. Коэффициент передачи по току  $K_I = \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}}$ ;
3. Сопротивление передачи  $Z_{\text{пер}} = \frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}}$ ;
4. Проводимость передачи  $Y_{\text{пер}} = \frac{I_{\text{вх}}}{U_{\text{вх}}}$  (причем  $Z_{\text{пер}} \neq 1/Y_{\text{пер}}$ );
5. Входное сопротивление  $Z_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}}$ ;
6. Входная проводимость  $Y_{\text{вх}} = \frac{I_{\text{вх}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}}$ .

Функции схем связаны между собой следующим образом:

$$Z_{\text{пер}} = \frac{U_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{вх}} \cdot Y_{\text{н}}} = \frac{K_I}{Y_{\text{н}}}; \quad Y_{\text{пер}} = \frac{I_{\text{вх}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вых}} \cdot Y_{\text{н}}}{U_{\text{вх}}} = K_U \cdot Y_{\text{н}};$$

$$Z_{\text{вх}} = \frac{U_{\text{вх}}}{I_{\text{вх}}} = \frac{U_{\text{вых}} \cdot K_I}{K_U \cdot I_{\text{вых}}} = \frac{K_I}{K_U \cdot Y_{\text{н}}}; \quad Y_{\text{вх}} = \frac{I_{\text{вх}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}} = \frac{K_U \cdot Y_{\text{н}}}{K_I}.$$

Вводятся также понятия режимов холостого хода ( $Y_{\text{н}}=0$ ) и короткого замыкания ( $Y_{\text{н}}=\infty$ ). В случае работы схемы в режиме холостого хода ее функции обозначаются с верхним индексом «0» ( $K_U^0$ ), короткого замыкания — с верхним индексом «к» ( $K_I^k$ ).

Пусть схема представляет собой усилитель или частотно-формирующий каскад, где нет независимых источников сигнала. Рассмотрим вопрос об определении функций схемы через параметры матрицы проводимости  $Y$ .

Согласно методу узловых потенциалов:

$$U = Y^{-1} \cdot J$$

При этом вектор задающих токов схемы имеет 2 компонента, соответствующих входному и выходному токам схемы (рис. 2.17). В узел «а» входной ток втекает, следовательно он берется со знаком «+», выходной ток вытекает из узла «b», следовательно он берется со знаком «-». Узловые напряжения в узлах «а» и «b» соответственно —  $U_{\text{вх}}$  и  $U_{\text{вых}}$ :

$$U_{\text{вх}} = U_a; \quad U_{\text{вых}} = U_b$$

Предположим, что матрица проводимости  $Y$  имеет следующий вид:

$$Y = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1v} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2v} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{v1} & y_{v2} & \dots & y_{vv} \end{vmatrix}$$

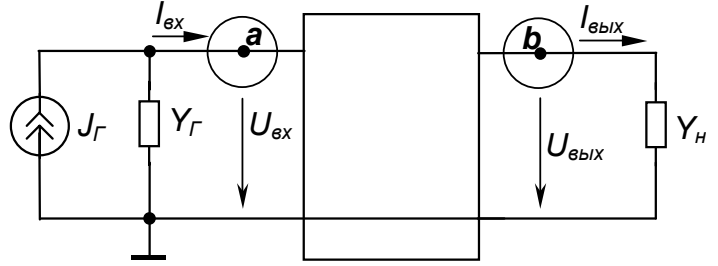


Рис. 2.17

Для построения обратной матрицы  $Y^{-1}$  надо найти алгебраические дополнения для каждого элемента, разделить их на определитель матрицы  $Y$ , полученную матрицу транспонировать:

$$Y^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{\Delta_{11}}{\Delta} & \frac{\Delta_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{\Delta_{v1}}{\Delta} \\ \frac{\Delta_{12}}{\Delta} & \frac{\Delta_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{\Delta_{v2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\Delta_{1v}}{\Delta} & \frac{\Delta_{2v}}{\Delta} & \dots & \frac{\Delta_{vv}}{\Delta} \end{vmatrix};$$

Здесь  $\Delta_{ij}$  — определитель матрицы, полученной из исходной матрицы  $Y$  путем вычеркивания  $i$ -ой строки и  $j$ -ого столбца, умноженный на  $(-1)^{i+j}$ :

$$\Delta_{ij} = M_{ij} \cdot (-1)^{i+j}$$

Нас интересуют потенциалы входного (а) и выходного (b) узлов, поэтому полное матричное уравнение решать нет смысла. Надо рассмотреть 2 строки, соответствующих узлам «а» и «b»:

$$U_{\text{вх}} = U_a = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{s=1}^v \Delta_{sa} \cdot J_s; \quad U_{\text{вых}} = U_b = \frac{1}{\Delta} \cdot \sum_{s=1}^v \Delta_{sb} \cdot J_s$$

Т.к. в векторе задающих токов  $J$  всего 2 ненулевых элемента, то

$$U_{\text{вх}} = \frac{1}{\Delta} \cdot (\Delta_{aa} \cdot I_{\text{вх}} - \Delta_{ba} \cdot I_{\text{вых}}); \quad U_{\text{вых}} = \frac{1}{\Delta} \cdot (\Delta_{ab} \cdot I_{\text{вх}} - \Delta_{bb} \cdot I_{\text{вых}})$$

Эти уравнения преобразуем так, чтобы выделить интересующие нас параметры  $I_{\text{вх}}$  и  $I_{\text{вых}}$ . Для этого исключим их уравнений  $I_{\text{вх}}$ .

$$U_{\text{вх}} = \frac{1}{\Delta} \cdot (\Delta_{aa} \cdot I_{\text{вх}} - \Delta_{ba} \cdot I_{\text{вых}}) \quad | \times \Delta_{ab}$$

$$U_{\text{вых}} = \frac{1}{\Delta} \cdot (\Delta_{ab} \cdot I_{\text{вх}} - \Delta_{bb} \cdot I_{\text{вых}}) \quad | \times \Delta_{aa}$$

вычитаем из 1-го 2-е  $\begin{cases} \Delta \Delta_{ab} U_{\text{вх}} = \Delta_{aa} \Delta_{ab} \cdot I_{\text{вх}} - \Delta_{ba} \Delta_{ab} \cdot I_{\text{вых}} \\ \Delta \Delta_{aa} U_{\text{вых}} = \Delta_{aa} \Delta_{ab} \cdot I_{\text{вх}} - \Delta_{aa} \Delta_{bb} \cdot I_{\text{вых}} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Delta \Delta_{ab} U_{\text{вх}} - \Delta \Delta_{aa} U_{\text{вых}} = \Delta_{aa} \Delta_{bb} \cdot I_{\text{вых}} - \Delta_{ab} \Delta_{ba} \cdot I_{\text{вх}} \Rightarrow$$



$$I_{\text{вых}} = \frac{(\Delta_{ab} \cdot U_{\text{ex}} - \Delta_{aa} \cdot U_{\text{вых}}) \cdot \Delta}{\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}}$$

$I_{\text{вых}}$  и  $U_{\text{вых}}$  связаны между собой через параметры нагрузки:  $I_{\text{вых}} = U_{\text{вых}} \cdot Y_H$ . Используем это в последнем уравнении:

$$\Delta (\Delta_{ab} U_{\text{ex}} - \Delta_{aa} U_{\text{вых}}) = U_{\text{вых}} \cdot Y_H \cdot (\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}) \Rightarrow$$

$$U_{\text{вых}} (\Delta \Delta_{aa} + (\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}) \cdot Y_H) = \Delta \Delta_{ab} U_{\text{ex}} \Rightarrow$$

$$K_U = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{ex}}} = \frac{\Delta \Delta_{ab}}{\Delta \Delta_{aa} + (\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba}) \cdot Y_H} \Rightarrow$$

Из теории определителей известно, что:

$$\Delta_{aa} \Delta_{bb} - \Delta_{ab} \Delta_{ba} = \Delta_{aa,bb} \cdot \Delta,$$

где  $\Delta_{aa,bb}$  — двойное алгебраическое дополнение, полученное из исходной матрицы путем вычеркивания строк и столбцов с номерами  $a$  и  $b$  соответственно.

$$K_U = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{ex}}} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa} + \Delta_{aa,bb} \cdot Y_H}$$

- 1.  $Y_H$  вкл. в матрицу  $Y$  — по формуле  $K_U^0$
- 2.  $Y_H$  не вкл. в матрицу  $Y$  — по формуле  $K_U$

Таким образом, функция схемы  $K_U$  получилась как результат матричных операций, не связанных с расчетом схемы. Несложно получить соотношения для режима холостого хода:

$$Y_H = 0 \Rightarrow K_U^0 = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{aa}}$$

и короткого замыкания:

$$Y_H \rightarrow \infty \Rightarrow K_U^K = 0$$

Если составить эквивалентную схему, включая в нее  $Y_H$ , то мы должны рассчитать схему для режима холостого хода (т.к. ток нагрузки  $I_H$  уже учтен в матрице). Если  $Y_H$  не входит в матрицу проводимости, то  $K_U$  считается по общей формуле.

При выполнении всех преобразований матриц рекомендуется входной узел всегда делать 1-ым, выходной — последним. При этом подматрицы получаются проще.

Для нахождения  $K_I$  рассмотрим второе из исходных уравнений (для  $U_{\text{вых}}$ ). Замена

$$U_{\text{вых}} = \frac{I_{\text{вых}}}{Y_H} \quad \text{дает:} \quad I_{\text{вых}} \left( \frac{1}{Y_H} + \frac{\Delta_{bb}}{\Delta} \right) = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta} \cdot I_{\text{ex}} \Rightarrow$$

$$K_I = \frac{I_{\text{вых}}}{I_{\text{ex}}} = \frac{\Delta_{ab} \cdot Y_H}{\Delta + Y_H \cdot \Delta_{bb}}$$

- 1.  $Y_H$  вкл. в матрицу  $Y$  — по формуле  $K_I^K$ , при этом разрывается цепь между  $Y_H$  и землей
- 2.  $Y_H$  не вкл. в матрицу  $Y$  — по формуле  $K_I$

Несложно получить соотношения для режима короткого замыкания:

$$Y_H = \infty \Rightarrow K_I^K = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta_{bb}}$$

и холостого хода:

$$Y_H = 0 \Rightarrow K_I^0 = 0$$

Все прочие функции схемы выражаются через  $K_U$  и  $K_I$ :

$$Y_{\text{ex}} = \frac{I_{\text{ex}}}{U_{\text{ex}}} = \frac{I_{\text{вых}} \cdot K_U}{K_I \cdot U_{\text{вых}}} = \frac{Y_H \cdot K_U}{K_I}$$

Подставив в выражение для  $Y_{ex}$  выражения для  $K_U$  и  $K_I$  через определители, получаем:

$$Y_{ex} = \frac{Y_H \cdot \Delta_{ab} \cdot (\Delta + Y_H \cdot \Delta_{bb})}{(\Delta_{aa} + Y_H \cdot \Delta_{aa,bb}) \cdot \Delta_{ab} \cdot Y_H} \Rightarrow$$

1.  $Y_H$  вкл. в матрицу  $Y$  — по формуле  $Y_{ex}^0$
  2.  $Y_H$  не вкл. в матрицу  $Y$  — по формуле  $Y_{ex}$

$$Y_{ex} = \frac{\Delta + Y_H \cdot \Delta_{bb}}{\Delta_{aa} + Y_H \cdot \Delta_{aa,bb}}$$

Получим соотношения для режима короткого замыкания:

$$Y_H = \infty \Rightarrow Y_{ex}^K = \frac{\Delta_{bb}}{\Delta_{aa,bb}}$$

и холостого хода:

$$Y_H = 0 \Rightarrow Y_{ex}^0 = \frac{\Delta}{\Delta_{aa}}$$

В результате матричных преобразований размерности выходных величин должны сохраняться. Для выражений  $K_U$  и  $K_I$  размерности матриц числителя и знаменателя одинаковы, для  $Y_{ex}$  — порядок матрицы числителя больше порядка матрицы знаменателя.

Еще одна функция проводимости передачи  $Y_{nep}$ :

$$Y_{nep} = \frac{I_{ввх}}{U_{ex}} = \frac{U_{ввх} \cdot Y_H}{U_{ex}} = K_U \cdot Y_H \Rightarrow$$

$$Y_{nep} = \frac{I_{ввх}}{U_{ex}} = \frac{\Delta_{ab} \cdot Y_H}{\Delta_{aa} + Y_H \cdot \Delta_{aa,bb}}$$

$$Z_{nep} = \frac{U_{ввх}}{I_{ex}} = \frac{I_{ввх}}{I_{ex} \cdot Y_H} = \frac{K_I}{Y_H} \Rightarrow$$

$$Z_{nep} = \frac{\Delta_{ab}}{\Delta + Y_H \cdot \Delta_{bb}}$$

Для нахождения  $Y_{ввх}$  воспользуемся следующим приемом: т.к. четырехполюсник формально симметричен, то поменяем (формально) индексы, соответствующие входным и выходным узлам. При этом вместо  $Y_H$  будет записана  $Y_2$ :

$$Y_{ввх} = \frac{\Delta + Y_\Gamma \cdot \Delta_{aa}}{\Delta_{bb} + Y_\Gamma \cdot \Delta_{aa,bb}}$$

Как правило, для реальн. источн.  $R_\Gamma \rightarrow 0$  или  $Y_\Gamma \rightarrow \infty$ .

$Y_H$  вкл. в матрицу проводимости  $Y$ ,  $Y_{ввх}$  счит-ся по формуле:  $Y_{ввх} = Y_{ввх}^K = \frac{\Delta_{aa}}{\Delta_{aa,bb}}$

Рассмотрим вычисление функций схем для каскада с общим стоком (см. рис. 2.13, 2.14). Ранее для него получили матрицу проводимости  $Y$ :

$$Y = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & y_{14} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{vmatrix}$$

Любой из элементов матрицы является комплексной величиной, состоящей из активной и реактивной компонент. Чтобы найти функцию схемы в частотной области, вначале надо записать каждый элемент  $y_{ks}$  через значение параметров схемы. Проанализировав выражение для требуемой функции схемы, необходимо определить те подматрицы, которые нужны для расчета. Например, если рассчи-

тывается  $K_U$ , а  $Y_H$  включена в состав матрицы, то нужны только  $\Delta_{ab}$  и  $\Delta_{aa}$ . Необходимо записать выражения для вычисления определителей, заведомо вычеркнув строки и столбцы в матрице  $Y$ .

$$Y = \begin{vmatrix} j\omega C_1 & -j\omega C_1 & 0 & 0 \\ -j\omega C_1 & j\omega C_1 + \frac{1}{R_1} + j\omega C_{GD} + j\omega C_{GS} & -j\omega C_{GS} & 0 \\ 0 & -S - j\omega C_{GS} & j\omega(C_{GS} + C_{DS} + C_2) + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + S & -j\omega C_2 \\ 0 & 0 & -j\omega C_2 & j\omega C_2 + \left[ \frac{1}{R_H} \right]^* \end{vmatrix}$$

$a$  — 1-ый узел;  $b$  — 4-ый узел.

\*  $Y_H$  может включаться и не включаться в матрицу проводимости в зависимости от искомой функции и используемых формул (см. выше).

$$\Delta_{aa} = \begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 = \begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} & y_{24} \\ y_{32} & y_{33} & y_{34} \\ y_{42} & y_{43} & y_{44} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{ab} = \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{vmatrix} \cdot (-1)^{1+4} = - \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \\ y_{41} & y_{42} & y_{43} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{aa,bb} = \begin{vmatrix} y_{22} & y_{23} \\ y_{32} & y_{33} \end{vmatrix}$$

Целью расчета является получение  $K_U(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$ . В области высоких частот возможно получение труднообъяснимых результатов (с практической точки зрения), а именно в области ВЧ  $K_U \geq 1$ , в то время как коэффициент передачи схемы с общим стоком меньше 1.

### Метод обобщенных ветвей

Рассмотренные выше методы узловых потенциалов и контурных токов в ряде случаев при расчете электронных схем оказываются неудобными вследствие того, что ветви реальной схемы зачастую трудно представить в виде, удобном для реализации методов. Так, при использовании метода узловых потенциалов все ветви должны быть представлены в виде источников тока с включенными параллельно проводимостями, в методе контурных токов все ветви представляются источниками ЭДС с включенными последовательно резисторами. Разумеется, указанная трудность принципиального значения не имеет, так как эквивалентными преобразованиями одну из форм представления можно всегда свести к другой, однако, это представляет определенные неудобства.

Рассмотрим метод, позволяющий описывать схемы с более гибкой структурой ветвей, когда каждая ветвь представляется источниками тока (зависимым и независимым), а также источником ЭДС.

Для рассмотрения метода введем понятие структурной матрицы схемы или матрицы инцидентий (соединений) схемы  $A_a$ : для схемы с  $n$  узлами и  $l$  ветвями матрицей инцидентий называется прямоугольная матрица размера  $[n, l]$ , где каждой ветви отводится столбец, а каждому узлу — строка. Эле-

мент матрицы  $a_{ij}=1$ , если  $j$ -ая ветвь принадлежит  $i$ -ому узлу и стрелка направлена от узла, элемент  $a_{ij}=-1$ , если  $j$ -ая ветвь принадлежит  $i$ -ому узлу и стрелка направлена к узлу, наконец, элемент  $a_{ij}=0$ , если ветвь  $j$  не принадлежит узлу  $i$ .

Рассмотрим пример для ранее приведенной структурной схемы некоторой цепи (рис. 2.18):

Матрица инциденций имеет вид:

$$A_a = \begin{array}{c|cccccccc|c} & I & II & III & IV & V & VI & VII & VIII & \\ \hline +1 & 0 & 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & +1 & -1 & +1 & 0 & 5 \\ \hline \end{array}$$

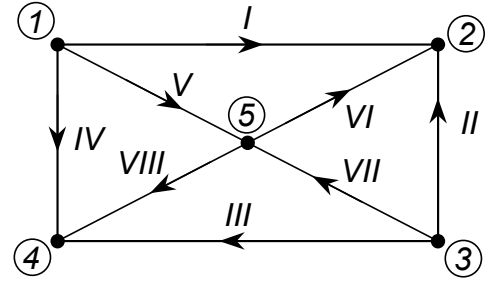


Рис. 2.18.

Очевидно, можно отметить одно важное свойство, матрицы  $A_a$ :

т.к. каждая ветвь соединяет два узла схемы, а по отношению к ним направления ветвей противоположны, то каждый столбец матрицы  $A_a$  имеет два ненулевых элемента: +1 и -1, т.е. сумма элементов матрицы в столбце равна 0. Поэтому можно исключить любую строку матрицы без потери информации о схеме, т.к. исключенная строка может быть всегда восстановлена. Матрица, полученная из матрицы  $A_a$  путем исключения одной из строк называется редуцированной матрицей инциденций  $A$ . Она имеет размер  $[n-1, l]$ .

Рассмотрим вектор-столбец токов ветвей  $I_\epsilon$ :

$$I_\epsilon = \begin{pmatrix} i_{\epsilon 1} \\ i_{\epsilon 2} \\ \dots \\ i_{\epsilon l} \end{pmatrix}$$

Очевидно, по первому закону Кирхгофа, сумма токов ветвей в узле равна 0, тогда

$$A_a \cdot I_\epsilon = 0$$

Набор уравнений, воспроизводимый последним матричным уравнением, не является линейно независимым, т.к. одно из уравнений всегда содержится во всех предыдущих. Исключив одну строку из матрицы  $A_a$ , т.е. воспользовавшись редуцированной матрицей инциденций  $A$ , можно получить линейно независимую систему уравнений, отображающую матричным уравнением:

$$A \cdot I_\epsilon = 0$$

Рассмотрим также еще одно важное свойство матрицы  $A$ .

Введем вектор столбец узловых потенциалов  $U$ , размерности  $[n-1, 1]$ , где потенциалы отсчитываются от базисного узла, соответствующего вычеркнутой строке в матрице инциденций  $A_a$ . Можно показать, что

$$U_\epsilon = A^t \cdot U$$

Для доказательства этого положения рассмотрим  $k$ -тую ветвь схемы. Очевидно,  $k$ -ая ветвь схемы может быть расположена одним из следующих способов:

1. От узла  $i$  к базисному,
2. От базисного узла к узлу  $i$ .
3. От  $i$ -го узла к  $j$ -тому узлу.

В первом случае в матрице  $A$  в столбце « $k$ » имеется лишь один отличный от нуля элемент  $a_{ik}=1$ . Тогда скалярная запись приведенного выше матричного уравнения для напряжения на  $k$ -ой ветви имеет вид:

$$u_{\epsilon k} = u_i$$

Во втором случае меняется лишь знак элемента  $a_{ik}=-1$  при этом:

$$u_{\epsilon k} = -u_i,$$

В третьем случае в  $k$ -том столбце матрицы  $A$  имеется 2 ненулевых элемента  $a_{ik}=1$  и  $a_{jk}=-1$ , тогда напряжение на  $k$ -ой ветви выражается в виде:

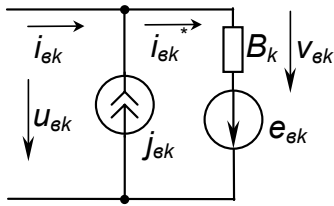


Рис. 2.19.

$$U_{ek} = U_i - U_j,$$

что вполне совпадает с физическим смыслом.

Рассмотрим теперь некоторую произвольную ветвь схемы в обобщенном виде (рис. 2.19).

здесь  $j_{ek}$  — независимый источник тока  $k$ -той ветви,  $e_{ek}$  — независимый источник ЭДС ветви,  $B_k$  — двухполюсник, который представляет собой либо линейное сопротивление, либо управляемый напряжением на элементе  $B_j$  другой ветви источник тока.

Рассмотрим электрическую схему, состоящую из  $n+1$  узла и  $l$  ветвей. Выберем произвольно некоторый базисный узел и исключим его из рассмотрения. Для указанной схемы составим редуцированную матрицу инцидентий  $A[n, l]$ .

По аналогии с предыдущим определим следующие вектора:

$$U_{\epsilon} = \begin{pmatrix} u_{\epsilon 1} \\ u_{\epsilon 2} \\ \dots \\ u_{\epsilon l} \end{pmatrix} \text{ — век.-столб. напряжений на ветвях. } V_{\epsilon} = \begin{pmatrix} v_{\epsilon 1} \\ v_{\epsilon 2} \\ \dots \\ v_{\epsilon l} \end{pmatrix} \text{ — век.-столб. напр. на элементах } B \text{ ветвей.}$$

$$J_{\epsilon} = \begin{pmatrix} j_{\epsilon 1} \\ j_{\epsilon 2} \\ \dots \\ j_{\epsilon l} \end{pmatrix} \text{ — век.-столб. задающих токов ветвей. } E_{\epsilon} = \begin{pmatrix} e_{\epsilon 1} \\ e_{\epsilon 2} \\ \dots \\ e_{\epsilon l} \end{pmatrix} \text{ — век.-столб. задающих ЭДС ветвей.}$$

$$I_{\epsilon} = \begin{pmatrix} i_{\epsilon 1} \\ i_{\epsilon 2} \\ \dots \\ i_{\epsilon l} \end{pmatrix} \text{ — вектор-столбец токов ветвей } \quad I_B^* = \begin{pmatrix} i_{\epsilon 1}^* \\ i_{\epsilon 2}^* \\ \dots \\ i_{\epsilon l}^* \end{pmatrix} \text{ — век.-столб. токов элементов ветвей}$$

Для схемы с выбранными положительными направлениями токов и напряжений справедливы соотношения:

$$U_{\epsilon} = V_{\epsilon} - E_{\epsilon}; \quad I_{\epsilon} = I_{\epsilon}^* - J_{\epsilon}$$

Дополнив их соотношением для второго закона Кирхгофа, получим:

$$A \cdot I_{\epsilon} = 0; \quad A \cdot (I_{\epsilon}^* - J_{\epsilon}) = 0$$

Элемент  $B_k$  может характеризоваться следующими соотношениями:

Если этот элемент — линейный резистор  $R_k$ , то для него справедливо:

$$i_{\epsilon k}^* = \frac{v_{\epsilon k}}{R_k}$$

Если он — управляемый напряжением на элементе  $B_j$  ветви  $j$  источник тока, то можно записать:

$$i_{\epsilon k}^* = g_{kj} \cdot v_{\epsilon j}$$

где  $g_{kj}$  — коэффициент связи (передаточная проводимость) с размерностью А/В.

Если элемент  $B_k$  — управляемый током ветви  $j$  источник тока, то для него справедливо:

$$i_{\epsilon k}^* = \beta_{kj} \cdot i_{\epsilon j}^*$$

здесь  $\beta_{kj}$  — коэффициент передачи, безразмерная величина. Если теперь в ветви  $j$  элемент  $B_j$  — линейный резистор, то напряжение и ток в нем связаны соотношением:

$$i_{ej}^* = \frac{v_{ej}}{R_j}$$

Таким образом:

$$i_{ek}^* = \frac{\beta_{kj}}{R_j} \cdot v_{ej} = g_{kj} \cdot v_{ej}$$

и в целом, по-прежнему  $i_{ek}^* = g_{kj} \cdot v_{ej}$ , где  $g_{kj} = \frac{\beta_{kj}}{R_j}$ .

Таким образом, в целом, токи элементов  $B_k$  ветвей схемы связаны с напряжениями на элементах ветвей соотношениями:

$$\begin{pmatrix} i_{e1}^* \\ i_{e2}^* \\ \dots \\ i_{el}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1l} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{l1} & y_{l2} & \dots & y_{ll} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ \dots \\ v_{el} \end{pmatrix}$$

На основании сказанного можно заключить, что

$$y_{kk} = \frac{1}{R_k}; \quad y_{k\alpha} = 0, \quad k \neq \alpha,$$

если элемент  $B_k$  — линейный резистор,

$$y_{kj} = g_{kj} \quad \alpha = j, \quad \text{где } g_{kj} = \frac{\beta_{kj}}{R_j}; \quad y_{k\alpha} = 0, \quad \alpha \neq j,$$

если  $B_k$  — управляемый напряжением или током ветви  $j$  источник тока.

Таким образом, последнее уравнение можно записать в виде:

$$I_{\epsilon}^* = Y_{\epsilon} \cdot V_{\epsilon}$$

где  $Y_{\epsilon}$  — матрица проводимости ветвей.

Таким образом, подставляя последнее уравнение в соотношение

$$A \cdot (I_{\epsilon}^* - J_{\epsilon}) = 0$$

получим:

$$A \cdot I_{\epsilon}^* = A \cdot J_{\epsilon}; \quad A \cdot Y_{\epsilon} \cdot V_{\epsilon} = A \cdot J_{\epsilon}$$

Так как  $V_{\epsilon} = U_{\epsilon} + E_{\epsilon}$ , то справедливо:

$$A \cdot Y_{\epsilon} \cdot (U_{\epsilon} + E_{\epsilon}) = A \cdot J_{\epsilon}$$

или, что то же самое,

$$A \cdot Y_{\epsilon} \cdot U_{\epsilon} = A \cdot (J_{\epsilon} - Y_{\epsilon} \cdot E_{\epsilon})$$

С учетом выведенного выше соотношения

$$U_{\epsilon} = A^t \cdot U,$$

получим:

$$A \cdot Y_{\epsilon} \cdot A^t \cdot U = A \cdot (J_{\epsilon} - Y_{\epsilon} \cdot E_{\epsilon})$$

Обозначая  $A \cdot Y_{\epsilon} \cdot A^t = Y$ ,  $A \cdot (J_{\epsilon} - Y_{\epsilon} \cdot E_{\epsilon}) = J$ , окончательно получаем:

$$Y \cdot U = J$$

В последнем уравнении  $Y$  — матрица проводимости схемы,  $J$  — вектор задающих токов схемы.

Наконец, домножая обе части на матрицу  $Y^{-1}$  слева, получим:

$$U = Y^{-1} \cdot J$$

Таким образом, метод обобщенных ветвей позволяет сравнительно легко учитывать достаточно

сложную структуру ветвей схемы. Как видно из предыдущего рассмотрения, свойства матрицы  $A$  во многом сходны со свойствами матрицы  $\Pi$ , если схема приведена к каноническому виду. Это сходство обусловлено выбором сечений схемы, охватывающих один узел схемы. Однако работа с матрицей  $A$  проще, т.к. не приходится выбирать сечения схемы и их направления, а работать лишь с выбранными направлениями токов ветвей.

Аналогия между матрицами  $A$  и  $\Pi$  позволяет, очевидно, произвести аналогию в формализации составления матриц  $Y$  и  $J$  с выведенными ранее правилами формирования аналогичных матриц в методе узловых потенциалов. В принципе, конечно, матрицы  $Y$  и  $J$  могут формироваться в соответствии с точными соотношениями вида:

$$Y = A \cdot Y_g \cdot A^t; \quad J = A \cdot (J_g - Y_g \cdot E_g).$$

Однако на практике формализованный способ составления матриц применять более просто. Разница в виде матриц  $Y$  для методов узловых потенциалов и обобщенных ветвей состоит в необходимости учета взаимных проводимостей ветвей, обусловленных наличием зависимых источников тока. При составлении вектора задающих токов схемы  $J$  необходимо, ко всему прочему, учитывать, что в вектор входят произведения, которые учитывают влияние собственных источников ЭДС ветвей, а также наличие управляемых источников тока, ток которых, в свою очередь, зависит от ЭДС ветвей, определяемых законом управления.

Рассмотрим ПРИМЕР: Схема содержит 4 узла, включая базисный.

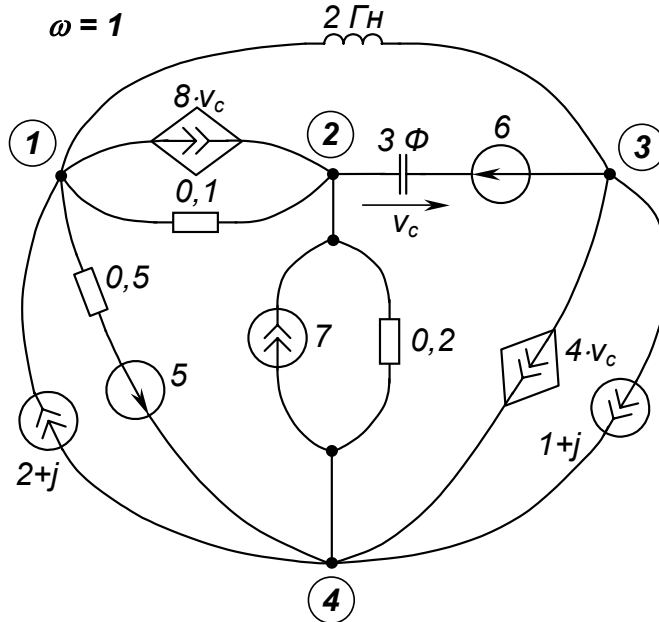


Рис. 2.20.

	1	2	3	
$Y =$	$2 + 10 + \frac{1}{2j}$	$-10 + 8$	$-\frac{1}{2j} - 8$	1
	$-10$	$10 + 5 + 3j - 8$	$-3j + 8$	2
	$-\frac{1}{2j}$	$-3j + 4$	$3j + \frac{1}{2j} - 4$	3

	1	2	3	
$Y =$	$12 - 0,5j$	$-2$	$-8 + 0,5j$	1
	$-10$	$7 + 3j$	$8 - 3j$	2
	$0,5j$	$4 - 3j$	$2,5j - 4$	3

$$J = \begin{vmatrix} 2 + j - 10 + 48 \\ 7 - 48 + 18j \\ -1 - j + 24 - 18j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 + j \\ -41 + 18j \\ 23 - 19j \end{vmatrix}$$

# Методы анализа и расчета электронных схем

## Курс лекций. Часть 3.

### Введение

Третья часть курса «Методы анализа и расчета электронных схем» посвящена методам анализа переходных процессов в электронных схемах — линейных и нелинейных (классическому, операторному, частотному) а также способам анализа динамики схем с периодической коммутацией параметров. Тема рассчитана на 12 часов лекционного материала. Литература, используемая при подготовке раздела:

### Литература

1. Л.О. Чуа, Пен-Мин-Лин. Машинный анализ электронных схем: Пер. с англ., М.: Энергия, 1980 г.
2. Влах И., Сингхал И. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ. - М.: Радио и связь, 1988. - 560 с.; ил.
3. Фидлер Дж., Найтингейл К. Машинное проектирование электронных схем М.: Высшая школа, 1985.
4. Основы теории цепей: Учебник для вузов/ Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин, А.В. Нетушил, С.В. Страхов. - 5-е изд., перераб. — М.: Энергоатомиздат, 1989. - 528 с.: ил. 621.3 (075.8) О-75.
5. Белецкий А.Ф. Теория линейных электрических цепей: Учебник для вузов. - М.: Радио и связь, 1986. - 544 с.; ил. 621.3 (075.8) Б43.

### Введение, задачи анализа переходных процессов

Как известно из курса ТОЭ, в установившемся режиме токи и напряжения во всех ветвях электронной схемы изменяются по периодическому закону, или, в частном случае остаются неизменными. Всякое изменение топологии (конфигурации) цепи или параметров входящих в неё элементов (подключение или отключение ветвей, изменение параметров источников энергии или пассивных элементов) нарушает периодический характер изменения токов и напряжений, то есть приводит к тому, что режим работы цепи становится неустановившимся. Такое скачкообразное изменение параметров, приводящее к нарушению установившегося режима, называется коммутацией. Если внешнее воздействие и после коммутации имеет периодический характер, то с течением времени цепь перейдет в новый установившийся режим. Неустановившиеся процессы, которые имеют место в цепи при переходе от одного установившегося режима к другому, называются *переходными процессами*.

При анализе переходных процессов в цепях обычно пренебрегают временем коммутации, то есть считают, что коммутация совершается мгновенно. Например, параметры пассивных элементов или источников энергии изменяются как показано на рис. 3.1.

Начало отсчета времени переходного процесса обычно совмещают с моментом коммутации, причем через  $t=(0-)$  обозначают момент времени,

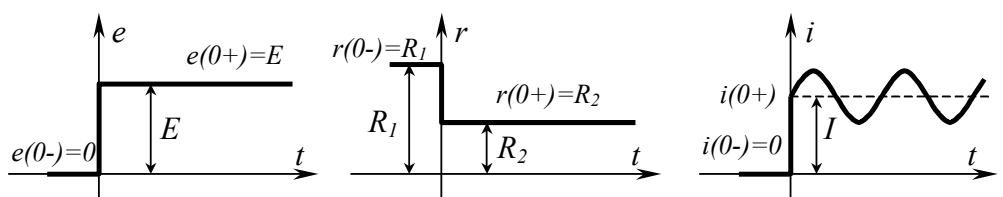


Рис. 3.1.

непосредственно предшествующий коммутации, а через  $t=(0+)$  — момент времени, непосредственно следующий за коммутацией.

Изменение топологии схемы является характерным случаем для работы электронных схем: например в схемах преобразования электрической энергии осуществляется периодическое подключение реактивных элементов к выходным цепям (рис. 3.2); периодически меняется нагрузка преобразователей напряжения, скачкообразно меняется состояние транзисторов в ключевом режиме. Для устройств

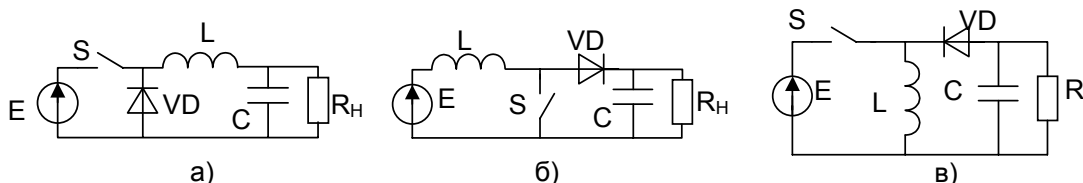


Рис. 3.2. Схемы регуляторов постоянного напряжения: а – понижающий; б – повышающий; в – инвертирующий



промышленной электроники важной является также форма реакции на подключение источника постоянного напряжения.

Расчет переходных процессов при коммутации основывается прежде всего на установлении соотношений между токами и напряжениями на отдельных элементах, которые имеют место именно в процессе коммутации, то есть в моменты времени  $t=0-$  и  $t=0+$ . Эти соотношения называют *законами коммутации*.

### Законы коммутации

Переход реальной электрической цепи из одного состояния в другое не может осуществляться мгновенно, скачком. Это объясняется тем, что каждому установившемуся состоянию цепи соответствует определенная электрическая энергия, накопленная в реактивных элементах. Энергия, накопленная в электрическом поле конденсатора, определяется как  $W_c=(Q \cdot U_c)/2$ , в магнитном поле индуктивности —  $W_L=(\Psi_L)/2$ . Скачкообразный переход, то есть мгновенное изменение энергии потребовал бы бесконечно большой мощности:

$$P = \frac{dW}{dt} \rightarrow \infty$$

Вследствие ограниченности любого реального источника энергии суммарная энергия в цепи может изменяться только плавно. Таким образом, при переходе от  $t=0-$  к  $t=0+$  при корректной коммутации сохраняются условия:

$$W_c(0-) = W_c(0+) \quad W_L(0-) = W_L(0+)$$

В каждом конкретном случае коммутация может происходить различным образом, то есть по-разному меняются параметры реактивных или активных элементов или конфигурация схемы:

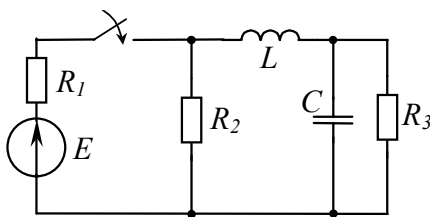


Рис. 3.3.

1. При коммутации параметры реактивных элементов не изменяются, коммутация обусловлена изменением активных сопротивлений или ЭДС. Тогда условия неизменности энергии запишутся в виде:

$$i_L(0-) = i_L(0+) \text{ для каждой индуктивности;}$$

$$u_C(0-) = u_C(0+) \text{ для каждой емкости.}$$

Типичным примером схем с указанным видом коммутации является схема рис. 3.3.

2. Коммутация связана с изменением параметров реактивных элементов. В курсе ТОЭ такой тип коммутации назывался коммутацией с некорректными начальными условиями, он сопровождается выделением энергии на коммутирующем элементе в виде искры или бросков тока.

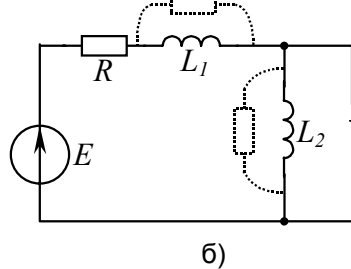
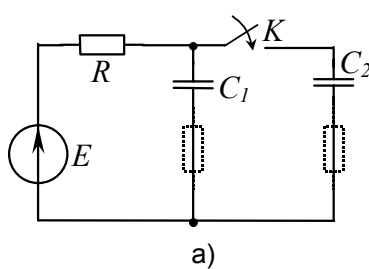


Рис. 3.4.

Рассмотрим принципиальные схемы:

В первом случае (рис. 3.4, а) к предварительно заряженной до напряжения  $u(0-)$  емкости  $C_1$  подключается, например, полностью разряженная емкость  $C_2$ . Так как суммарный заряд после коммутации остается неизменным, то справедливо соотношение:

$$Q(0-) = Q(0+) = C_1 u(0-) = (C_1 + C_2) u(0+)$$

Таким образом, напряжение на емкостях после коммутации:

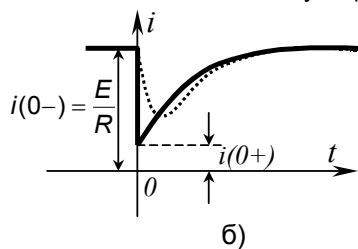
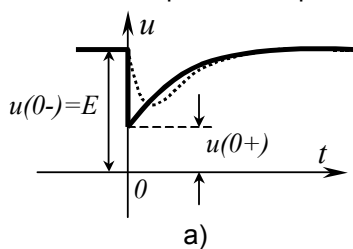


Рис. 3.5.

$$u(0+) = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot u(0-)$$

Графически переходный процесс после коммутации имеет вид рис. 3.5, а.

При коммутации в системе рассеивается часть энергии. Действи-

тельно, до коммутации энергия:

$$W_C(0-) = \frac{C_1 \cdot u(0-)^2}{2} = \frac{C_1 \cdot E^2}{2},$$

после коммутации:

$$W_C(0+) = \frac{(C_1 + C_2) \cdot u(0+)^2}{2} = C_1 \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2} \cdot \frac{u(0-)^2}{2} = \frac{C_1 \cdot E^2}{2} \cdot \frac{C_1}{C_1 + C_2}$$

Отсюда следует, что  $W_C(0+) < W_C(0-)$ , то есть часть энергии рассеивается на коммутирующем элементе, этим же определяется конечное время коммутации, так как реальные емкости и ключи обладают омическим сопротивлением. Собственно, точный учет эквивалентной схемы конденсатора (как показано на рис. 3.4, а, пунктиром), снимает некорректность задачи и приводит ее к законам коммутации 1 типа. При расчете радиоэлектронных схем, как правило, учитываются именно такие, более точные схемы, а 2-ой тип законов коммутации используется лишь при очень грубом анализе.

Рассмотрим коммутацию в схеме с индуктивностью. Потокосцепление до коммутации равно:

$$\Psi(0-) = L_1 \cdot i(0-) = (L_1 + L_2) \cdot i(0+)$$

После коммутации оно не изменилось. Так как индуктивности не магнитносвязанные, то после коммутации по цепи пойдет ток:

$$i(0+) = \frac{\Psi(0+)}{L_1 + L_2} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot i(0-)$$

Графически характер переходного процесса имеет вид (см. рис. 3.5, б). Энергия в системе до и после коммутации имеет величину:

$$W_L(0-) = \frac{L_1 \cdot i(0-)^2}{2}; \quad W_L(0+) = L_1 \cdot \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{i(0-)^2}{2}$$

Как видно,  $W_L(0-) > W_L(0+)$ , то есть часть энергии выделяется в коммутирующих элементах в виде искры и т.д. Более точный учет параметров коммутирующих элементов и индуктивностей, как показано на рис. 3.4, б, пунктиром, снимает противоречие и приводит к закону коммутации 1-го типа.

3. При коммутации происходит изменение параметров магнитных элементов со 100%-ой магнитной связью (рис. 3.6). При этом обмотки намотаны на одном сердечнике, магнитное поле не рассеивается. До коммутации по обмотке  $W_1$  протекает ток  $i(0-) = E/R$ , состояние сердечника характеризуется напряженностью магнитного поля  $H(0-)$ :

$$H(0-) = \frac{i(0-) \cdot W_1}{l_{cp}},$$

определяемой по закону полного тока. Индукция в сердечнике:

$$B(0-) = \mu\mu_0 H(0-)$$

В момент коммутации магнитное состояние сердечника не изменяется, то есть  $H(0+) = H(0-)$ ;  $B(0+) = B(0-)$ . Поэтому электрические параметры цепи после коммутации можно определить из соотношений:

$$\frac{i(0-) \cdot W_1}{l_{cp}} = \frac{i(0+) \cdot (W_1 + W_2)}{l_{cp}} \Rightarrow i(0+) = \frac{i(0-) \cdot W_1}{W_1 + W_2},$$

что, очевидно, эквивалентно:

$$i(0+)^2 \cdot (W_1 + W_2)^2 = i(0-)^2 \cdot W_1^2; \quad \frac{L_{W_1} \cdot i(0-)^2}{2} = \frac{L_{W_1 W_2} \cdot i(0+)^2}{2}.$$

(Индуктивность замкнутого тороида пропорциональна квадрату числа витков намотанной на нем обмотки  $L \sim W^2$ :  $L_{mop} = \frac{\mu\mu_0 W^2 S}{l_{cp}}$ ).

Таким образом, энергия магнитного поля при коммутации не изменяется, то есть условия коммутации корректны. Необходимо отметить, что указанный случай есть также в определенной степени идеализация, т.к. магнитные элементы со 100%-ой связью отсутствуют. Реальная схема замещения указанной цепи имеет вид (см. рис. 3.7).

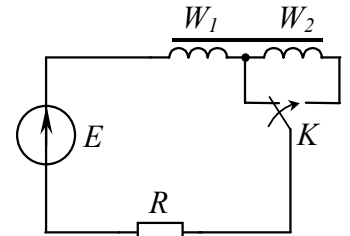


Рис. 3.6.

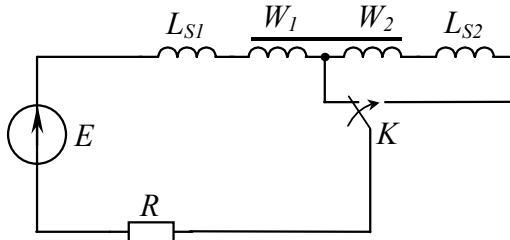


Рис. 3.7.

индуктивности в течение бесконечно малого времени может изменяться скачком, скачком также изменяется напряжение на емкости.

Общее замечание для случаев 2 - 4: некорректности коммутации связаны с идеализацией электрических элементов схем. Поэтому вместо термина «некорректная коммутация» следует употреблять термин «некорректно поставленная задача коммутации».

**Общая проблема и подход к анализу коммутационных процессов**

Задача анализа переходных процессов заключается в общем случае в определении мгновенных значений токов и напряжений в схеме в любой момент времени после коммутации. Задача эта сводится к решению системы из  $n$  дифференциальных уравнений, в общем случае нелинейных.  $n$  - порядок цепи, то есть количество реактивных элементов с независимыми начальными энергиями. Если к моменту коммутации, т.е. при  $t=(0-)$  энергия каждого из реактивных элементов равна 0, то говорят, что анализ производится при нулевых начальных условиях. На характер переходных процессов оказывает влияние только состояние схемы в момент времени  $t=(0-)$ , характер процессов во все предыдущие моменты времени не имеет значения.

В реальных схемах определенные трудности представляет иногда определение порядка схемы. Порядок, как было отмечено выше, определяется количеством независимых источников энергии в схеме. В случае, если схема содержит емкостные контура, контура, состоящие из независимых источников ЭДС и емкостей, индуктивные сечения или сечения, состоящие из индуктивностей и независимых источников тока, то часть параметров схемы является зависимой друг от друга. Рассмотрим схему рис. 3.8:

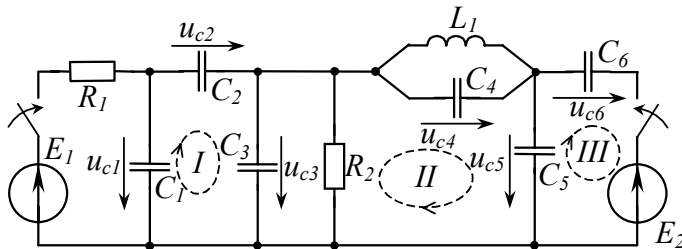


Рис. 3.8.

Здесь для 1, 2 и 3 контуров можно записать алгебраические уравнения:

$$\begin{cases} -u_{C1} + u_{C2} + u_{C3} = 0 \\ -u_{C3} + u_{C4} + u_{C5} = 0 \\ -u_{C5} + u_{C6} + E_2 = 0 \end{cases}$$

Напряжения  $u_{C6}$ ,  $u_{C3}$ ,  $u_{C1}$  могут быть выражены через напряжения  $u_{C2}$ ,  $u_{C4}$ ,  $u_{C5}$ .

Таким образом, хотя в системе присутствуют 6 напряжений на конденсаторах, но только 3 из них независимы. Таким образом порядок схемы равен 4. (3 независимых конденсатора и 1 катушка индуктивности).

Рассмотрим аналогичную схему с индуктивностями:

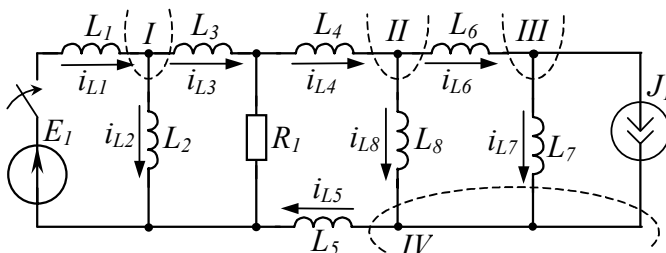


Рис. 3.9

По аналогии с предыдущим, можно записать алгебраические уравнения для сечений схемы I, II, III, IV:

$$\begin{cases} i_{L1} - i_{L2} - i_{L3} = 0 & (I) \\ i_{L4} - i_{L6} - i_{L8} = 0 & (II) \\ i_{L6} - i_{L7} - J_1 = 0 & (III) \\ i_{L8} + i_{L7} + J_1 - i_{L5} = 0 & (IV) \end{cases}$$

Токи  $i_{L1}$ ,  $i_{L4}$ ,  $i_{L6}$ ,  $i_{L8}$  выражаются через токи  $i_{L2}$ ,  $i_{L3}$ ,  $i_{L5}$ ,  $i_{L7}$ .

Несмотря на то, что в схеме имеется 8 токов в индуктивностях, только 4 из них являются независимыми, т.е. порядок схемы равен 4.

Таким образом, следует вывод: *порядок цепи равняется числу конденсаторов и катушек индук-*

В ней  $L_{S1}$ ,  $L_{S2}$  — индуктивности рассеяния обмоток. В такой системе наличие  $L_S$  определяет некорректность коммутации по п. 2, а в обмотках  $w_1$  и  $w_2$  - коммутация корректна.

4. В схеме имеется источник бесконечной мощности, то есть в цепи токи или напряжения в течение бесконечно малого времени могут принимать значения, равные  $\pm\infty$ . При этом законы коммутации могут нарушаться: то есть ток в

тивности в схеме минус число независимых С-Е контуров, минус число независимых L-I сечений.

### Анализ переходных процессов в линейных цепях

*Линейными* называются электрические цепи, параметры которых постоянны, независимы от режима работы схемы, т.е. мгновенных значений токов и напряжений на элементах. Расчет переходных процессов в линейных цепях возможен точными аналитическими методами. Наибольшее распространение получили *классический* и *операторный* методы анализа.

#### Классический метод анализа переходных процессов

Классический метод анализа переходных процессов основан на составлении дифференциальных уравнений схемы и их аналитическом решении. Цепь  $n$ -го порядка описывается системой из  $n$  линейных дифференциальных уравнений или одним уравнением  $n$ -го порядка.

$$A_n \cdot \frac{d^n x(t)}{dt^n} + A_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + A_0 \cdot x(t) = f(t)$$

где  $A_n, A_{n-1}, \dots, A_1, A_0$  - коэффициенты (постоянные), составляемые по параметрам схемы,  $f(t)$  - некоторая функция времени, формируемая из параметров элементов схемы и заданных внешних источников или их производных.

Уравнение является линейным неоднородным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами. Решение его складывается из суммы двух решений: общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. С физической точки зрения частное решение неоднородного уравнения представляет собой так называемый *принужденный режим*, т.е. определяет процессы в схеме через бесконечно большой промежуток времени после коммутации, будем обозначать его  $x_{np}(t)$ . Общее решение соответствующего однородного уравнения представляет собой так называемую *свободную составляющую*  $x_{св}(t)$ , т.е. процессы, происходящие при коммутации схемы. Таким образом:

$$x(t) = x_{np}(t) + x_{св}(t),$$

где  $x_{св}(t)$  ищется из решения уравнения:

$$A_n \cdot \frac{d^n x(t)}{dt^n} + A_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + A_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + A_0 \cdot x(t) = 0.$$

Исходя из сказанного выше:  $\lim_{x \rightarrow \infty} x_{св}(t) = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(t) = x_{np}(t)$ .

Характер источников энергии в рассматриваемой цепи существенно определяет способы нахождения принужденной составляющей  $x_{np}(t)$ . Если в цепи присутствуют только источники постоянного тока (после коммутации), то цепь рассчитывается обычными методами узловых потенциалов или контурных токов при размыкании всех емкостей и закорачивании всех индуктивностей. Если источники энергии после коммутации изменяются по гармоническому закону, то расчет  $x_{np}(t)$  можно провести, например, символическим методом (методом комплексных амплитуд). Если после коммутации на цепь воздействует несколько источников гармонического сигнала с разными частотами и источники постоянного тока, то рассматривается каждый источник отдельно и находятся частичные значения  $x_{np}^k(t)$  от каждого источника, которые затем, в соответствии с принципом наложения для линейных цепей, суммируются. Если, наконец, после коммутации на цепь воздействует источник, сигнал которого изменяется по сложному периодическому закону, отличному от гармонического, но удовлетворяющему условию Дирихле (т.е. имеющему конечное число максимумов и минимумов на конечном интервале и конечное число разрывов 1-го рода), то сигнал такого источника разлагается в ряд Фурье, и  $x_{np}(t)$  определяется как сумма принужденных составляющих от всех гармоник, каждая из которых рассчитывается отдельно. При этом количество учтенных гармоник определяет точность расчета схемы.

Для определения свободной составляющей решения уравнения необходимо найти  $n$  корней характеристического полинома вида:

$$A_n \cdot p^n + A_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + A_1 \cdot p + A_0 = 0$$

Корни находятся путем решения последнего алгебраического уравнения. В зависимости от характера полученных корней возможны следующие варианты записи решения  $x_{св}(t)$ :

1. Если корни  $p_1, p_2, \dots, p_n$  различные и действительные, то общее решение, т.е.  $x_{св}(t)$  записывается в виде:

$$x_{ce}(t) = B_1 \cdot e^{p_1 t} + B_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots + B_n \cdot e^{p_n t} = \sum_{i=1}^n B_i \cdot e^{p_i t}$$

Здесь  $B_1 \dots B_n$  - постоянные интегрирования, определяемые через начальные условия и параметры элементов цепи с учетом полученных значений для *принужденной составляющей!*

2. Если некоторый корень  $p_k$  имеет кратность  $q$  (т.е. имеется  $q$  одинаковых корней характеристического полинома). При этом соответствующее этому корню слагаемое в общем выражении для  $x_{ce}(t)$  имеет вид:

$$x_{ce}(t) = (C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot t^2 + \dots + C_{q-1} \cdot t^{q-1}) \cdot e^{p_k t} = e^{p_k t} \cdot \sum_{j=0}^{q-1} C_j \cdot t^j.$$

Здесь, как и прежде,  $C_0, \dots, C_{q-1}$  - постоянные интегрирования, определяемые из независимых начальных условий и параметров цепи после коммутации с учетом принужденной составляющей.

3. Если имеются комплексно сопряженные корни типа  $p_{k,k+1} = \delta \pm j\omega_0$ , то слагаемое в  $x_{ce}(t)$ , соответствующее этим двум корням, записывается в виде:

$$x_{ce}^{k,k+1}(t) = D \cdot e^{\delta \cdot t} \cdot \sin(\omega_0 t + \nu)$$

Здесь  $D$  и  $\nu$  - также постоянные интегрирования, находящиеся аналогично предыдущим. Можно в этом случае записать выражения для слагаемых свободной составляющей в виде:

$$x_{ce}^{k,k+1}(t) = [D_k \cdot \sin(\omega_0 t) + D_{k+1} \cdot \cos(\omega_0 t)] \cdot e^{\delta \cdot t}.$$

Обе формы записи идентичны, однако находить в этом случае необходимо постоянные интегрирования  $D_k, D_{k+1}$ .

Характер корней полинома определяет и характер процессов, происходящих после коммутации. Для электронных схем без обратных связей справедливо  $[\operatorname{Re}(p)] < 0$ , т.е. все корни имеют отрицательную действительную часть. Это определяет нерасходящийся характер переходных процессов. В случае, если действительные части корней положительны, то процессы в цепи будут расходиться.

Классический метод анализа переходных процессов применяется относительно редко при анализе несложных схем до 4-го порядка, а также наличия вынуждающего воздействия в виде источника гармонического сигнала или постоянного тока. Процесс решения практически не алгоритмизируется, т.е. применение ЭВМ возможно лишь на этапе нахождения корней характеристического полинома и tabуляции полученных аналитических выражений.

Метод позволяет получить аналитическое выражение для коммутационного процесса, что делает его незаменимым для выявления общих закономерностей динамики рассматриваемых цепей. Основные ошибки при использовании метода возникают при определении корней полинома и нахождении постоянных интегрирования.

### Операторный метод анализа переходных процессов

Основан на применении преобразования Лапласа к временным функциям. Метод позволяет оперировать с изображениями временных функций и благодаря ряду свойств преобразования перейти от решения дифференциальных уравнений к решению алгебраических при расчете переходных процессов.

Основой метода является, как уже отмечалось, переход от функций времени к их изображениям. Соответствие функции  $x(t)$  и её изображения  $X(p)$  обозначается как  $x(t) \div X(p)$  и устанавливается с помощью преобразования Лапласа:

$$X(p) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot x(t) dt$$

После выполнения требуемых преобразований осуществляется обратный переход в виде обратного преобразования Лапласа:

$$x(t) = L^{-1}[X(p)] = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} e^{pt} \cdot X(p) dp$$

В последних выражениях  $p$  — комплексное число, называемое оператором преобразования;  $\sigma_0$  - некоторое действительное число. Функция  $x(t)$  имеет изображение, если удовлетворяет условию:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \leq k \cdot e^{\sigma_0 \cdot t}, & \text{при } t > 0; k = \text{const} \end{cases}$$

Таблица 1. Основные свойства преобразования Лапласа

Соотношение	Пояснение
$k \div \frac{k}{p}$	Изображение константы
$k \cdot x(t) \div k \cdot X(p)$	Умножение на константу
$\sum_{i=1}^m x_i(t) \div \sum_{i=1}^m X_i(p)$	Изображение суммы
$\frac{d}{dt}x(t) \div p \cdot X(p) - x(0+)$	Теорема дифференцирования
$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \div p^2 \cdot X(p) - p \cdot x(0+) - \frac{dx(t)}{dt} \Big _{t=0}$	Повторное применение теоремы дифференцирования
$\int_0^t x(t)dt \div \frac{X(p)}{p}$	Теорема интегрирования
$x(t-t_0) \div e^{-pt_0} \cdot X(p)$	Теорема запаздывания
$e^{-\lambda t} \cdot x(t) \div X(p+\lambda)$	Теорема смещения
$x(t=0+) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \cdot X(p)$ $x(t \rightarrow \infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot X(p)$	Предельные соотношения
$e^{-\alpha t} \div \frac{1}{p+\alpha}$	Изображение экспоненциальной функции
$\frac{1}{\alpha} \cdot (1 - e^{-\alpha t}) \div \frac{1}{p \cdot (p+\alpha)}$	Теорема разложения
$F_1(p) \cdot F_2(p) \div \int_0^t f_1(t-x) \cdot f_2(x)dx$	Произведение изображений (теорема свертки)
$\frac{1}{n!} \cdot t^n \div \frac{1}{p^n}$	
$t \cdot e^{-\alpha t} \div \frac{1}{(p+\alpha)^2}$	
$\sin(\beta t) \div \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	
$\cos(\beta t) \div \frac{p}{p^2 + \beta^2}$	
$e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t) \div \frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	
$e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \div \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	

Непосредственное использование соотношений преобразования Лапласа достаточно громоздко, и к нему приходится прибегать достаточно редко, т.к. существуют таблицы соответствия изображений и оригиналов, а также некоторые специальные теоремы, позволяющие выполнить обратный переход (он обычно более затруднителен) для особых случаев (см. напр. Г. Корн Т. Корн Справочник по математике.; Дидкина В.А., Прудникова А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965 г.).

Рассмотрим некоторые из свойств прямого преобразования Лапласа (таблица 1).

При использовании операторного метода неизвестные токи и напряжения ветвей электрической цепи, а также токи и напряжения независимых источников энергии заменяются их изображениями. Затем составляются операторные уравнения для изображений токов и напряжений, которые решаются для неизвестных величин как обычные алгебраические уравнения. Далее, применяя обратное преобразование Лапласа, находятся оригиналы токов и напряжений в функции времени.

Одно из достоинств использования преобразования Лапласа состоит в том, что в силу третьего свойства, перечисленного в таблице, законы Кирхгофа для изображений токов и напряжений в цепи в операторном виде записываются, как и для обычных функций времени:

$$\sum_{i=1}^m I_k(p) = 0 \quad \sum_{i=1}^n U_k(p) = 0$$

Здесь  $m$  - количество ветвей, сходящихся к одному узлу,  $n$  - количество ветвей, входящих в замкнутый контур.

Рассмотрим соотношения для записи операторных уравнений электрического равновесия в цепях  $R, L, C$ .

Для сопротивления во временной области:  $u(t) = R \cdot i(t)$ . Для него, в соответствии с теоремой об умножении на константу, справедлив переход:  $U(p) = R \cdot I(p)$ .

Емкость описывается следующим уравнением во временной области:

$$i_c(t) = C \frac{du_c}{dt}.$$

Или, переходя к интегральной записи:

$$u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i_c(t) dt.$$

Первому соотношению соответствует в операторном виде уравнение:

$$I_c(p) = p \cdot C \cdot U_c(p) - C \cdot u_c(0).$$

Второму:

$$U_c(p) = \frac{u_c(0)}{p} + \frac{1}{pC} \cdot I_c(p).$$

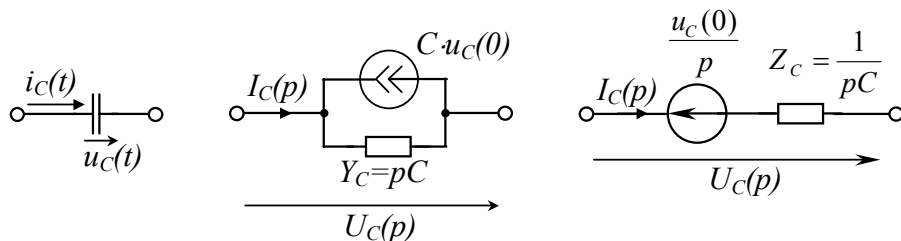


Рис. 3.10

Несложно показать, что первое уравнение может быть получено из второго и наоборот. Приведенным операторным соотношениям соответствуют эквивалентные схемы замещения (рис. 3.10). В них  $X_C = 1/pc$ ;  $Y_C = pc$  — операторные сопротивление

и проводимость соответственно.

Индуктивность описывается уравнением:  $u_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$ ;

или, что, то же самое:

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t) dt$$

В операторном виде указанные уравнения имеют вид:

$$U_L(p) = pL \cdot I_L(p) - L \cdot i_L(0); \quad I_L(p) = \frac{i_L(0)}{p} + \frac{1}{pL} \cdot U_L(p).$$

Таким образом, индуктивное операторное сопротивление:  $X_L(p) = pL$ , а проводимость:  $Y_L(p) = 1/pL$ . Эквивалентные операторные схемы замещения для индуктивности имеют вид рис. 3.11:

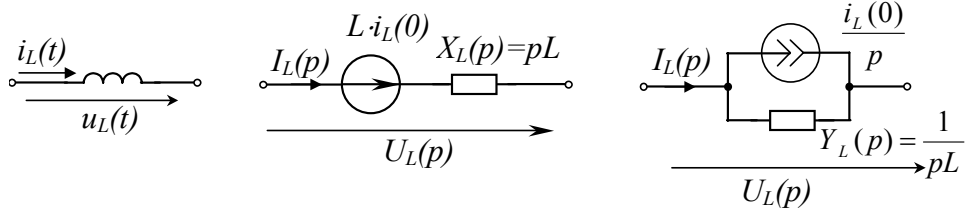


Рис. 3.11.

Сравнивая символический метод анализа установившегося режима в цепях переменного синусоидального тока и операторный метод анализа переходных процессов, можно видеть, что структура основных уравнений и вид эквивалентных схем близки, если комплексную частоту  $j\omega$  заменить на оператор  $p$  преобразования Лапласа. В операторном методе появляются лишь дополнительные независимые источники тока или ЭДС, характеризующие ненулевые начальные условия элементов схемы.

### Временные методы анализа переходных процессов

В ряде электронных схем по принципу действия на цепи воздействуют импульсы напряжения или тока, отличные от нуля лишь в течение некоторого короткого интервала времени. Рассмотрим способы определения переходных процессов в цепях при таких воздействиях.

Пусть задан импульс, форма которого изображена на рис. 1. Площадь под кривой, ограничивающей импульс, равна 1:

$$\delta(t, t_u) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{t_u}, & 0 \leq t \leq t_u \\ 0, & t > t_u \end{cases}$$

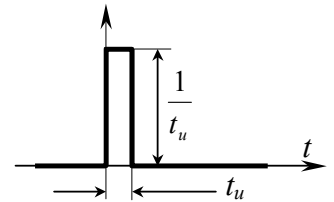


Рис. 3.12.

Предположим теперь, что длительность импульса устремляется к 0, а его площадь остается неизменной и равной 1. Тогда функция  $\delta(t, t_u)$  в пределе будет равна всюду, кроме момента времени  $t=0+$  нулю, а в этот момент обращается в бесконечность, сохраняя площадь, равную 1. При этом функцию  $\delta(t)$  называют единичной импульсной функцией, или функцией Дирака. Можно себе представить импульсную функцию площадью, отличной от 1 и равной, например,  $S_u$ , как  $S_u \cdot \delta(t)$ .

Таким образом, из сказанного следует выполнение условия:

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1, \text{ где функция } \delta(t) = 0 \text{ при } t \neq 0.$$

Воздействие  $\delta$ -функции на систему называется единичным импульсным воздействием. Если воздействует функция  $S_u \cdot \delta(t)$ , то это импульсное воздействие.

Рассмотрим вначале реакции простейших цепей на импульсное воздействие (рис. 3.13).

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t S_{ИТ} \cdot \delta(t) dt = \frac{S_{ИТ}}{C}, \text{ при } t > 0+$$

Т.е. энергия, сообщаемая емкости равна:

$$W_C = \frac{C \cdot u_C^2(0+)}{2} = \frac{C \cdot S_{ИТ}^2}{2 \cdot C^2} = \frac{S_{ИТ}^2}{2C}$$

Аналогично для индуктивности

$$i_L = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t u_L(t) dt = \frac{1}{L} \cdot \int_0^t S_{И} \cdot \delta(t) dt = \frac{S_{И}}{L}, \text{ при } t > 0+$$

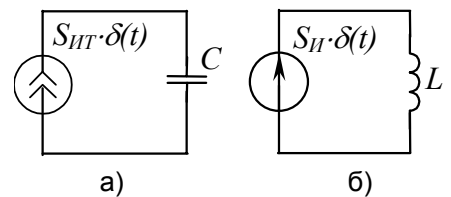


Рис. 3.13.



$$W_L = \frac{L \cdot i_L^2}{2} = \frac{L \cdot S_H^2}{2 \cdot L^2} = \frac{S_H^2}{2L}$$

Т.е. системе мгновенно сообщается заданная энергия. Таким образом, мощность в цепи бесконечна.

В ряде случаев необходимо знать реакцию системы на такого рода воздействие. Например если  $\tau \gg t_u$  (где  $\tau$  — постоянные времени схемы  $RC$ ,  $L/R$ ,  $2\pi\sqrt{LC}$ ), то можно считать, что к системе приложено импульсное воздействие: радиосхемы например.

Реакция цепи на импульсное воздействие - импульсная реакция или *импульсная характеристика*  $g(t)$ .

Удобнее всего находить реакцию операторным методом. Для этого найдем изображение  $\delta(t)$ .

$$\Delta(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot \delta(t) dt$$

Здесь подынтегральное выражение только в момент времени  $t=0$  отлично от нуля. С другой стороны  $e^{-pt}=1$  при  $t=0$ , следовательно, из геометрического смысла определенного интеграла  $\Delta(p)=1$ . Если действует  $S_H \cdot \delta(t)$ , то изображение такой функции будет  $S_H$ :

$$S_H \cdot \delta(t) \div S_H$$

Тогда, если передаточная функция системы  $H(p)$ , то изображение реакции ее на импульсное воздействие  $F_2(p)$ :

$$F_2(p) = \Delta(p) \cdot H(p) = S_H \cdot H(p).$$

В случае единичного импульсного воздействия  $F_2(p)=1 \cdot H(p)=H(p)$ . Т. е. импульсная характеристика системы  $g(t) \div H(p)$ . Это очень важное свойство, которое позволяет считать импульсные характеристики систем.

Рассмотрим импульсную реакцию интегрирующей  $RC$ -цепи (см. рис. 3.14) при нулевых начальных условиях. Отметим, что импульсную реакцию схемы можно находить а) операторным методом, зная изображение по Лапласу для входного воздействия, и б) с помощью операторной передаточной функции. Результирующие выражения:

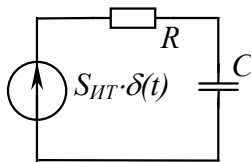


Рис. 3.14.

$$H(p) = \frac{1}{1 + pRC}; \quad U_C(p) = \frac{S_H}{1 + pRC}; \quad u_C(t) = \frac{S_H}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Таким образом,  $u_C(0+) = S_H/RC$ , сравним с соответствующим выражением для простейшего звена в виде конденсатора (рис. 3.13, а):  $u_C = \frac{S_{HT}}{C}$ , т. е. В интегрирующей  $RC$ -цепи воздействие типа напряжения преобразуется в ток величиной  $S_H/R$ , что вполне понятно из физических соображений.

### Интеграл наложения

Из знания импульсной характеристики цепи следует метод расчета переходных процессов в линейных схемах. Если на входе системы действует некоторая функция  $f_1(t) \div F_1(p)$ , то изображение реакции линейной системы  $F_2(p)$ :  $F_2(p) = H(p) \cdot F_1(p)$ . Поскольку  $H(p) \div g(t)$  и  $F_2(p) \div f_2(t)$ , то воспользовавшись теоремой свертки (оригиналом для произведения 2-х изображений является свертка их оригиналов, т.е. функций  $g(t)$  и  $f_1(t)$ ), несложно получить:

$$f_2(t) = \int_0^t f_1(x) \cdot g(t-x) dx = \int_0^t f_1(t-x) \cdot g(x) dx$$

В теории электрических цепей данные интегралы известны под названием *интегралов наложения*. По любой из этих формул зная импульсную характеристику цепи  $g(t)$  и воздействие  $f_1(t)$  можно вычислять реакцию линейной электрической цепи, если начальные условия нулевые.

Таким образом можно рассчитать переходные процессы, если проинтегрировать интеграл свертки.

### Интеграл Дюамеля

Импульсная функция и импульсная характеристика системы очень удобны для расчета реакции системы. Однако более наглядным является представление воздействия с помощью ступенчатой

функции  $1(t)$  (рис. 3.15).

Изображением  $1(t)$  является, очевидно  $1/p$  (можно найти из прямого преобразования Лапласа). Для нахождения реакции  $f_2(t)$  будем рассматривать в операторном виде выражение:

$$F_2(p) = F_1(p) \cdot H(p) = F_1(p) \cdot \frac{H(p)}{p}$$

Что такое  $\frac{H(p)}{p}$ ? Что является ее оригиналом во временной области?

Если  $f_1(t) \div 1(t)$ , то  $F_1(p) = \frac{1}{p}$ . Тогда  $F_2(p) = \frac{1}{p} \cdot H(p) = \frac{H(p)}{p}$ . Таким образом реакция

системы на единичный скачок (переходная характеристика)  $h(t)$  имеет изображение по Лапласу  $H(p)/p$ , т.е.:

$$h(t) \div \frac{H(p)}{p}$$

Операции деления изображения на  $p$  соответствует интегрирование оригинала, а оригиналом  $H(p)$  является импульсная характеристика  $g(t)$ . Таким образом получаем:

$$h(t) = \int_0^t g(x) dx$$

Как, зная переходную характеристику, рассчитать переходный процесс при произвольном входном воздействии? Очевидно, реакция  $f_2(t)$  будет соответствовать свертке оригиналов  $f_1(t)$  и  $h(t)$ , продифференцированной по времени за счет умножения на  $p$  (по теореме о дифференцировании оригинала):

$$f_2(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(x) h(t-x) dx = \frac{d}{dt} \int_0^t f_1(t-x) h(x) dx$$

По правилу дифференцирования интеграла с переменным верхним пределом:

$$f_2(t) = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(x)h(t-x) dx = f_1(0)h(t) + \int_0^t f_1'(t-x)h(x) dx$$

Тот же результат может быть получен несколько другим путем (из геометрического смысла интеграла Дюамеля). Сложное воздействие может быть представлено как некоторое ступенчатое воздействие, приложенное в нулевой момент времени, и ряд следующих друг за другом малых воздействий (см. рис. 3.16). Для линейных цепей справедлив принцип наложения. Если рассматривать реакцию схемы на воздействие в некоторый момент времени  $t_0$ , то эта реакция есть результат наложения реакции на первый импульс и суммы реакций на ряд бесконечно малых воздействий  $df_1(x) = f_1'(x)dx$ . Тогда, интегрируя реакции за период времени от 0 до  $t_0$ , получим аналогичное выражение.

Т.к. момент времени, в который определяется реакция ( $t_0$ ) не имеет существенного значения, то его заменяют на  $t$ .

$$f_2(t_0) = f_1(0) \cdot h(t) \Big|_{t=t_0} + \sum_0^{t_0} \Delta f_1(x) \cdot h(t_0 - x) = f_1(0) \cdot h(t) \Big|_{t=t_0} + \int_0^{t_0} f_1'(x) \cdot h(t_0 - x) dx$$

$$f_2(t) = f_1(0) \cdot h(t) + \int_0^t f_1'(x) \cdot h(t-x) dx$$

Указанные соотношения называются *интегралом Дюамеля*.

### Частотный метод анализа переходных процессов

Если  $f(t)$  — периодическая функция с периодом  $T$ , удовлетворяющая условию Дирихле (т.е. может быть представлена в виде конечного числа интервалов, на которых функция монотонна и непрерывна,

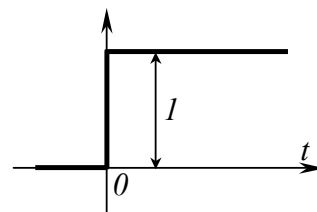


Рис. 3.15.

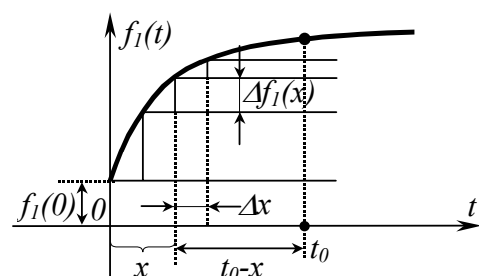


Рис. 3.16.

а между интервалами имеет разрывы 1-го рода), то она может быть представлена в виде суммы тригонометрического ряда (ряда Фурье):

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k \omega_1 t + \varphi_k), \text{ где } \omega_1 = \frac{2\pi}{T},$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cdot \cos(k \omega_1 t) + C_k \cdot \sin(k \omega_1 t)],$$

$$\text{где } A_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) dx; \quad B_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(k \omega_1 x) dx; \quad C_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(k \omega_1 x) dx$$

$$A_k = \sqrt{B_k^2 + C_k^2}; \quad \varphi_k = -\operatorname{arctg}\left(\frac{C_k}{B_k}\right)$$

Используя известные равенства (формулы Эйлера)  $\begin{cases} \cos z = \frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} \\ \sin z = \frac{e^{jz} - e^{-jz}}{2j} \end{cases}$  можно получить:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k \cdot e^{jk\omega_1 t} \text{ - ряд Фурье в комплексной форме,}$$

где комплексные коэффициенты  $D_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot e^{-jk\omega_1 x} dx, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

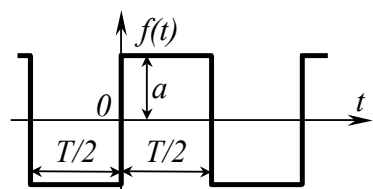


Рис. 3.17.

Рассмотрим пример:

$$f(t) = \begin{cases} -a, & t < 0 \\ a, & t > 0 \end{cases} \Rightarrow A_0 = 0$$

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cdot \cos(k \omega_1 t) + C_k \cdot \sin(k \omega_1 t)] =$$

$$B_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(k \omega_1 x) dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 -a \cdot \cos(k \omega_1 x) dx + \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} a \cdot \cos(k \omega_1 x) dx =$$

$$= \frac{-2a}{T} \cdot \frac{\sin(k \omega_1 x)}{k \omega_1} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{2a}{T} \cdot \frac{\sin(k \omega_1 x)}{k \omega_1} \Big|_0^{+\frac{T}{2}} = \frac{a}{k \pi} \cdot \sin\left(-\frac{k \cdot 2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) + \frac{a}{k \pi} \cdot \sin\left(\frac{k \cdot 2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = 0$$

$$C_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(k \omega_1 x) dx = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 -a \cdot \sin(k \omega_1 x) dx + \frac{2}{T} \int_0^{+\frac{T}{2}} a \cdot \sin(k \omega_1 x) dx =$$

$$= \frac{2a}{T} \frac{\cos\left(kx \frac{2\pi}{T}\right)}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{2a}{T} \frac{\sin\left(kx \frac{2\pi}{T}\right)}{k \cdot \frac{2\pi}{T}} \Big|_0^{+\frac{T}{2}} = \frac{a}{\pi k} \cos\left(kx \frac{2\pi}{T}\right) \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 - \frac{a}{\pi k} \cos\left(kx \frac{2\pi}{T}\right) \Big|_0^{+\frac{T}{2}}$$

Пусть  $k$  - четное, т.е.  $k = 2m$ .

$$C_k = \frac{a}{\pi \cdot 2m} \cdot \left( 1 - \cos\left(-\frac{2\pi \cdot 2m}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) \right) - \frac{a}{\pi \cdot 2m} \cdot \left( \cos\left(\frac{2\pi \cdot 2m}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) - 1 \right) = 0,$$

$k$  – нечетное, т.е.  $k = 2m+1$ .

$$C_k = \frac{a}{\pi \cdot k} \cdot (1 - \cos(-\pi \cdot (2m+1))) - \frac{a}{\pi \cdot k} \cdot (\cos(\pi \cdot (2m+1)) - 1) = \frac{4a}{\pi \cdot k}$$

Таким образом,

$$f(t) = \sum_k \frac{4a}{\pi k} \cdot \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t\right), \text{ где } k=1, 3, 5, \dots \text{ или}$$

$$f(t) = \frac{4a}{\pi} \cdot \left( \sin \omega t + \frac{1}{3} \cdot \sin 3\omega t + \frac{1}{5} \cdot \sin 5\omega t + \dots \right), \quad \sin(k\omega_1 t) = \cos(k\omega_1 t - 90^\circ)$$

$$f(t) = \sum_{k=2m+1}^{\infty} A_k \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - 90^\circ\right) = \sum_{k=2m+1}^{\infty} \frac{4a}{\pi k} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t - 90^\circ\right)$$

Итак, спектр амплитуд и фаз двуполярного меандра представлен на рис. 3.18.

Если  $f(x)$  — чётная, то разложение в ряд Фурье содержит только косинусные составляющие, если — нечетная, то синусные.

Пусть сигнал сдвинут во времени (запаздывает) на  $t_0$ .

$$f(t-t_0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos[k\omega_1(t-t_0) + \varphi_k] = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos[k\omega_1 t + \varphi_k - k\omega_1 t_0]$$

Если сигнал сдвинут, то необходимо лишь сдвинуть начальные фазы гармоник на угол  $k\omega_1 t_0$ .

Таким образом периодический сигнал можно описать амплитудами ( $A_0, A_1, A_2 \dots$ ) и фазами ( $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2 \dots$ ) гармоник, т.е. совокупностью частотных параметров. Закон распределения амплитуд и фаз называют *спектром амплитуд и фаз*.

Для периодической функции получаем дискретный (линейчатый) спектр амплитуд и фаз (см. рис. 3.18).

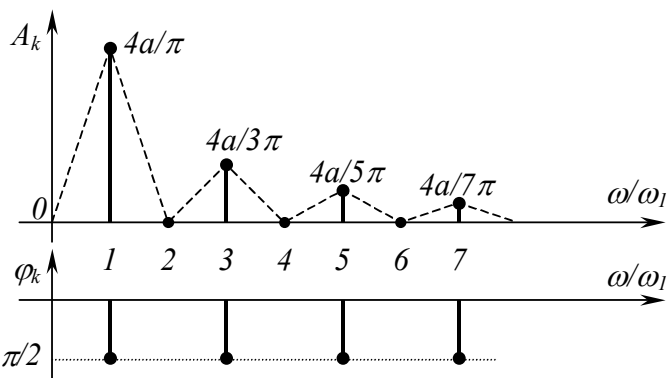


Рис. 3.18.

Часто используемым в электронных устройствах сигналом является пилообразное напряжение (рис. 3.19). Его разложение в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \sin(k\omega_1 t)$$

Очень часто возникает вопрос об энергии, выделяемой негармоническим периодическим сигналом в активном сопротивлении. Предположим, что  $R=1$ , и к нему приложено напряжение  $u(t) = f(t)$ . Мгновенная мощность:

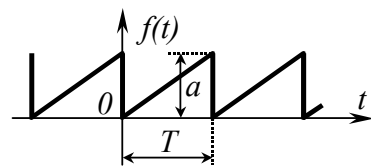


Рис. 3.19.

$$p(t) = \frac{f(t)^2}{1} = \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \right]^2$$

Мощность средняя за период:

$$P = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t)^2 dt$$

Т.к. интегрирование ведется в пределах периода и частоты всех гармоник кратны частоте сигнала (на периоде исходного сигнала укладывается целое число периодов гармоник), то несложно получить, что

$$P = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2}$$

Таким образом каждая гармоника выделяет в активном сопротивлении энергию, пропорциональную квадрату её амплитуды. Данное соотношение носит название *равенства Парсеваля*.

Так как энергия сигнала конечна, то несложно показать, что независимо от формы сигнала, если ряд Фурье существует, то амплитуда гармоники падает с ростом номера гармоники.

### Дискретное преобразование Фурье

В ряде современных задач электроники возникает необходимость восстановить функцию по её дискретным отсчетам. Это диктуется прежде всего задачами цифровой обработки информации. Предположим имеется непрерывная функция времени  $f_1(t)$ , которую с помощью технических устройств можно измерять лишь в дискретные моменты времени. Это обеспечивается измерительным устройством типа АЦП (рис. 3.20).

Таким образом на выходе системы мы имеем таблицу отсчетов:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$F(t_i)$	0	3	5	6	3	4	3	0	-3	-5	-6	-3	-4	-3

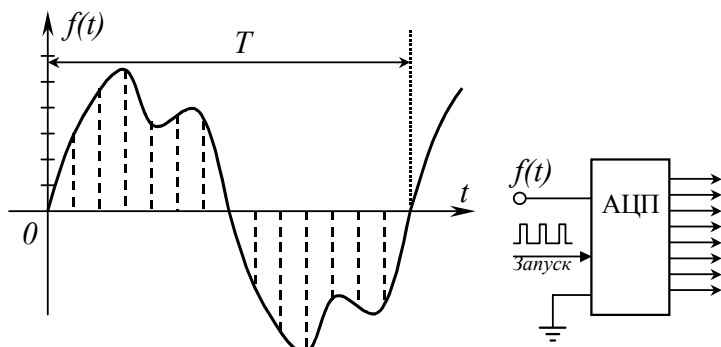


Рис. 3.20.

печатающее устройство, цифровой фильтрации, фильтрации высокочастотных шумов и других преобразований, осуществляемых в частотной области).

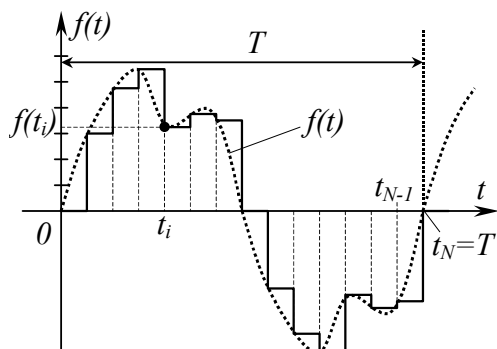


Рис. 3.21.

Сразу же необходимо отметить, что при этом неизбежно происходит потеря информации о поведении функции между отсчетами! Поэтому разложение можно использовать лишь в случаях, когда Вы уверены в том, что частота дискретизации достаточна для улавливания всех скоростных процессов в изменении функции (см. Теорему Котельникова-Найквиста в курсе ЭПУ).

Простейшим подходом к разложению в этом случае является замена функции  $f(t)$  её ступенчатой аппроксимацией (см. рис. 3.21).

Как известно, коэффициенты разложения определяются

по формулам:

$$B_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot \cos(k \omega_1 x) dx \quad C_k = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(x) \cdot \sin(k \omega_1 x) dx .$$

Будем вычислять функцию  $f(x)$ , а также  $\sin(k \omega_1 x)$  и  $\cos(k \omega_1 x)$  в подынтегральном выражении, через их дискретные отсчеты в моменты времени  $t_i$  —  $f(t_i)$  (т.е. используем ступенчатые аппроксимации для обеих функций в подынтегральном выражении). Пусть на периоде  $T$  имеется  $N+1$  отсчетов непрерывной функции. Тогда  $\Delta t = T/N$ ;  $i=0 \dots (N-1)$ ;  $t_0=0$ ;  $t_i = \Delta t \cdot i$ . Тогда после несложных преобразований формулы для коэффициентов  $B_k$ ,  $C_k$  приобретают вид:

$$k \omega_1 x_i = k \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T i}{N} = k \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot i = \frac{2\pi i}{N} \cdot k ; \quad \frac{2}{T} \cdot dx = \frac{2}{T} \cdot \Delta x = \frac{2}{N \Delta t} \cdot \Delta t = \frac{2}{N}$$

$$B_k = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \cdot \cos\left(\frac{2\pi i}{N} \cdot k\right) \quad C_k = \frac{2}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \cdot \sin\left(\frac{2\pi i}{N} \cdot k\right)$$

Естественно, что ступенчатая аппроксимация имеет большую погрешность, поэтому для коэффициентов ряда Фурье погрешность возрастает. Более точным является случай, когда на каждом интервале  $\Delta t$  осуществляется аналитическое интегрирование функций  $\cos(k\omega_1 x)$  и  $\sin(k\omega_1 x)$ , а ступенчатая аппроксимация функции сдвигается на полшага по оси времени (рис. 3.22), тем самым более точно аппроксимируя функцию. При этом коэффициенты разложения вычисляются следующим образом:

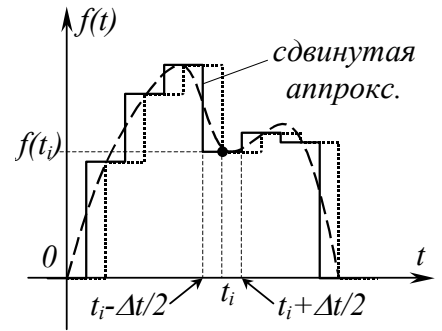


Рис. 3.22.

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{2}{T} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \int_{t_i - \frac{\Delta t}{2}}^{t_i + \frac{\Delta t}{2}} f(t_i) \cos(k\omega_1 x) dx = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \cdot \int_{t_i - \frac{\Delta t}{2}}^{t_i + \frac{\Delta t}{2}} \cos(k\omega_1 x) dx = \frac{2}{T} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} \left[ f(t_i) \cdot \frac{\sin(k\omega_1 x)}{k\omega_1} \Big|_{t_i - \frac{\Delta t}{2}}^{t_i + \frac{\Delta t}{2}} \right] = \\ &= \frac{2}{N\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{\Delta t N} \omega_1\right)}{k \cdot \frac{2\pi}{\Delta t N}} \Big|_{t_i - \frac{\Delta t}{2}}^{t_i + \frac{\Delta t}{2}} = \frac{1}{k\pi} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \left[ \sin\left(\frac{2\pi k i}{N} + \frac{\pi k}{N}\right) - \sin\left(\frac{2\pi k i}{N} - \frac{\pi k}{N}\right) \right] = \\ &= \frac{1}{k\pi} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \cdot 2 \cdot \cos\left[\frac{2\pi k i}{N}\right] \cdot \sin\left[\frac{\pi k}{N}\right] = \frac{2 \cdot \sin \frac{\pi k}{N}}{\pi k} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \cdot \cos\left[\frac{2\pi k i}{N}\right] \\ \boxed{B_k = \frac{2}{N} \cdot \frac{\sin \frac{\pi k}{N}}{\frac{\pi k}{N}} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \cdot \cos\left[\frac{2\pi i}{N} \cdot k\right]}, \text{ аналогично } \boxed{C_k = \frac{2}{N} \cdot \frac{\sin \frac{\pi k}{N}}{\frac{\pi k}{N}} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i) \cdot \sin\left[\frac{2\pi i}{N} \cdot k\right]} \end{aligned}$$

Для дальнейшего увеличения точности можно заменить  $f(t)$  не ступенькой, а кусочно-линейной аппроксимацией.

Таким образом для ДПФ необходимо выполнить пропорциональное  $\sim N^2$  операций умножения. Если число отсчетов, и, следовательно, гармоник увеличивается, увеличивается пропорционально  $N^2$  и число операций умножения. Например, если  $N_1=8$ ,  $N_2=32$ , то время расчета возрастает в 16 раз!

Для устранения этого недостатка существует группа методов, получивших название *быстрого преобразования Фурье* (БПФ).

### Интеграл Фурье

Как известно разложение периодической функции, удовлетворяющей условиям Дирихле, в ряд Фурье имеет вид:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [B_k \cdot \cos(k\omega_1 t) + C_k \cdot \sin(k\omega_1 t)]$$

где  $k \cdot \omega_1 = \omega_k = k \cdot 2\pi T$  принимает дискретные значения  $\omega_1=2\pi T$ ;  $\omega_2=2 \cdot 2\pi T$ ... и т.д., а коэффициенты ряда вычисляются по формулам:

$$A_0 = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) dx; \quad B_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(k\omega_1 x) dx; \quad C_k = \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(k\omega_1 x) dx$$

Интервал между круговыми частотами соседних гармоник:

$$\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = [k+1 - k] \cdot \frac{2\pi}{T}; \quad \frac{2}{T} = \frac{\Delta\omega}{\pi}$$

Подставляя в формулу ряда Фурье значения коэффициентов  $A_0, B_k, C_k$ :

$$f(t) = \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[ \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(k\omega_1 x) dx \right] \cdot \cos(k\omega_1 t) + \left[ \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(k\omega_1 x) dx \right] \cdot \sin(k\omega_1 t) \right\}$$

Т.к.  $t$  не зависит от  $x$ , то его можно внести под знак интеграла:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(k\omega_1 x) \cdot \cos(k\omega_1 t) dx + \frac{2}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \sin(k\omega_1 x) \cdot \sin(k\omega_1 t) dx \right\} = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot [\cos(k\omega_1 x) \cdot \cos(k\omega_1 t) + \sin(k\omega_1 x) \cdot \sin(k\omega_1 t)] \cdot dx = \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) dx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) \cdot \cos(k\omega_1(t-x)) \cdot dx \end{aligned}$$

Устремляя  $T$  к бесконечности, заключаем, что если функция  $f(x)$  абсолютно интегрируема в бесконечных пределах (т.е. если конечен интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ ), то конечное значение имеет также интеграл

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(k\omega_1(t-x)) dx$  при любых  $\omega_k = k \cdot \omega_1$  и  $t$ . При этом же условии:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(x) dx \right) = 0$$

При  $T \rightarrow \infty$   $\Delta\omega \rightarrow 0$  ( $\Delta\omega \rightarrow d\omega$ ), суммирование заменяется на интегрирование в пределах от 0 до  $+\infty$ . Таким образом, выражение для  $f(t)$  преобразуется к следующему виду:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\omega \cdot (t-x)) dx \quad (1)$$

Т.к.  $T \rightarrow \infty$ , функция  $f(t)$ , заданная на промежутке  $-\infty \leq t \leq +\infty$  является уже непериодической функцией. Поэтому можно утверждать, что формула (1) представляет собой сумму бесконечно большого числа гармонических функций с непрерывно изменяющимися частотами  $\omega$  и бесконечно малыми амплитудами. Таким образом, непериодическая функция характеризуется непрерывным спектром частот, в то время как периодическая функция — дискретным. Выражение (1) носит название *интеграла Фурье в тригонометрической форме*.

В силу четности функции  $\cos(\omega(t-x))$  относительно  $\omega$  можно записать:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \cos(\omega \cdot (t-x)) dx \quad (2)$$

Рассмотрим теперь функцию  $\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \sin(\omega \cdot (t-x)) dx = 0$ . (3)

Т.к. функция  $\sin(\omega(t-x))$  нечетна относительно  $\omega$ , то данный интеграл равен 0. Умножим теперь равенство (3) на  $j$  и сложим его с (2). Учтем при этом, что

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$$

После данных несложных преобразований получаем *интеграл Фурье в комплексной форме* (4):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{j\omega(t-x)} dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{-j\omega x} dx \quad (4)$$

Если теперь рассмотреть внутренний интеграл как функцию от  $\omega - F(j\omega)$

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (5)$$

то

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (6)$$

Если  $f(t)$  задана на промежутке от 0 до  $+\infty$ , а на промежутке от  $-\infty$  до 0 равна нулю, то можно записать

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = F(\omega) \cdot e^{j\Theta(\omega)} \quad (7)$$

Равенство (7) — это *одностороннее прямое преобразование Фурье*. Комплексная функция частоты  $F(j\omega)$  дает закон изменения комплексной амплитуды гармоник в зависимости от частоты  $\omega$  и называется *спектральной плотностью* (спектральной или амплитудно-фазовой характеристикой, годографом) или, короче, спектром заданной функции  $f(t)$ .  $F(\omega)$  - амплитудно-частотная характеристика (четная функция частоты);  $\Theta(\omega)$  - фазочастотная характеристика (нечетная функция частоты).  $F(\omega)$  также называют спектральной плотностью амплитуд или спектральной характеристикой непериодического сигнала;  $\Theta(\omega)$  — спектром фаз или фазовой характеристикой непериодического сигнала.

Равенство (6) представляет собой *обратное преобразование Фурье*.

Таким образом  $F(j\omega)$  по модулю и фазе характеризует гармонику частоты  $\omega$ , а выражение  $(1/2\pi) \cdot F(j\omega) \cdot \exp(j\omega t)$  представляет собой гармонику с частотой  $\omega$  функции  $f(t)$ . Эта гармоника выражена в комплексной форме, имеет бесконечно малую амплитуду и называется элементарной.

Сравнивая формулы прямого и обратного преобразования Лапласа

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt \quad f(t) = L^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

с формулами прямого и обратного преобразования Фурье, заключаем, что преобразование Фурье является частным случаем преобразования Лапласа, получается из него при  $p = j\omega$  и применимо для более узкого класса функций  $f(t)$ . Следовательно частотный спектр  $F(j\omega)$  функции  $f(t)$  получается из её Лапласова изображения  $F(p)$  по формуле:

$$F(j\omega) = F(p) \Big|_{p=j\omega}$$

Таким образом, имеется аналогия в преобразованиях Лапласа и Фурье, в частности и то, и другое можно использовать при расчете переходных процессов.

Рассмотрим спектр некоторых наиболее часто встречающихся сигналов. Для иллюстрации найдем спектр видеоимпульса - одиночного прямоугольного импульса, имеющего длительность  $t_u$  (рис. 3.23).

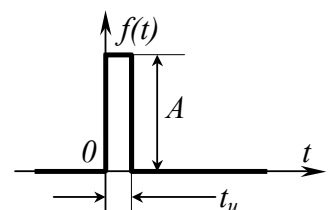


Рис. 3.23.



$$f(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq t_u \\ 0, & t > t_u \end{cases}$$

$$F(j\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{t_u} A \cdot e^{-j\omega t} dt = -\frac{A}{j\omega} \cdot e^{-j\omega t} \Big|_0^{t_u} = \frac{A}{j\omega} \cdot (1 - e^{-j\omega t_u}) =$$

$$= \frac{2A}{j\omega} \cdot e^{-\frac{j\omega t_u}{2}} \cdot \frac{e^{\frac{j\omega t_u}{2}} - e^{-\frac{j\omega t_u}{2}}}{2} = \frac{2A}{j\omega} \cdot e^{-\frac{j\omega t_u}{2}} \cdot j \cdot \sin\left(\frac{\omega t_u}{2}\right) = 2A \cdot e^{-\frac{j\omega t_u}{2}} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega t_u}{2}\right)}{\omega}$$

$$\text{Итак: } F(j\omega) = 2A \cdot \frac{\sin\left(\frac{\omega t_u}{2}\right)}{\omega} \cdot e^{-\frac{j\omega t_u}{2}} \Rightarrow |F(j\omega)| = 2A \cdot \frac{\left|\sin\left(\frac{\omega t_u}{2}\right)\right|}{\omega}$$

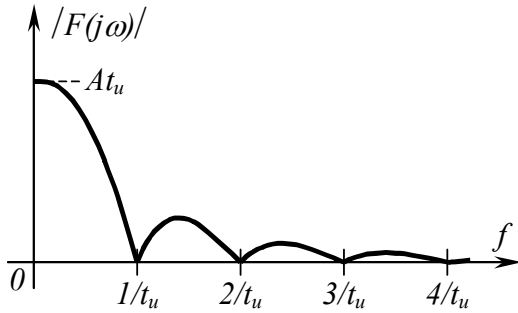


Рис. 3.24.

Найдем точки, в которых спектральная плотность амплитуд принимает нулевые значения:

$$\frac{\omega t_u}{2} = k\pi \Rightarrow \frac{2\pi \cdot f \cdot t_u}{2} = k\pi \Rightarrow f = \frac{k}{t_u}$$

Таким образом спектральная плотность видеоимпульса имеет нули на частотах  $k/t_u$ . График спектральной плотности амплитуд одиночного видеоимпульса представлен на рис. 3.24.

Рассмотрим импульсную функцию. Спектр импульсной функции  $S_u \cdot \delta(t)$  определяется через интеграл:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} S_u \cdot \delta(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = S_u \cdot \int_0^{\infty} \delta(t) \cdot 1 \cdot dt = S_u$$

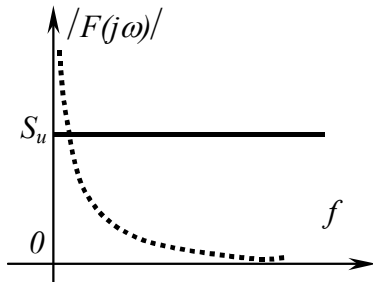


Рис. 3.25.

График спектральной плотности амплитуд импульсной функции представлен на рис. 3.25 сплошной линией. Рассмотрим ступенчатую функцию  $1(t)$ . Ее спектр определяется через интеграл:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} 1(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega t}}{j\omega} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega}$$

Спектральная плотность амплитуд ступенчатой функции (единичного скачка) представлена на рис. 3.25. пунктирной линией.

### Анализ переходных процессов в нелинейных схемах.

Нелинейная схема содержит хотя бы один нелинейный элемент.

При анализе переходных процессов в нелинейных схемах нельзя использовать принцип наложения, который предоставляет возможность рассчитывать процессы в виде суперпозиции сигналов от разных источников. Таким образом, становится невозможным рассчитывать переходные процессы с помощью интегралов Дюамеля, наложения, классическим и операторным методом анализа переходных процессов.

При расчете переходных процессов удастся воспользоваться лишь законами Кирхгофа, при этом вольтамперные характеристики нелинейных элементов могут быть заданы либо в графической, либо в табличной форме, или описаны аналитическим выражением. При этом предполагается, что нелинейный элемент является безынерционным, или его можно представить безынерционным нелинейным звеном совместно с инерционной линейной частью.

Методы анализа переходных процессов в нелинейных схемах классифицируются:

- по способу решения нелинейных дифференциальных уравнений на графоаналитические и численные;
- по характеру величины, для которой производится расчет – на методы для мгновенных значений, методы для огибающих первых гармоник, методы для медленно меняющихся амплитуд.

Дифференциальные уравнения для нелинейных схем составляются по законам Кирхгофа. Пред-

ставляется удобным составлять дифференциальные уравнения для каждого реактивного элемента – индуктивности или емкости в следующем виде:

$$i_C = C \frac{du_C}{dt}; \quad u_L = L \frac{di_L}{dt},$$

если они линейны, и в виде:

$$i_C = \frac{dQ}{dt}; \quad u_L = \frac{d\Psi}{dt},$$

если последние нелинейны.

При этом система дифференциальных уравнений для схемы  $n$ -ого порядка преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \frac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dy_n}{dt} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n, t) \end{cases},$$

где в левой части вынесены производные функций, а в правой – выражения для функций через параметры схемы, частично нелинейные, и сами функции, т.е. токи и напряжения.

Нахождение переходного процесса есть решение задачи Коши, которая формулируется следующим образом: требуется найти решение системы  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка на заданном интервале времени  $(t_0 \dots t_k)$ , если известны значения всех переменных в одной точке, как правило, это точка — начало интервала интегрирования. Значения функций в начале интервала определяются, как несложно догадаться, из независимых начальных условий.

Основные виды нелинейностей, характерных для электронной техники, были рассмотрены в разделе 1 настоящего конспекта, касающегося моделей компонентов электронных схем. Численные методы решения систем линейных и нелинейных дифференциальных уравнений рассматривались в соответствующем разделе курса математическое моделирование. Графоаналитические методы при современном уровне развития пакетов программ схемотехнического анализа не являются актуальными.

Нас будут интересовать лишь методы, позволяющие в той или иной степени облегчить решение системы нелинейных дифференциальных уравнений, а именно:

- либо упростить алгоритм решения, сведя задачу на каждом шаге к анализу по постоянному току, что позволяет использовать ранее рассмотренный математический аппарат матричных методов;
- либо пренебречь при анализе быстрыми процессами (с малыми постоянными времени), происходящими при коммутации ключевых элементов, и выявлять лишь динамику постоянной составляющей интересующей переменной состояния, усредняя значения производных переменных состояния за интервалы проводимости ключевого элемента (при этом неизбежна потеря информации о поведении переменной состояния внутри каждого интервала коммутации). Такой метод (усреднения в пространстве состояний) применяется для анализа схем с периодической коммутацией, значительную часть которых составляют схемы импульсных преобразователей и регуляторов напряжения, являющихся устройствами промышленной электроники. Он позволяет в десятки раз сократить время расчета переходного процесса, ценой потери незначительной для анализа динамики данного класса устройств информации (поведения переменных состояния внутри периода коммутации).

### **Сведение расчета переходных процессов в электронных цепях к расчету цепей по постоянному току.**

Расчет переходных процессов в электронных цепях в общем случае представляет собой следующий алгоритм:

1. Составление по законам Кирхгофа дифференциальных уравнений (уравнений состояния).
2. Решение дифференциальных уравнений численными методами возможно с аппроксимацией на каждом шаге нелинейных характеристик или составление разностных схем.

Прямая реализация указанного алгоритма «в лоб» связана со значительными трудностями. При высоком порядке электронной цепи решение дифференциального уравнения классическим методом затруднительно. Использование численных методов более предпочтительно, т.к. позволяет формализовать 2-ю часть задачи. Однако 1-ая часть — составление системы дифференциальных уравнений осуществляется по-прежнему, вручную. Формализация алгоритмов составления уравнений состояния для многополюсных элементов со сложной логикой функционирования — задача в общем виде не решаемая. Кроме того, для создания универсальных программ расчета электронных схем нежелательно иметь принципиально различающиеся алгоритмы, скажем для расчета переходных процессов, анализа по постоянному току и расчета частотных характеристик.

Существует, однако, другой подход к решению задачи расчета переходных процессов, который основан на замене задачи расчета переходных процессов на решение последовательно ряда задач по расчету по постоянному току чисто резистивных электрических цепей, причем неизменной структуры. При этом последовательность действий следующая:

а) аппроксимация дифференциальных уравнений отдельных элементов цепей разностными уравнениями, которым можно поставить в соответствие резистивные схемы замещения!

б) Формирование на каждом шаге расчета алгебраических уравнений, соответствующих резистивным цепям.

в) Последовательное решение указанных алгебраических уравнений методами расчета резистивных цепей по постоянному току (узловых потенциалов, обобщенных ветвей, гибридного анализа и т.п.).

Очевидно, что из всего базового набора компонентов моделей проблему представляют реактивные компоненты.

Рассмотрим катушку индуктивности  $L$ .

$$L \frac{di}{dt} = u; \quad \text{или} \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} \cdot u;$$

Подобное дифференциальное уравнение численным методом может быть решено по-разному. Например, обычным методом Эйлера, следующим образом:

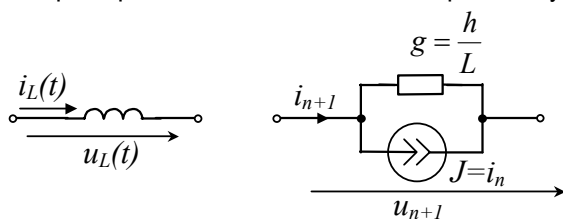


Рис. 3.26.

$$i_{n+1} = i_n + h \cdot \frac{1}{L} \cdot u_n.$$

Как известно из предыдущих курсов, итерационная формула неявного метода Эйлера имеет вид:

$$i_{n+1} = i_n + \frac{h}{L} \cdot u_{n+1} \quad (8)$$

Очевидно, для нахождения новой точки  $i_{n+1}$  (соответствующей времени  $t_{n+1} = t_n + h$ ), необходимо решить соответствующее алгебраическое уравнение, при этом предполагают, что ток  $i_n$  известен. Но, в соответствии с формулой (8), указанное уравнение соответствует новой структуре ветви  $L$ , в которой приращение тока заменяют дополнительным током  $(h/L) \cdot u_{n+1}$ , т.е. током через эквивалентную проводимость  $g = h/L$ , подключенной к узлу схемы вместо индуктивности. Т.о. ветвь с индуктивностью преобразуется к виду рис. 3.26.

Очевидно, что если в схеме имеется несколько подобных компонентов, то структура цепи не изменится, изменяются лишь параметры проводимости, величины которых, в частности, зависят и от  $h$ !

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C$$

В соответствии с неявным методом Эйлера, для нахождения  $u_{n+1}$  необходимо решить уравнение вида:

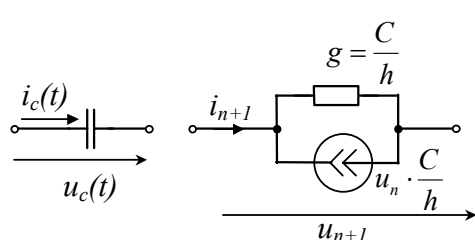


Рис. 3.27.

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{C} \cdot i_{n+1}$$

или, что то же самое:

$$i_{n+1} = -\frac{C}{h} \cdot u_n + u_{n+1} \cdot \frac{C}{h}$$

Т.е. вместо емкости можно использовать ветвь вида рис. 3.27.

Таким образом, для расчета очередного шага переходного процесса необходимо рассчитать эквивалентную резистивную схему с прежней топологической структурой.

### ПРИМЕР

Требуется рассчитать схему с входным воздействием вида  $g, J(t)$  (рис. 3.28). Разумеется, можно воздействие преобразовать к виду  $R, E(t)$ , при этом переход к нему обычен.

Очевидно, что переход к дискретной резистивной схеме замещения имеет вид рис. 3.29, где

$$J_{Ln+1} = i_{Ln}; \quad g_{Ln+1} = \frac{h_{n+1}}{L};$$

$$J_{Cn+1} = \frac{C}{h_{n+1}} \cdot u_{Cn}; \quad g_{Cn+1} = \frac{C}{h_{n+1}}; \quad J_{n+1} = J(t_{n+1})$$

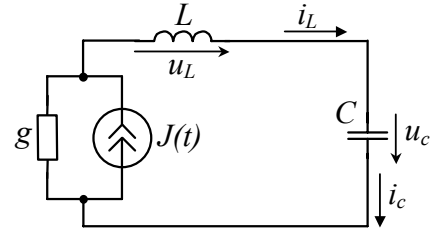


Рис. 3.28.

Рассчитаем схему с двумя узлами методом узловых потенциалов, тогда:

$$Y^{n+1} = \begin{vmatrix} g + g_{Ln+1} & -g_{Ln+1} \\ -g_{Ln+1} & g_{Ln+1} + g_{Cn+1} \end{vmatrix}; \quad J^{n+1} = \begin{vmatrix} J_{n+1} - J_{Ln+1} \\ J_{Cn+1} + J_{Ln+1} \end{vmatrix}$$

Тогда, очевидно:

$$|Y^{n+1}| \cdot |U^{n+1}| = |J^{n+1}| \Rightarrow |U^{n+1}| = \begin{vmatrix} u_{1(n+1)} \\ u_{2(n+1)} \end{vmatrix} = [Y^{n+1}]^{-1} \cdot J^{n+1}$$

Решая последнее уравнение, можно найти узловые напряжения  $u_{1n+1}, u_{2n+1}$ , а по ним токи всех элементов и напряжения на них:

$$i_{Ln+1} = i_{Ln} + (u_{1n+1} - u_{2n+1}) \cdot g_{Ln+1}$$

$$u_{Cn+1} = u_{2n+1}$$

Таким образом для построения следующего  $(n+2)$ -го шага известны все компоненты:  $i_{Ln+1}, u_{Cn+1}, J_{n+2} = J(t_{n+2})$ .

Особое достоинство имеет метод в случае, если расчет схемы ведется с постоянным шагом  $h$ . Тогда, в случае, разумеется, линейной схемы, элементы матрицы  $Y$  не меняются от шага к шагу и матрицу не требуется каждый раз перевычислять и обращать!

Мы рассмотрели вариант преобразования схем с реактивными цепями в резистивные дискретные схемы на основе итерационной формулы метода Эйлера.

Рассмотрим метод Рунге-Кутты второго порядка (модифицированный метод Эйлера):

$$L \cdot \frac{di_L}{dt} = u_L; \quad \frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} \cdot u_L;$$

$$i_{Ln+1} = i_{Ln} + \frac{h}{2} \cdot \frac{1}{L} \cdot (u_{Ln+1} + u_{Ln}) \Rightarrow i_{Ln+1} = \left[ i_{Ln} + \frac{h}{2L} \cdot u_{Ln} \right] + \frac{h}{2L} \cdot u_{Ln+1}$$

Согласно этому методу, эквивалентная схема замещения индуктивности имеет вид рис. 3.30, где

$$g_{Ln+1} = \frac{h}{2L}$$

$$J_{Ln+1} = i_{Ln} + \frac{h}{2L} \cdot u_{Ln}$$

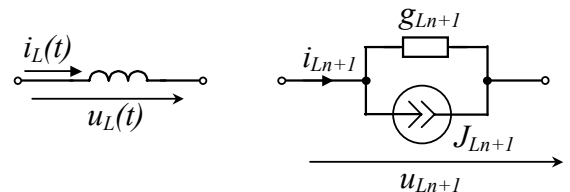


Рис. 3.30.

Конденсатор описывается дифференциальными уравнениями вида:

$$C \frac{du_C}{dt} = i_C \quad \text{или} \quad \frac{du_C}{dt} = \frac{1}{C} \cdot i_C \quad u_{Cn+1} = u_{Cn} + \frac{h}{2C} \cdot [i_{Cn+1} + i_{Cn}] \Rightarrow$$

$$i_{Cn+1} = -i_{Cn} - \frac{2C}{h} \cdot u_{Cn} + \frac{2C}{h} \cdot u_{Cn+1} = -\left( i_{Cn} + \frac{2C}{h} \cdot u_{Cn} \right) + \frac{2C}{h} \cdot u_{Cn+1},$$

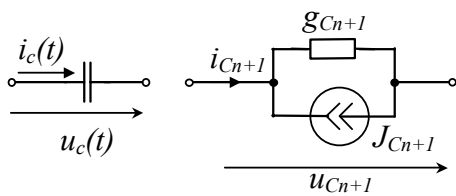


Рис. 3.31.

т. е. схема замещения имеет вид рис. 3.31, где

$$g_{C_{n+1}} = \frac{2C}{h}; \quad J_{C_{n+1}} = i_{C_n} + \frac{2C}{h} \cdot u_{C_n}$$

Таким образом, опять таки можно представить расчет переходного процесса с помощью анализа дискретной резистивной схемы!

Важным обстоятельством приведенных преобразований является то, что в соответствующие эквивалентные схемы замещения входят элементы, величины которых определяются не только номиналами элементов схем, но и параметром расчета ( $h$ ). Более того, переход стал возможен только благодаря совместному использованию уравнений электрической цепи и метода расчета! Поэтому такие схемы замещения называются *синтетическими*.

Таким образом, весь аппарат и программное обеспечение, способные автоматически строить матрицу проводимости схемы, могут быть использованы для расчета переходных процессов с небольшими изменениями.

Метод дает к тому же преимущество, которое выгодно отличает его от метода переменных состояния: возможность моделирования нелинейных элементов схем. Во-первых, при наличии нелинейных элементов можно корректировать матрицу проводимости. Во-вторых, метод синтетических схем позволяет для нелинейных цепей выбрать переменные, обеспечивающие однозначное решение. Непосредственное использование метода переменных состояния в электрических цепях, где резистивные элементы обладают нелинейными свойствами, может привести к неоднозначности решения, т.к. переменные состояния (токи через индуктивные элементы и напряжения на емкостных) не могут быть выбраны из условия обеспечения однозначности решений задачи.

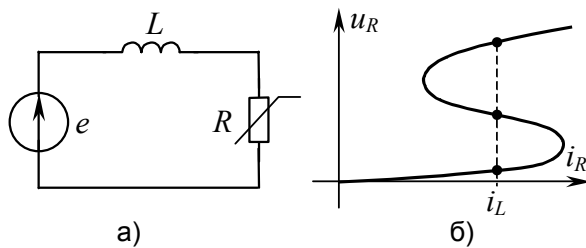


Рис. 3.32.

Например, для цепи рис. 3.32, а, выбор в качестве искомой переменной тока через индуктивный элемент приведет к неоднозначному решению задачи, т.к. при токе  $i_L$  напряжение на нелинейном резистивном элементе будет иметь три значения.

Таким образом, для нелинейных электрических цепей в определенных случаях невозможно составить уравнение состояния так, чтобы была обеспечена однозначность их решения. В случае же синтетических схем выбор искомой переменной не зависит от  $L$  или  $C$ . Искомыми могут быть и ток, и напряжение на нелинейном резистивном элементе. При подборе этих переменных можно руководствоваться правилами, разработанными для обеспечения однозначности решения систем нелинейных уравнений резистивных схем.

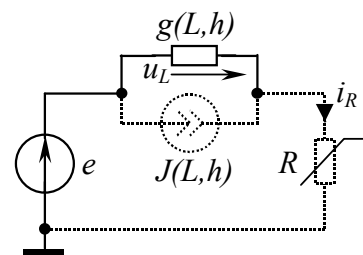


Рис. 3.33.

В синтетической схеме цепи, изображенной на рисунке 3.32, а, в качестве хорд выбирают ветвь с нелинейным резистивным элементом, ВАХ которого управляется напряжением (см. рис. 3.32, б). К ребрам дерева в этом случае относятся ветви с ЭДС и линейной проводимостью  $g(L, h)$  (рис. 3.33). Следовательно в качестве искомых переменных должны быть взяты напряжение  $u_L$  в синтетической схеме и ток  $i_R$  через нелинейный резистивный элемент.

Сложнее обстоит дело с описанием нелинейных элементов произвольного вида в матрице проводимости схемы. В этом случае унифицированное описание невозможно и поэтому для каждого элемента должна быть составлена своя последовательность вычисления его параметра в зависимости от определяющей переменной и вида характеристики элемента. Однако и при этом оказывается возможной единая последовательность вычисления вкладов в матрицы  $Y$  и  $J$  на разных итерациях решения нелинейной системы узловых уравнений. Например, уточнение проводимости для последующего шага можно провести следующим образом. Пусть нелинейная характеристика такова, что при заданном напряжении однозначно определяется ток, а следовательно и  $g_i$  ( $i$  - номер итерации). Тогда параметр  $\Delta g = g_i - g_{i-1}$  можно рассматривать как проводимость новой параллельной ветви, для которой применим принцип поэлементного вклада.

### Применение метода усреднения в пространстве состояний для анализа переходных процессов и устойчивости схем с периодической коммутацией

При разработке электронных устройств часто возникает задача анализа поведения схем с пере-

менной конфигурацией (или схем с периодической коммутацией). Такие схемы включают в себя один или несколько ключевых элементов (например, транзисторных ключей, диодов), которые периодически меняют свое состояние с включенного на выключенное. Самым распространенным примером таких

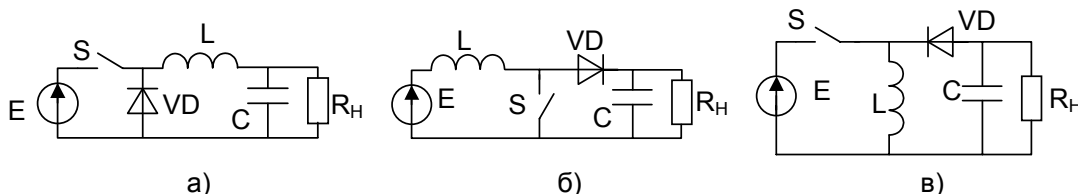


Рис. 3.34. Схемы регуляторов постоянного напряжения: а – понижающий; б – повышающий; в – инвертирующий

схем являются импульсные регуляторы постоянного напряжения, являющиеся составной частью импульсных источников вторичного электропитания. Рассмотрим структуры базовых регуляторов на рис. 3.34.

Здесь регулирование выходного напряжения  $U_H$  осуществляется изменением относительной длительности проводящего состояния ключа  $\gamma = t_{\text{з}}/T$  (или коэффициента заполнения). Как известно из курса «Энергетическая электроника», зависимости выходного напряжения от  $\gamma$  (регулирующие характеристики) определяются следующим образом:

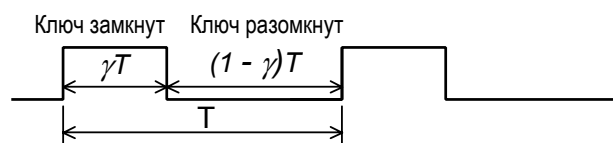


Рис. 3.35.

- Для понижающего — 
$$U_H = \gamma \cdot E \quad (9)$$

- Для повышающего — 
$$U_H = \frac{E}{1-\gamma} \quad (10)$$

- Для инвертирующего — 
$$U_H = \frac{E \cdot \gamma}{1-\gamma} \quad (11)$$

Анализ переходных процессов в таких схемах требует больших затрат машинного времени и производится методом припасовывания. Этот метод заключается в том, что последовательно решаются системы дифференциальных уравнений для всех конфигураций схемы в течение каждого периода. Таким образом, любой из периодов коммутации разбивается на интервалы времени, в течение которых существует каждая конфигурация. На краях интервалов решения для различных конфигураций стыкуются, исходя из законов коммутации (непрерывности напряжений на конденсаторах и токов в индуктивных компонентах). Так, например, для регулятора 3-го типа, 1-ая конфигурация определяется замкнутым состоянием ключа S, при этом второй (неуправляемый) ключ в схеме диод VD заперт приложенным к нему обратным напряжением (рис. 3.36, а). Вторая конфигурация определяется выключенным состоянием управляемого ключа S и проводящим состоянием диода VD (рис. 3.36, б). Отметим, что в режиме прерывистых токов дросселя возможна 3-я конфигурация, определяемая запертым состоянием как управляемого ключа S, так и диода VD.

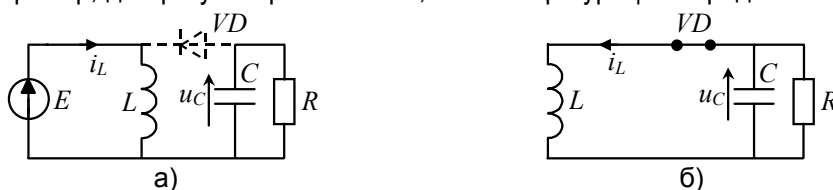


Рис. 3.36.

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = E \\ C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{R} \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} L \frac{di_L}{dt} = -u_C \\ C \frac{du_C}{dt} = i_L - \frac{u_C}{R} \end{cases} \quad (13)$$

Решение методом припасовывания на периоде коммутации с номером  $n$  сводится к следующему. На интервале времени  $n \cdot T \leq t \leq (n+\gamma) \cdot T$  (ключ S замкнут) решается система дифференциальных уравнений (12) с начальными условиями  $i_L(nT)$  и  $u_C(nT)$ , определяемыми в конечной точке предшествующего интервала (разомкнутого состояния ключа S). На интервале времени  $(n+\gamma)T \leq t \leq (n+1)T$  (ключ S разомкнут) решается система дифференциальных уравнений (13) с начальными условиями  $i_L[(n+\gamma)T]$  и

$u_C[(n+\gamma)T]$ , определяемыми значениями переменных состояния в конце предыдущего интервала. Далее подобный процесс повторяется.

Также для анализа переходных процессов в переключательных схемах может быть использован символический метод — аппарат дискретного преобразования Лапласа (или z-преобразования, как его называют в переводной литературе).

Однако для ряда переключательных схем расчет можно упростить, перейдя от последовательного решения систем для различных конфигураций схемы к решению одной усредненной системы дифференциальных уравнений. В такой системе производные переменных состояния (токов в индуктивностях и напряжений на емкостях) принимаются равными их усредненным за период коммутации значениям. При этом в качестве весовых коэффициентов при усреднении используются относительные длительности существования каждой конфигурации системы (для регуляторов в режиме непрерывного тока дросселя —  $\gamma, (1-\gamma)$ ). Такой метод в научной литературе получил название *метода усреднения в пространстве состояний* или сокращенно УПС (Р. Миддлбрук).

Такое упрощение допустимо лишь в том случае, если любая из постоянных времени схемы ( $RC, L/R, 2\pi \cdot \sqrt{LC}$ ) по крайней мере в несколько раз (лучше на порядок) превосходит период коммутации ключевых элементов. В этом случае изменение переменных состояния за период коммутации будет незначительным по сравнению с их средним значением. Кроме того, очевидно, что изменение переменных состояния будет определяться усредненными значениями их производных. Для схем регуляторов постоянного напряжения указанное условие применимости метода УПС обычно выполняется всегда. Величины реактивных компонентов регуляторов ( $L, C$ ) выбираются таким образом, чтобы пульсации напряжения на нагрузке составляли сотые доли его постоянной составляющей (среднего значения), при заданных входном и выходном напряжениях и токе нагрузки. При этом, естественно, постоянная времени  $LC$  фильтра превосходит период коммутации в десятки раз.

Рассмотрим применение метода УПС для анализа переходных процессов в обратном преобразователе рис. 3.37, а (на основе инвертирующего регулятора). Отметим, что обратным преобразователем (рис. 3.37, а) отличается от соответствующего регулятора (рис. 3.34, в) лишь гальванической развязкой входной и выходной цепей, выполняемой дросселем-трансформатором  $T_1$  ( $w_2/w_1=n$ ). В

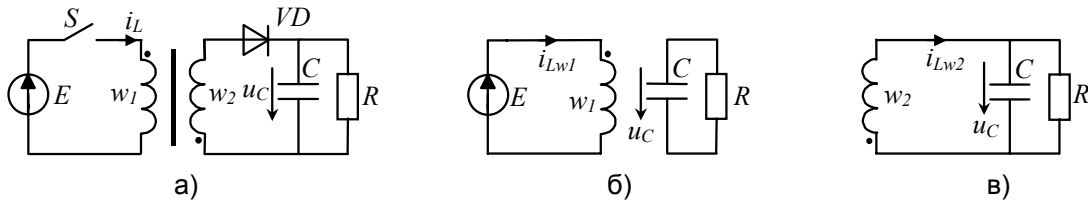


Рис. 3.37.

остальном работа обеих схем аналогична. При замкнутом состоянии силового ключа  $S$ , диод  $VD$  заперт обратным напряжением, равным сумме напряжения на нагрузке  $u_C$  и трансформированного напряжения первичного источника  $nE$ . В магнитном поле сердечника дросселя-трансформатора накапливается энергия из источника  $E$ . Конденсатор  $C$  разряжается на сопротивление нагрузки  $R$ , отдавая часть накопленной на предыдущем интервале энергии из дросселя. При разомкнутом состоянии силового ключа дроссель отдает накопленную энергию в нагрузку через выходной  $RC$ -фильтр и открытый диод  $VD$ . Затем описанные процессы повторяются при периодической коммутации ключа  $S$ . В результате на нагрузке после окончания переходного процесса формируется пульсирующее напряжение с постоянной составляющей  $\frac{nE\gamma}{1-\gamma}$ . Величины реактивных компонентов выбираются таким образом, чтобы пульса-

ции были незаметны на уровне постоянной составляющей (т.е. составляли доли процента от уровня среднего значения). Таким образом выполняется задача преобразования электрической энергии: из постоянного напряжения одного уровня получается постоянное напряжение другого уровня.

Для анализа динамики схемы методом УПС зададимся положительными направлениями тока в дросселе и напряжения на конденсаторе (см. рис. 37, а). Отметим, что поскольку индуктивность магнитосвязанная (со 100% -ной магнитной связью), то ток должен быть направлен одинаково относительно начала обмоток на разных интервалах проводимости ключевого элемента. Рассмотрим эквивалентные схемы преобразователя для различных интервалов проводимости ключевого элемента (см. рис. 3.37, б, в). Составим для каждой из них систему дифференциальных уравнений относительно переменных

состояния: напряжения на конденсаторе фильтра  $u_C$  и тока дросселя  $i_{Lw2}$ , приведенного к вторичной стороне. Итак, системы дифференциальных уравнений:

$$\text{для замкнутого состояния силового ключа (рис. 3.37, б)} \quad \begin{cases} L_{w2} \frac{di_{Lw2}}{dt} = nE \\ C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{R} \end{cases}; \quad (14)$$

$$\text{для разомкнутого состояния силового ключа (рис. 3.37, в)} \quad \begin{cases} L_{w2} \frac{di_{Lw2}}{dt} = -u_C \\ C \frac{du_C}{dt} = i_{w2} - \frac{u_C}{R} \end{cases}. \quad (15)$$

Перейдем к одной (усредненной за период коммутации ключа) системе дифференциальных уравнений. При этом учтем, что 1-ая конфигурация (рис. 3.37, б) существует в течение времени  $\gamma T$ , а вторая (рис. 3.37, в) –  $(1-\gamma)T$ . Итак, усредненная система дифференциальных уравнений и соответствующая ей электрическая схема с нелинейными зависимыми источниками (обозначены ромбом) (рис 3.38):

$$\begin{cases} L_{w2} \frac{di_{Lw2}}{dt} = nE \cdot \gamma - u_C \cdot (1-\gamma) \\ C \frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{R} + i_{Lw2} \cdot (1-\gamma) \end{cases} \quad (16)$$

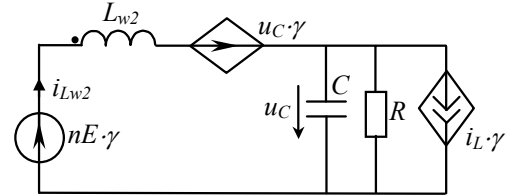


Рис. 3.38.

Таким образом, вместо решения последовательно на двух интервалах различных систем дифференциальных уравнений (14) и (15) и состыковки решений на границах интервалов, решается одна усредненная система (16). Решая ее можно определить переходные процессы в схеме регулятора при известных начальных условиях и известном законе изменения во времени коэффициента заполнения  $\chi(t)$ .

Можно сравнить расчет переходных процессов выхода на режим преобразователя с постоянным коэффициентом заполнения схемы с ключом или полной *имитационной модели* (рис. 3.37, а) и *непрерывной нелинейной модели* (рис. 3.38) с помощью программы схемотехнического анализа MICROCAP V (позволяет легко моделировать нелинейные зависимые источники). При этом время расчета для непрерывной модели в десятки раз меньше, чем для имитационной, а огибающие кривых совпадают с хорошей точностью (см. рис. 3.39).

При использовании метода УПС, естественно, теряется информация о поведении переменных состояния внутри каждого периода коммутации ключевого элемента (т.е. о пульсациях), однако это для рассматриваемого класса устройств допустимо.

Следует отметить, что из усредненной системы дифференциальных уравнений (16) могут быть получены соотношения для установившегося режима работы регулятора, а из них - регулировочные характеристики. Очевидно, что в установившемся режиме средние за период значения переменных состояния не изменяются (т.е.  $u_C = \text{const}$ ,  $i_L = \text{const}$ ). Следовательно усредненные производные переменных состояния равны 0. Подставляя  $du_C/dt = 0$  и  $di_L/dt = 0$  в систему

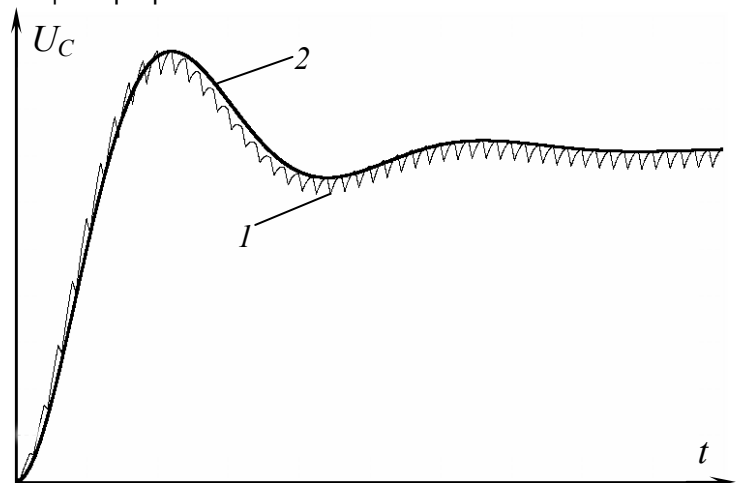


Рис. 3.39. Переходный процесс в импульсном преобразователе постоянного напряжения:

кривая 1 – метод приспособывания (или имитационная модель), кривая 2 – непрерывная модель по УПС

Следует отметить, что в установившемся режиме средние за период значения переменных состояния не изменяются (т.е.  $u_C = \text{const}$ ,  $i_L = \text{const}$ ). Следовательно усредненные производные переменных состояния равны 0. Подставляя  $du_C/dt = 0$  и  $di_L/dt = 0$  в систему



$$(16), \text{ получим: } U_C = U_H = \frac{nE \cdot \gamma}{1 - \gamma}; \quad I_L = \frac{I_H}{1 - \gamma}; \quad I_H = \frac{U_H}{R}.$$

Непрерывная модель регулятора, полученная с помощью УПС, может быть использована для анализа устойчивости и синтеза корректирующих цепей в замкнутых системах автоматического регулирования – системах стабилизации напряжения. Импульсный стабилизатор выходного напряжения имеет структуру, представленную на рис. 3.40.

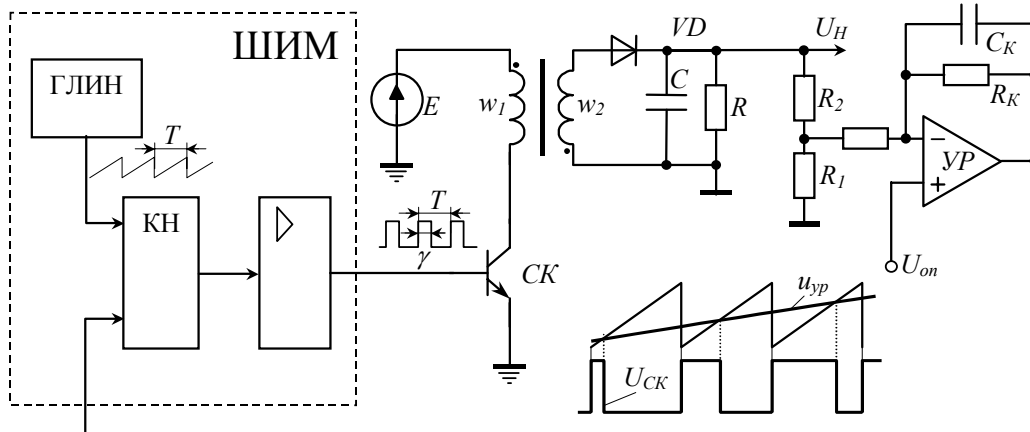


Рис. 3.40. Структурная схема импульсного стабилизатора напряжения

Для анализа устойчивости замкнутой системы стабилизации методами линейной теории автоматического регулирования необходимо линеаризовать нелинейную непрерывную модель регулятора (рис. 3.38) в окрестности рабочей точки (номинального режима). Это может быть выполнено автоматически при малосигнальном частотном анализе с помощью программ схемотехнического анализа DESIGNLAB, MICROCAP 8. Таким образом, могут быть получены логарифмические АЧХ и ФЧХ разомкнутой системы, а по ним может быть произведен синтез корректирующих цепей для обеспечения устойчивости и необходимых динамических показателей стабилизатора.

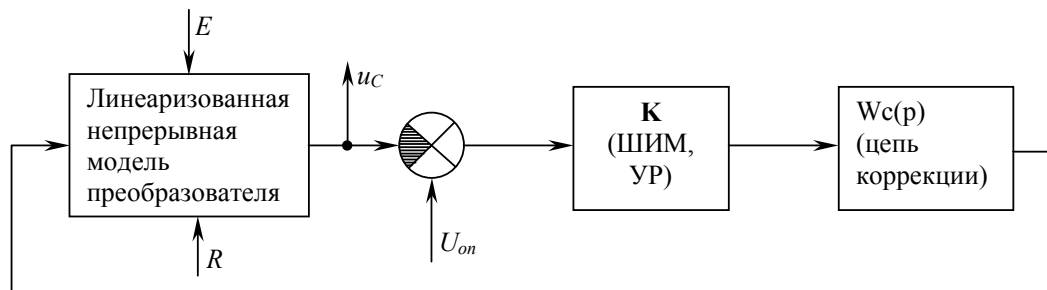


Рис 3.41. Линеаризованная непрерывная модель импульсного стабилизатора для малых возмущений

## ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

<b>Aa</b>	— а	<b>Nn</b>	— эн
<b>Bb</b>	— бэ	<b>Oo</b>	— о
<b>Cc</b>	— цэ	<b>Pp</b>	— пэ
<b>Dd</b>	— дэ	<b>Qq</b>	— ку
<b>Ee</b>	— е	<b>Rr</b>	— эр
<b>Ff</b>	— эф	<b>Ss</b>	— эс
<b>Gg</b>	— ге (же)	<b>Tt</b>	— тэ
<b>Hh</b>	— ха (аш)	<b>Uu</b>	— у
<b>Ii</b>	— и	<b>Vv</b>	— вэ
<b>Jj</b>	— йот (жи)	<b>Ww</b>	— дубль-вэ
<b>Kk</b>	— ка	<b>Xx</b>	— икс
<b>Ll</b>	— эль	<b>Yy</b>	— игрек
<b>Mm</b>	— эм	<b>Zz</b>	— зэт

## ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

<b>Aα</b>	— альфа	<b>Nν</b>	— ню
<b>Bβ</b>	— бэта	<b>Ξξ</b>	— кси
<b>Γγ</b>	— гамма	<b>Οο</b>	— омикрон
<b>Δδ</b>	— дельта	<b>Ππ</b>	— пи
<b>Εε</b>	— эpsilon	<b>Ρρ</b>	— ро
<b>Ζζ</b>	— дзэта	<b>Σσ</b>	— сигма
<b>Ηη</b>	— эта	<b>Ττ</b>	— тау
<b>Θθ(θ)</b>	— тэта	<b>Φφ</b>	— фи
<b>Ιι</b>	— иота	<b>Χχ</b>	— хи
<b>Κκ</b>	— каппа	<b>Υυ</b>	— ипсилон
<b>Λλ</b>	— ламбда	<b>Ψψ</b>	— пси
<b>Μμ</b>	— мю	<b>Ωω</b>	— омега

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>ЧАСТЬ 1.....</b>	<b>2</b>
<b>Введение .....</b>	<b>2</b>
<b>Виды анализа и расчета электронных схем.....</b>	<b>4</b>
<b>Модели элементов и схем .....</b>	<b>4</b>
Классификация моделей.....	5
<b>Базовый набор элементов моделей.....</b>	<b>6</b>
Пассивные элементы R, L, C.....	6
<b>Пассивные компоненты и их модели .....</b>	<b>8</b>
Резистор.....	8
Электрические конденсаторы .....	9
Реальная индуктивность.....	9
Трансформатор .....	14
<b>Модели полупроводниковых приборов.....</b>	<b>16</b>
Модель полупроводникового диода.....	17
Модель биполярного транзистора.....	20
Малосигнальная динамическая модель биполярного транзистора.....	22
Модель полевого транзистора .....	24
Динамическая модель для малого сигнала .....	25
Макромодель операционного усилителя.....	25
<b>ЧАСТЬ 2.....</b>	<b>27</b>
<b>Матрично-векторные параметры схем .....</b>	<b>27</b>
Метод контурных токов .....	30
Метод узловых потенциалов.....	31
Функции электронных схем.....	39
Метод обобщенных ветвей .....	43
<b>ЧАСТЬ 3.....</b>	<b>48</b>
<b>Введение, задачи анализа переходных процессов .....</b>	<b>48</b>
Законы коммутации .....	49
Общая проблема и подход к анализу коммутационных процессов.....	51
<b>Анализ переходных процессов в линейных цепях .....</b>	<b>52</b>
Классический метод анализа переходных процессов .....	52
Операторный метод анализа переходных процессов .....	53
Временные методы анализа переходных процессов .....	56
Интеграл наложения .....	57
Интеграл Дюамеля .....	57
Частотный метод анализа переходных процессов.....	58
Дискретное преобразование Фурье.....	61
Интеграл Фурье .....	62
<b>Анализ переходных процессов в нелинейных схемах. ....</b>	<b>65</b>
Сведение расчета переходных процессов в электронных цепях к расчету цепей по постоянному току.....	66
Применение метода усреднения в пространстве состояний для анализа переходных процессов и устойчивости схем с периодической коммутацией .....	69
<b>СОДЕРЖАНИЕ .....</b>	<b>74</b>