

ТЕОРИЯ И АППРОКСИМАЦИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

4.1. Введение

В настоящей главе рассматриваются методы расчета цифровых фильтров с бесконечными импульсными характеристиками (БИХ-фильтров) при условии, что фильтры являются физически реализуемыми и, конечно, устойчивыми. Для импульсных характеристик таких фильтров $h(n)$ справедливы следующие ограничения:

$$h(n) = 0, \quad n < 0, \quad (4.1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (4.2)$$

Наиболее общая форма записи z -преобразования импульсной характеристики БИХ-фильтров имеет вид

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) z^{-n} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}}. \quad (4.3)$$

Здесь по крайней мере один из коэффициентов a_i отличен от нуля, причем сразу все корни знаменателя не могут в точности компенсироваться корнями числителя. Действительно, рассмотрим, например, фильтр с z -преобразованием импульсной характеристики

$$H(z) = \frac{(1-z)^{-8}}{(1-z^{-1})}, \quad (4.4)$$

удовлетворяющим общей формуле (4.3). Так как корень $z = 1$ знаменателя компенсируется корнем $z = 1$ числителя, то фактически функция $H(z)$ представляет собой полином от z^{-1} с конечным числом членов, так что последовательность $h(n)$ будет соответствовать КИХ-фильтру.

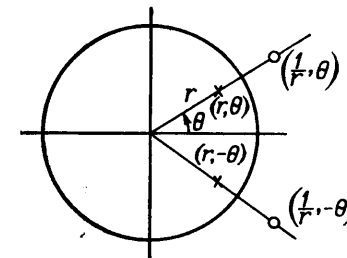
Фильтр с передаточной функцией вида (4.3) имеет, вообще говоря, конечное число нулей (M) и полюсов (N). Нули $H(z)$ могут располагаться на всей z -плоскости, но полюсы $H(z)$ в соответствии с условием устойчивости фильтра обязательно должны размещаться внутри круга единичного радиуса. В большинстве случаев, особенно при расчете цифровых фильтров по характери-

стикам аналоговых фильтров, число нулей (M) не превышает числа полюсов (N). Системы, удовлетворяющие этому условию, называются системами N -го порядка. При $M > N$ порядок системы становится неопределенным. В этом случае можно считать, что передаточная функция $H(z)$ соответствует последовательному соединению системы N -го порядка и КИХ-фильтра $(M - N)$ -го порядка. При рассмотрении всех методов расчета фильтров в настоящей главе предполагается, что $M \leq N$.

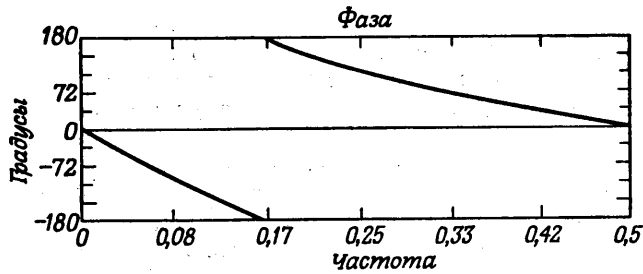
В отличие от КИХ-фильтров устойчивые, физически реализуемые БИХ-фильтры не обладают строго линейной фазовой характеристикой (за исключением частного случая, когда все полюсы $H(z)$ размещаются на единичной окружности). Действительно, в гл. 3 было показано, что фильтр будет иметь линейную фазовую характеристику, если

$$H(z) = H(z^{-1}) \quad (4.5)$$

[с точностью до множителя с линейной фазой, см. (3.19)]. Для БИХ-фильтров это условие означает, что каждому полюсу передаточной функции $H(z)$, расположенному внутри единичного круга (модули этих полюсов меньше 1), должен соответствовать зеркально отображенный полюс вне единичного круга, поэтому такой фильтр будет неустойчивым. В связи с этим при расчете БИХ-фильтров всегда приходится рассматривать аппроксимацию заданных и амплитудной, и фазовой характеристик. Существует, правда, специальный вид БИХ-фильтров с равномерной амплитудной характеристикой, у которых при изменениях положения нулей и полюсов меняется лишь фазовая характеристика. Фильтры такого вида называют всепропускающими цепями. Для этого чтобы цепь была всепропускающей, необходимо, чтобы каждому полюсу ее передаточной функции $H(z)$ в точке $z = re^{j\theta}$ соответствовал нуль в точке $z = (1/r) e^{j\theta}$, причем для действительных последовательностей $h(n)$ и полюсы, и нули должны иметь комплексно сопряженные пары. Типичное расположение полюсов и нулей для всепропускающего фильтра 2-го порядка показано на фиг. 4.1.

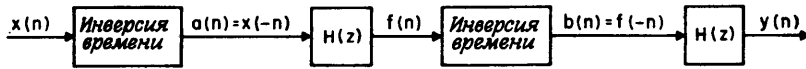


Фиг. 4.1. Расположение нулей и полюсов всепропускающего фильтра 2-го порядка.

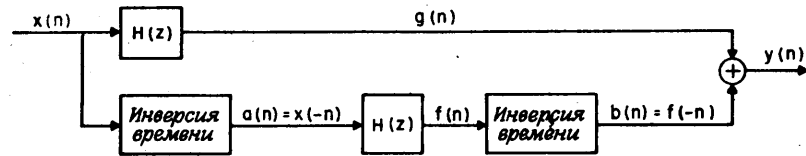


Фиг. 4.2. Фазовая характеристика всепропускающего фильтра 2-го порядка.

Метод 1



Метод 2



Фиг. 4.3. Два метода построения БИХ-фильтров с нулевой фазовой характеристикой.

Передаточная функция этого фильтра равна

$$H(z) = \frac{[z - (1/r)e^{j\theta}][z - (1/r)e^{-j\theta}]}{(z - re^{j\theta})(z - re^{-j\theta})}. \quad (4.6)$$

Ее можно преобразовать к виду

$$H(z) = \frac{[z^2 - (2/r)(\cos \theta)z + (1/r^2)]}{[z^2 - 2r(\cos \theta)z + r^2]} = \frac{[r^2 z^2 - 2r(\cos \theta)z + 1]}{r^2 [z^2 - 2r(\cos \theta)z + r^2]}. \quad (4.7)$$

Значения $H(z)$ на единичной окружности дают амплитудную характеристику фильтра, которая удовлетворяет условию

$$|H(e^{j\omega})| = \text{const},$$

а также фазовую характеристику, изображенную (для часто встречающихся значений $r = 0,9$ и $\theta = 36^\circ$) на фиг. 4.2. Всепропускающие фильтры представляют интерес прежде всего потому, что их последовательное соединение можно использовать для выравни-



Фиг. 4.4. К определению эквивалентного фильтра.

вания заданной фазовой характеристики (или характеристики групповой задержки).

Если не учитывать ограничения (4.1), связанного с физической реализуемостью фильтров, то можно предложить два различных метода построения БИХ-фильтров с линейными фазовыми характеристиками (фиг. 4.3). В обоих случаях фильтры с передаточной функцией $H(z)$ представляют собой физически реализуемые БИХ-фильтры, а блоки с обозначением «инверсия времени» описываются уравнением

$$z(n) = w(-n), \quad (4.8)$$

где $w(n)$ и $z(n)$ — входная и выходная последовательности этих блоков соответственно. Ограничения, при которых возможно построение таких блоков, будут сформулированы после того, как будет предварительно показано, что в обоих случаях эквивалентный фильтр имеет линейную (нулевую) фазовую характеристику. Понятие эквивалентного фильтра иллюстрируется с помощью фиг. 4.4, откуда следует, что передаточная функция эквивалентного фильтра $H_{\text{эк}}(z)$ равна

$$H_{\text{эк}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \quad (4.9)$$

Для метода 1 (см. фиг. 4.3 и 4.4) имеем

$$A(z) = X(z^{-1}), \quad (4.10a)$$

$$F(z) = H(z)A(z) = H(z)X(z^{-1}), \quad (4.10б)$$

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1})X(z), \quad (4.10в)$$

$$Y(z) = H(z)B(z) = X(z)H(z)H(z^{-1}), \quad (4.10г)$$

$$H_{\text{эк}}(z) = H(z)H(z^{-1}), \quad (4.10д)$$

$$H_{\text{эк}}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2. \quad (4.10е)$$

При выводе этих соотношений учитывалось, что если z -преобразование последовательности $x(n)$ равно $X(z)$, то для инвертированной во времени последовательности $x(-n)$ оно будет равно $X(z^{-1})$. Из конечного результата (4.10е) следует, что эквивалентный фильтр имеет нулевую фазовую характеристику, причем его амплитудная характеристика равна квадрату амплитудной характеристики БИХ-фильтра.

Для метода 2 аналогично получим

$$A(z) = X(z^{-1}), \quad (4.11a)$$

$$F(z) = H(z) A(z) = H(z) X(z^{-1}), \quad (4.11b)$$

$$B(z) = F(z^{-1}) = H(z^{-1}) X(z), \quad (4.11в)$$

$$G(z) = H(z) X(z), \quad (4.11г)$$

$$Y(z) = B(z) + G(z) = X(z) [H(z) + H(z^{-1})], \quad (4.11д)$$

$$H_{\text{ЭК}}(z) = H(z) + H(z^{-1}), \quad (4.11е)$$

$$H_{\text{ЭК}}(e^{j\omega}) = 2 |H(e^{j\omega})| \cos[\varphi(\omega)], \quad (4.11ж)$$

где

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\varphi(\omega)}. \quad (4.11з)$$

И в этом случае эквивалентный фильтр имеет нулевую фазовую характеристику, однако его амплитудная характеристика равна удвоенному произведению амплитудной характеристики исходного фильтра на функцию косинуса от фазовой характеристики исходного фильтра. По этой причине предпочтение следует отдать методу 1.

На практике точная реализация обоих рассмотренных методов невозможна ввиду того, что приходится инвертировать бесконечные временные последовательности, не дожидаясь, пока они закончатся. Ограничив, однако, эти последовательности соответствующим числом членов, всегда можно обеспечить любую наперед заданную точность аппроксимации эквивалентного фильтра. Более подробно этот подход рассмотрен в тезисах Гиббса.

4.2. Элементарные свойства БИХ-фильтров:

квадрат амплитудной характеристики, фазовая характеристика, характеристика групповой задержки

В процессе рассмотрения методов расчета БИХ-фильтров нам неоднократно придется обращаться к некоторым элементарным свойствам их передаточных функций. На протяжении всей главы будут использоваться три основные функции, характеризующие фильтр: квадрат амплитудной характеристики, фазовая характеристика и характеристика групповой задержки. Причина, по которой понадобятся все три функции, заключается в том, что при решении задачи аппроксимации для БИХ-фильтров в общем случае приходится рассматривать комплексную передаточную функцию от ω . Поэтому при разработке методов аппроксимации нужно учитывать поведение и амплитудной и фазовой характеристик. Кроме того, так как фазовая характеристика БИХ-фильтра, как правило, существенно нелинейна, то для оценки дисперсионного

воздействия фильтра на типовой обрабатываемый сигнал часто используется характеристика групповой задержки фильтра. В данном разделе даются определения всех трех характеристик фильтра, которые будут затем использованы в этой главе.

1. Квадрат амплитудной характеристики

При расчете БИХ-фильтра с использованием аппроксимации только амплитудной характеристики (т. е. без учета фазовой характеристики) удобнее всего оперировать с квадратом амплитудной характеристики, определяемым следующим образом:

$$|H(e^{j\omega})|^2 = |H(z) H(z^{-1})|_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.12)$$

Расположению полюсов и нулей этой функции в z -плоскости свойственна симметрия с зеркальным отображением относительно единичной окружности. Полюсы $H(z)$ располагаются внутри единичной окружности, поэтому они полностью определяются квадратом амплитудной характеристики фильтра. Нули $H(z)$ могут занимать в z -плоскости произвольное положение (исключение составляет важный случай, когда все нули располагаются на единичной окружности). Однако чаще всего нули передаточной функции $H(z)$ также выбираются таким образом, чтобы соответствующие им нули квадрата амплитудной характеристики располагались на единичной окружности или внутри ее в z -плоскости. Фильтры с такими нулями являются минимально-фазовыми фильтрами.

2. Фазовая характеристика

Так как передаточная функция БИХ-фильтра в общем случае является комплексной функцией от ω , можно рассматривать и амплитудную и фазовую характеристики фильтра. Фазовая характеристика равна

$$\beta(e^{j\omega}) = \text{arctg} \left\{ \frac{\text{Im}[H(z)]}{\text{Re}[H(z)]} \right\}_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.13)$$

Другая форма записи фазовой характеристики имеет вид

$$\beta(e^{j\omega}) = \frac{1}{2j} \ln \left\{ \frac{H[z]}{H[z^{-1}]} \right\}_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.14)$$

Ее можно получить, представив $H(z)$ как

$$H(z) = |H(z)| e^{j\beta(z)} \quad (4.15)$$

и учитывая, что

$$H(z^{-1}) = |H(z)| e^{-j\beta(z)}. \quad (4.16)$$

3. Характеристика групповой задержки

Характеристика групповой задержки является мерой средней задержки в фильтре в функции частоты и записывается следующим образом:

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\frac{d\beta(e^{j\omega})}{d\omega} = -jz \frac{d\beta}{dz} \Big|_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.17)$$

Используя формулу (4.14), функцию $\tau_g(e^{j\omega})$ можно представить в виде

$$\tau_g(e^{j\omega}) = -\operatorname{Re} \left[z \frac{dH(z)/dz}{H(z)} \right]_{z=e^{j\omega}} = -\operatorname{Re} \left\{ z \frac{d}{dz} [\ln H(z)] \right\}_{z=e^{j\omega}}. \quad (4.18)$$

Предпочтительна приблизительно постоянная характеристика групповой задержки во всей полосе (или полосах) пропускания фильтра.

4.3. Методы расчета коэффициентов БИХ-фильтра

Решение задачи расчета фильтров сводится к нахождению значений его коэффициентов [обозначенных через b_i и a_i в формуле (4.3)], обеспечивающих аппроксимацию заданных характеристик фильтра, таких, как импульсная и частотная характеристики, характеристика групповой задержки и др., в том или ином смысле (например, в среднеквадратическом или минимаксном). Таким образом, задача расчета фильтра в значительной мере сводится к задаче аппроксимации и может быть решена чисто математическими методами. Область, в которой производится аппроксимация, определяется назначением фильтра. Так, если аппроксимация производится в z -плоскости, результирующий фильтр будет цифровым. Если же она производится в s -плоскости, результирующий фильтр будет аналоговым. Аналогично можно рассчитать оптические фильтры или фильтры с распределенными параметрами. Все эти различные классы фильтров объединяет общность математических свойств аппроксимирующих функций.

Таким образом, вопреки распространенному мнению, методика расчета цифровых БИХ-фильтров практически не связана с методикой расчета фильтров непрерывного времени, хотя и предполагает использование многочисленных сведений, содержащихся в публикациях по методам расчета этих фильтров. Вместо того чтобы заново создавать теорию расчета цифровых фильтров (модернизируя математический аппарат применительно к случаю цифровых фильтров), можно использовать простые методы отображения, позволяющие преобразовать фильтры из одной области в другую. Именно такие методы расчета цифрового фильтра, включаю-

щие проектирование соответствующего фильтра непрерывного времени и его дискретизацию, наиболее широко используются при расчете БИХ-фильтров. Их можно использовать при проектировании стандартных фильтров, таких, как фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные; теория расчета этих фильтров для непрерывного времени хорошо разработана.

Другую группу методов расчета цифровых БИХ-фильтров образуют прямые методы расчета в z -плоскости. Часто удается найти такое расположение полюсов и нулей фильтра, при котором обеспечивается некоторая аппроксимация непосредственно заданной характеристики фильтра. Третий, также часто встречающийся подход к расчету БИХ-фильтров заключается в использовании процедур оптимизации для нахождения такого расположения полюсов и нулей в z -плоскости, при котором обеспечивается аппроксимация в том или ином смысле заданной характеристики фильтра. При таком подходе обычно не удается получить формулы, связывающие координаты полюсов и нулей (а следовательно, и коэффициенты фильтра) с параметрами заданной характеристики. Расчет фильтров производится, как правило, методом последовательных приближений.

4.4. Расчет цифровых фильтров по фильтрам непрерывного времени

В предыдущем разделе уже отмечалось, что наиболее распространенным методом расчета БИХ-фильтров является метод дискретизации аналогового фильтра, удовлетворяющего заданным требованиям. При расчете цифровых фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров можно воспользоваться многочисленными методами расчета аналоговых фильтров-прототипов. Хорошо известны такие классы аналоговых фильтров, как фильтры Баттерворта, фильтры Чебышева типа I и II и фильтры Кауэра (называемые также эллиптическими фильтрами). Основные свойства этих фильтров, а также соотношения, используемые в настоящее время для их расчета, будут приведены в разд. 4.9, а сначала рассмотрим несколько методов преобразования (т. е. дискретизации) существующего аналогового фильтра в эквивалентный ему цифровой фильтр.

Предположим, что передаточная функция аналогового фильтра (представляющая собой преобразование Лапласа от импульсной характеристики) равна

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^M b_i s^i}{\sum_{i=1}^N a_i s^i} = \frac{\prod_{i=1}^M (s + c_i)}{\prod_{i=1}^N (s + d_i)}, \quad (4.19)$$

причем коэффициенты a_i и b_i (или, что то же, c_i и d_i) известны. Дифференциальное уравнение фильтра имеет вид

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}, \quad (4.20)$$

где $x(t)$ и $y(t)$ — колебания на входе и выходе фильтра соответственно. Наиболее распространенными методами дискретизации аналогового фильтра с передаточной функцией (4.19) являются следующие:

- 1) метод отображения дифференциалов;
- 2) метод инвариантного преобразования импульсной характеристики;
- 3) метод билинейного преобразования;
- 4) метод согласованного z -преобразования.

В последующих разделах все эти методы будут подробно рассмотрены.

4.5. Метод отображения дифференциалов

Один из наиболее простых методов дискретизации аналоговой системы заключается в замене дифференциалов в ее дифференциальном уравнении на конечные разности, что дает возможность получить разностное уравнение, аппроксимирующее исходное дифференциальное уравнение. Простейшая замена состоит в замене первого дифференциала на прямую или обратную разность. При этом дифференциальное уравнение (4.20) после дискретизации принимает вид

$$\sum_{i=0}^N a_i \Delta_i [y(n)] = \sum_{i=0}^M b_i \Delta_i [x(n)], \quad (4.21)$$

где $x(n)$ — последовательность на входе цифрового фильтра, $y(n)$ — на его выходе, а i -я разность $\Delta_i [w(n)]$ определяется соотношением

$$\Delta_{i+1} [w(n)] = \Delta_i \{ \Delta_i [w(n)] \}, \quad (4.22)$$

причем

$$\Delta_1 [w(n)] = \begin{cases} \frac{1}{T} [w(n) - w(n-1)], & \text{обратная разность,} \\ \frac{1}{T} [w(n+1) - w(n)], & \text{прямая разность.} \end{cases} \quad (4.23)$$

Так, при использовании обратных разностей вторая разность $\Delta_2 [w(n)]$ будет равна

$$\begin{aligned} \Delta_2 [w(n)] &= \frac{1}{T} \{ \Delta_1 [w(n)] - \Delta_1 [w(n-1)] \} = \\ &= \frac{1}{T} \{ [w(n) - w(n-1)] - \frac{1}{T} [w(n-1) - w(n-2)] \} = \\ &= \frac{1}{T^2} [w(n) - 2w(n-1) + w(n-2)]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

При любом отображении непрерывного пространства в дискретное должны выполняться следующие требования:

1. Ось $j\Omega$ из s -плоскости должна отображаться в единичную окружность на z -плоскости.

2. Точки из левой половины s -плоскости (для них $\{\text{Re } [s] < 0\}$) после отображения должны располагаться внутри единичной окружности в z -плоскости (т. е. для отображенных точек $|z| < 1$).

Выполнение первого требования позволяет сохранить (благодаря свойству равномерности отображения) селективные свойства аналоговой системы, а выполнение второго гарантирует, что получающаяся в результате отображения устойчивой аналоговой системы дискретная система также является устойчивой. Рассмотрим, насколько хорошо замена дифференциалов прямыми или обратными разностями позволяет удовлетворить сформулированным требованиям.

Обратные разности. При использовании обратных разностей производится следующая замена:

$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow \frac{y(n) - y(n-1)}{T}. \quad (4.25)$$

С точки зрения операторов преобразования она соответствует соотношению

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}, \quad (4.26)$$

или

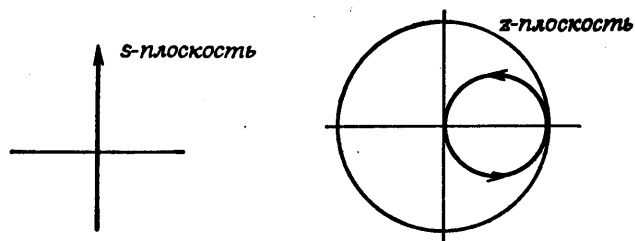
$$z = \frac{1}{1 - sT}. \quad (4.27)$$

При $s = j\Omega$ из формулы (4.27) следует, что

$$z = \frac{1}{1 - j\Omega T} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1 + j\Omega T}{1 - j\Omega T} \right) = \frac{1}{2} (1 + e^{2j \arctg \Omega T}). \quad (4.28)$$

Запишем действительную и мнимую части z :

$$\begin{aligned} \text{Re } [z] &= \frac{1}{2} + \frac{\cos(2 \arctg \Omega T)}{2}, \\ \text{Im } [z] &= \frac{\sin(2 \arctg \Omega T)}{2}. \end{aligned} \quad (4.29)$$



Фиг. 4.5. Отображение оси $j\Omega$ из s -плоскости в z -плоскость для метода обратных разностей.

Таким образом, прямая $s = j\Omega$ (при $-\infty < \Omega < \infty$) отображается на z -плоскости в окружность, уравнение которой имеет вид

$$\left\{ \operatorname{Re} [z] - \frac{1}{2} \right\}^2 + \{\operatorname{Im} [z]\}^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2. \quad (4.30)$$

Центр этой окружности (фиг. 4.5) находится в точке с координатами $\operatorname{Re} [z] = 1/2$, $\operatorname{Im} [z] = 0$, а ее радиус равен $1/2$. Видно, что все точки оси $j\Omega$ из s -плоскости после отображения не попадают на единичную окружность в z -плоскости (за исключением области весьма малых значений ΩT). Это означает, что первое из сформулированных выше требований не удовлетворяется. Проверим, выполняется ли второе требование. Для этого положим, что

$$sT = \alpha + j\beta, \quad (4.31)$$

где α и β — действительные числа, причем $\alpha < 0$. Тогда соотношение (4.27) принимает вид

$$z = \frac{1}{1 - \alpha - j\beta}, \quad (4.32)$$

откуда

$$|z| = \frac{1}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}} < 1. \quad (4.33)$$

Таким образом, при использовании обратных разностей устойчивый аналоговый фильтр будет отображаться в устойчивый цифровой фильтр, но избирательные свойства аналогового фильтра не будут сохраняться.

Прямые разности. При использовании прямых разностей производится следующая замена:

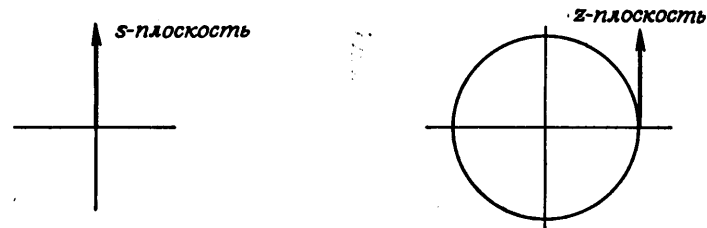
$$\frac{dy}{dt} \leftrightarrow \frac{y(n+1) - y(n)}{T}, \quad (4.34)$$

для которой

$$s = \frac{z-1}{T}, \quad (4.35)$$

или

$$z = 1 + sT. \quad (4.36)$$



Фиг. 4.6. Отображение оси $j\Omega$ из s -плоскости в z -плоскость для метода прямых разностей.

При $s = j\Omega$ имеем

$$z = 1 + j\Omega T. \quad (4.37)$$

Контуры на s -плоскости и z -плоскости для рассматриваемого метода отображения показаны на фиг. 4.6. Видно, что первое требование, предъявляемое к отображениям, не удовлетворяется. Не удовлетворяется и второе требование, так как если

$$sT = \alpha + j\beta, \quad (4.38)$$

то

$$z = 1 + \alpha + j\beta \quad (4.39)$$

и

$$|z| > 1$$

при $\beta^2 > 1 - (1 + \alpha)^2$.

Обобщенные разности. Более сложная методика дискретизации аналоговых фильтров, основанная на замене дифференциалов разностями, заключается в использовании разностей более высокого порядка для замены дифференциалов более низкого порядка. Положим, например, что первая разность Δ_1 определяется вместо (4.23) следующим выражением:

$$\Delta_1 [w(n)] = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^L \alpha_i [w(n+i) - w(n-i)], \quad (4.40)$$

где L — порядок используемых разностей. Тогда соотношение между операторами, описывающее отображение s -плоскости в z -плоскость, будет иметь вид

$$s = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^L \alpha_i (z^i - z^{-i}). \quad (4.41)$$

Докажем, что оно удовлетворяет первому требованию. Для этого покажем, что при $z = e^{j\omega T}$ оператор s будет иметь вид $s = j\beta(\omega)$, так что единичная окружность на z -плоскости будет результатом

отображения оси $j\Omega$ из s -плоскости. Подставив $z = e^{j\omega T}$ в формулу (4.41), получим

$$s = \frac{1}{T} \sum_{i=1}^L \alpha_i (e^{j\omega_i T} - e^{-j\omega_i T}) = \quad (4.42)$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{i=1}^L 2j\alpha_i \sin(\omega_i T) = j\beta(\omega). \quad (4.43)$$

Выбрав соответствующим образом значения коэффициентов α_i , можно добиться того, что функция $\beta(\omega)$ будет аппроксимировать практически любую заданную нечетную функцию от ω , так что ось $j\Omega$ из s -плоскости будет монотонно отображаться в единичную окружность на z -плоскости. Кроме того, можно показать, что отображение, описываемое оператором (4.41), является конформным, поэтому точки левой полуплоскости s будут располагаться после отображения внутри единичного круга в z -плоскости, так что оба требования, предъявляемые к отображениям, будут удовлетворяться. Однако в связи с трудностями в определении коэффициентов α_i , необходимых для выполнения отображения, а также из-за наличия более простых методов дискретизации аналоговых фильтров рассмотренный метод использования разностей более высокого порядка не нашел широкого практического применения.

Общие замечания о методе замены дифференциалов разностями. Достоинство метода замены дифференциалов простыми разностями заключается в том, что с помощью простых подстановок типа (4.26) или (4.35) можно от рациональной передаточной функции от s непосредственно перейти к рациональной передаточной функции от z . Однако независимо от того, используются простые прямые или простые обратные разности, характеристики аналогового фильтра при этом не сохраняются, поэтому для дискретизации аналоговых фильтров обычно применяют другие методы.

4.6. Метод инвариантного преобразования импульсной характеристики

Второй метод дискретизации аналоговых фильтров называется методом инвариантного преобразования импульсной характеристики¹. Отличительной особенностью этого метода является то, что в качестве импульсной характеристики рассчитываемого цифрового фильтра используется дискретизованная импульсная характеристика соответствующего аналогового фильтра. В результате частот-

¹) Его называют также методом стандартного z -преобразования. — Прим. ред.

ная характеристика цифрового фильтра образуется путем наложения частотной характеристики дискретизованного аналогового фильтра.

Для того чтобы продемонстрировать метод дискретизации аналогового фильтра с использованием инвариантного преобразования его импульсной характеристики, разложим передаточную функцию этого фильтра (4.19) на простые дроби:

$$H(s) = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{s+d_i}, \quad (4.44)$$

где

$$c_i = H(s)(s+d_i)|_{s=-d_i}, \quad (4.45)$$

причем каждый коэффициент d_i определяет положение i -го полюса. При записи разложения (4.44) предполагалось, что порядок числителя M меньше порядка знаменателя N и что все полюсы $H(s)$ простые. Предположение о том, что $M < N$, обязательно должно выполняться для дискретизируемого фильтра, поскольку в противном случае наложения в частотной характеристике цифрового фильтра станут недопустимыми. Если же не все полюсы $H(s)$ простые, то результаты, которые будут получены в настоящем разделе, следует несколько модифицировать.

Импульсная характеристика $h(t)$ аналогового фильтра с передаточной функцией вида (4.44) описывается соотношением

$$h(t) = \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i t} u_{-1}(t). \quad (4.46)$$

Дискретизуя ее, получим импульсную характеристику цифрового фильтра

$$h(nT) = \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i nT} u_{-1}(nT), \quad (4.47)$$

где T — период дискретизации. Найдем ее z -преобразование

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(nT) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^N c_i e^{-d_i nT} z^{-n}. \quad (4.48)$$

Изменив порядок суммирования и просуммировав по n , получим

$$H(z) = \sum_{i=1}^N c_i \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-d_i T} z^{-1})^n = \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{1 - e^{-d_i T} z^{-1}}. \quad (4.49)$$

Сравним формулы (4.49) и (4.44). Видно, что для простых полюсов переход от $H(s)$ к $H(z)$ осуществляется с помощью отображения,

при котором используется замена

$$\frac{1}{s+d_i} \rightarrow \frac{1}{1-z^{-1}e^{-d_i T}}. \quad (4.50)$$

Если полюсы d_i комплексные, то остатки c_i в (4.44) также будут комплексными. Функция $h(t)$ действительная, поэтому должны существовать также комплексно сопряженные полюс d_i^* и остаток c_i^* . Просуммируем эти комплексно сопряженные члены в (4.44):

$$\frac{c_i}{s+d_i} + \frac{c_i^*}{s+d_i^*} = \frac{(c_i+c_i^*)s + c_i d_i^* + c_i^* d_i}{s^2 + (d_i+d_i^*)s + d_i d_i^*}. \quad (4.51)$$

Положив $d_i = \sigma_i + j\Omega_i$ и $c_i = g_i + jh_i$, получим

$$\frac{c_i}{s+d_i} + \frac{c_i^*}{s+d_i^*} = \frac{2g_i s + 2(\sigma_i g_i + \Omega_i h_i)}{s^2 + 2\sigma_i s + (\sigma_i^2 + \Omega_i^2)}. \quad (4.52)$$

Использование отображающей замены (4.50) применительно к каждому слагаемому в формуле (4.51) дает

$$\begin{aligned} \frac{c_i}{1-z^{-1}e^{-d_i T}} + \frac{c_i^*}{1-z^{-1}e^{-d_i^* T}} &= \\ &= \frac{(c_i+c_i^*) - z^{-1}(c_i e^{-d_i T} + c_i^* e^{-d_i^* T})}{1-z^{-1}(e^{-d_i T} + e^{-d_i^* T}) + z^{-2}e^{-(d_i+d_i^*)T}} = \end{aligned} \quad (4.53)$$

$$= \frac{2g_i - z^{-1}e^{-\sigma_i T} [2g_i \cos(\Omega_i T) - 2h_i (\sin \Omega_i T)]}{1-2z^{-1}e^{-\sigma_i T} \cos(\Omega_i T) + z^{-2}e^{-2\sigma_i T}}. \quad (4.54)$$

Из формул (4.52) и (4.54) получаем

$$\frac{s+\sigma+\Omega(h/g)}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega^2} \rightarrow \frac{1-z^{-1}e^{-\sigma T} [\cos(\Omega T) - (h/g) \sin(\Omega T)]}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T} \cos(\Omega T) + z^{-2}e^{-2\sigma T}} \quad (4.55)$$

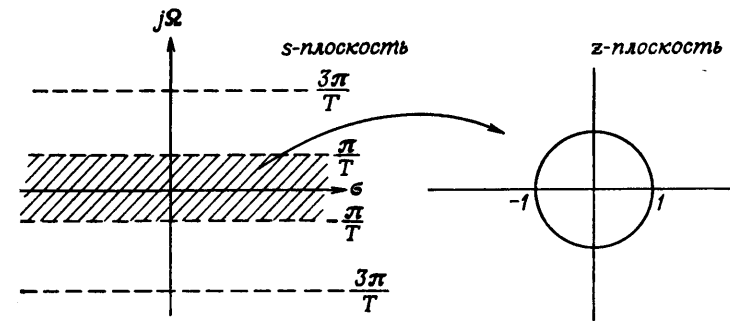
(индекс i здесь опущен, а числители поделены на $2g$).

Приведем два полезных частных случая этой отображающей замены, соответствующих аналоговым фильтрам с импульсными характеристиками $h_1(t) = e^{-\sigma t} \cos(\Omega t)$ $u_{-1}(t)$ и $h_2(t) = e^{-\sigma t} \sin(\Omega t)$ $u_{-1}(t)$:

$$H_1(s) = \frac{s+\sigma}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega^2} \rightarrow \frac{1-z^{-1}e^{-\sigma T} \cos \Omega T}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T} \cos \Omega T + z^{-2}e^{-2\sigma T}}, \quad (4.56)$$

$$H_2(s) = \frac{\Omega}{s^2+2\sigma s+\sigma^2+\Omega^2} \rightarrow \frac{z^{-1}e^{-\sigma T} \sin \Omega T}{1-2z^{-1}e^{-\sigma T} \cos \Omega T + z^{-2}e^{-2\sigma T}}. \quad (4.57)$$

Выше было отмечено, что частотная характеристика цифрового фильтра, рассчитываемого методом инвариантного преобразования импульсной характеристики, образуется путем наложений частот-



Фиг. 4.7. Отображение из s -плоскости в z -плоскость для метода инвариантного преобразования импульсной характеристики.

ной характеристики дискретизируемого аналогового фильтра. Таким образом, можно записать

$$H(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} H(j\Omega + jl\Omega_s), \quad (4.58)$$

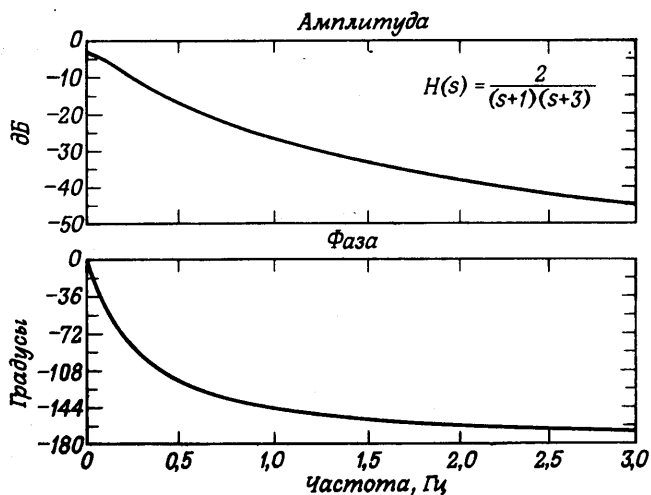
где $\Omega_s = 2\pi/T$ — угловая частота дискретизации цифрового фильтра. На фиг. 4.7 показано соответствующее инвариантному преобразованию импульсной характеристики отображение из s -плоскости в z -плоскость. Каждая горизонтальная полоса шириной $2\pi/T$ из s -плоскости отображается на z -плоскость. Поэтому все смежные полосы из s -плоскости будут при отображении накладываться друг на друга в z -плоскости. Отсюда следует, что для того, чтобы частотные характеристики исходного аналогового фильтра и рассчитываемого методом инвариантного преобразования импульсной характеристики цифрового фильтра соответствовали друг другу, необходимо, чтобы полоса пропускания аналогового фильтра находилась в пределах диапазона $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$. Для выполнения этого условия необходимо до начала преобразования вводить дополнительный фильтр нижних частот, гарантирующий соответствующее ограничение полосы пропускания аналогового фильтра.

Пример инвариантного преобразования импульсной характеристики. Для иллюстрации этого метода дискретизируем аналоговый фильтр с передаточной функцией вида

$$H(s) = \frac{2}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+3}.$$

Непосредственное использование отображающей замены (4.50) дает

$$H(z) = \frac{1}{1-z^{-1}e^{-T}} - \frac{1}{1-z^{-1}e^{-3T}} = \frac{z^{-1}(e^{-T} - e^{-3T})}{1-z^{-1}(e^{-T} + e^{-3T}) + e^{-4T}z^{-2}}.$$



Фиг. 4.8. Амплитудная и фазовая характеристики аналогового фильтра.

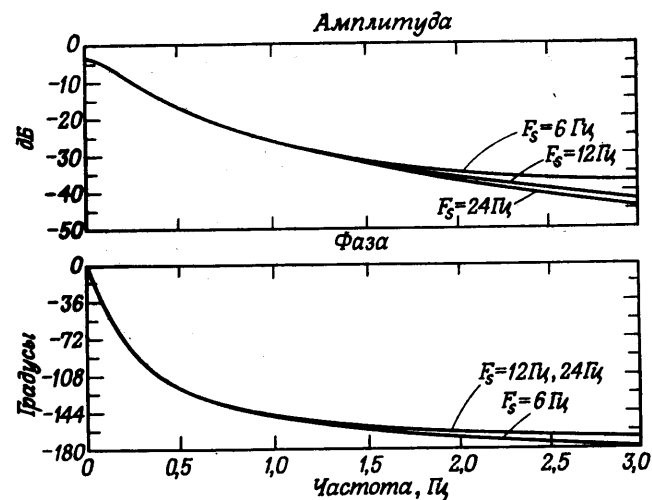
Частотная характеристика аналогового фильтра определяется соотношением

$$H(j\Omega) = \frac{2}{(3-\Omega^2) + 4j\Omega}.$$

На фиг. 4.8 представлены амплитудная и фазовая характеристики этого фильтра. Характеристики соответствующего цифрового фильтра для разных значений периода дискретизации $T = 1/F_s$ изображены на фиг. 4.9. Ясно, что при уменьшении T (т. е. при увеличении частоты дискретизации F_s) эффекты наложения могут оказаться пренебрежимо малыми и частотные характеристики аналогового и цифрового фильтров станут похожими друг на друга.

4.7. Билинейное z -преобразование

Достоинство первого из двух рассмотренных выше методов расчета цифрового фильтра по характеристикам аналогового фильтра, основанного на замене дифференциалов конечными разностями, заключалось в том, что z -преобразование импульсной характеристики цифрового фильтра элементарно получалось из преобразования Лапласа импульсной характеристики аналогового фильтра с помощью простой алгебраической подстановки. Недостатки же этого метода состояли в том, что ось $j\Omega$ из s -плоскости не отображалась, вообще говоря, в единичную окружность на z -плоскости, а устойчивый аналоговый фильтр (в случае использования прямых разностей) не всегда отображался в устойчивый цифровой фильтр.



Фиг. 4.9. Амплитудная и фазовая характеристики цифровых фильтров, рассчитанных методом инвариантного преобразования импульсной характеристики аналогового фильтра, представленного на фиг. 4.8.

Существует, однако, простое конформное отображение s -плоскости в z -плоскость, свободное от этих недостатков и в то же время сохраняющее удобную алгебраическую форму преобразования. Оно называется билинейным преобразованием, использующим следующую замену:

$$s \rightarrow \frac{2}{T} \frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}. \quad (4.59)$$

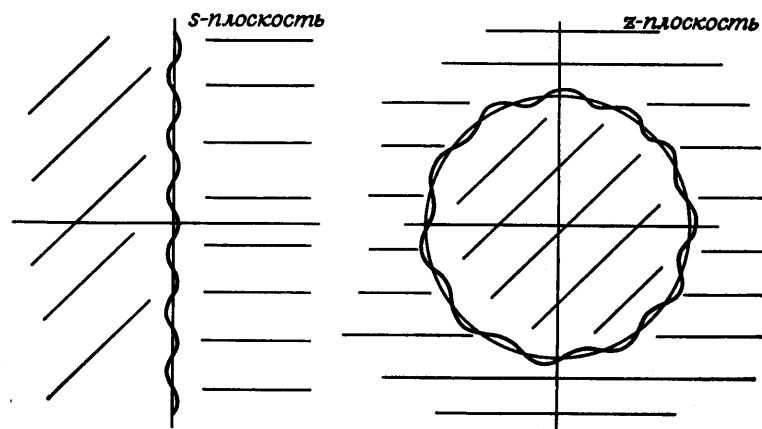
Характер этого преобразования проще всего понять, если обратиться к фиг. 4.10, где показано, каким образом s -плоскость отображается в z -плоскость. Видно, что вся ось $j\Omega$ из s -плоскости отображается в единичную окружность на z -плоскости; левая полуплоскость s отображается в единичный круг, а правая полуплоскость s — в область, расположенную вне единичного круга на z -плоскости. Эти свойства легко проиллюстрировать, если из формулы (4.59) найти выражение для z :

$$z = \frac{(2/T) + s}{(2/T) - s}. \quad (4.60)$$

При $s = j\Omega$

$$z = \frac{(2/T) + j\Omega}{(2/T) - j\Omega}. \quad (4.61)$$

Отсюда видно, что $|z| = 1$. При $\Omega = 0$ имеем $z = 1$ и при $\Omega = \infty$ $z = -1$, в промежутке z монотонно меняется от 0 до π . Подставив



Фиг. 4.10. Отображение s -плоскости в z -плоскость при билинейном преобразовании.

в формулу (4.60) $s = \sigma + j\Omega$, получим

$$z = \frac{(2/T) + \sigma + j\Omega}{(2/T) - \sigma - j\Omega}. \quad (4.62)$$

При $\sigma < 0$ (для левой полуплоскости s) $|z| < 1$, т. е. точки располагаются внутри единичной окружности.

При билинейном преобразовании передаточная функция цифрового фильтра $H(z)$ рассчитывается с помощью алгебраической подстановки (4.59), т. е.

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})]}. \quad (4.63)$$

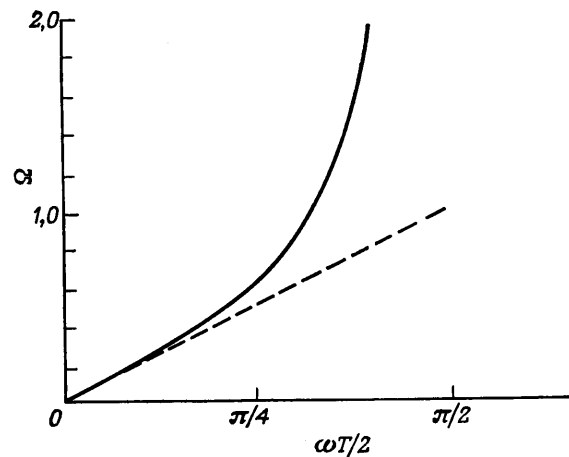
Из этого соотношения видно, что порядки знаменателей функций $H(z)$ и $H(s)$ совпадают, но порядки числителей могут отличаться. Действительно, передаточная функция

$$H(s) = \frac{1}{s+a}$$

имеет числитель нулевого порядка, а знаменатель — первого порядка. В то же время получаемая методом билинейного преобразования функция $H(z)$ равна

$$H(z) = \frac{1}{(2/T)[(1-z^{-1})/(1+z^{-1})] + a} = \frac{1+z^{-1}}{2/T + a + z^{-1}[a - (2/T)]},$$

где и числитель, и знаменатель первого порядка. Причиной этого является то, что функция $H(s)$ имеет нуль на бесконечности ($s = \infty$), который при билинейном преобразовании отображается в точку $z = -1$.



Фиг. 4.11. Соотношение между частотными шкалами аналогового и цифрового фильтров при билинейном преобразовании.

Так как в единичную окружность на z -плоскости отображается вся ось $j\Omega$ из s -плоскости, то эффекты, связанные с наложениями в частотной характеристике цифрового фильтра, характерные для метода инвариантного преобразования импульсной характеристики, в данном случае будут отсутствовать. Однако соотношение между частотами аналогового фильтра Ω и цифрового фильтра ω оказывается существенно нелинейным. Рассмотрим характер этой нелинейности, положив в (4.59) $z = e^{j\omega T}$ и $s = j\Omega$, что дает

$$j\Omega \rightarrow \frac{2}{T} \frac{(1 - e^{-j\omega T})}{(1 + e^{-j\omega T})}, \quad (4.64)$$

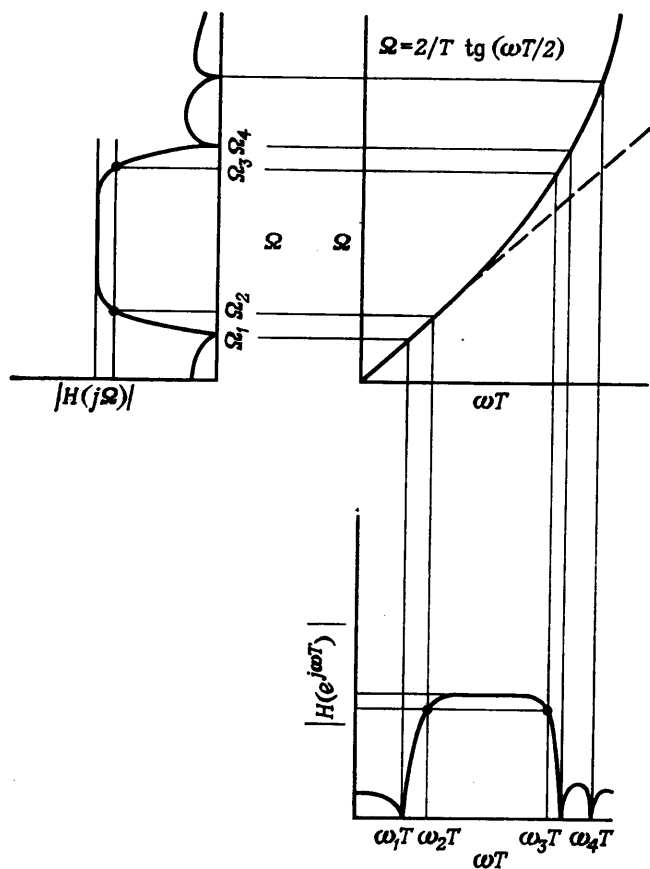
или

$$j\Omega \rightarrow \frac{2}{T} \frac{[e^{j(\omega T/2)} - e^{-j(\omega T/2)}]}{[e^{j(\omega T/2)} + e^{-j(\omega T/2)}]},$$

откуда

$$\begin{aligned} j\Omega &\rightarrow \frac{2}{T} j \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right), \\ \Omega &\rightarrow \frac{2}{T} \operatorname{tg} \left(\frac{\omega T}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Это соотношение представлено на фиг. 4.11 для случая $T = 2$. При небольших ω отображение почти линейно, однако для основной части частотной шкалы оно существенно нелинейно и сильно ограничивает область применения билинейного преобразования. Действительно, амплитудная характеристика преобразуемого анало-



Фиг. 4.12. Методика учета нелинейного искажения частотной шкалы при билинейном преобразовании.

гового фильтра должна быть ступенчатообразной функцией частоты, так как в противном случае частотная характеристика цифрового фильтра будет представлять собой деформированную характеристику аналогового фильтра. По этой причине, например, билинейное преобразование нельзя использовать для преобразования аналогового дифференцирующего фильтра в цифровой дифференциатор. Существует, правда, довольно большой класс фильтров, для которых частотная деформация, описываемая соотношением (4.65), может быть скомпенсирована. К ним относятся фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные. Метод компенсации деформации достаточно прост (фиг. 4.12). Совокупность характерных частот среза цифрового фильтра известна. Пусть

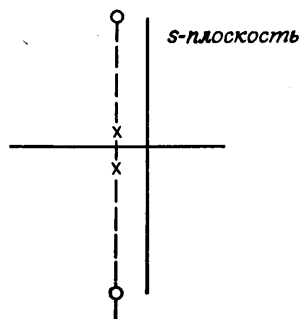
в данном случае их будет четыре: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ (они показаны на фиг. 4.12 справа внизу). Используя нелинейное соотношение (4.65) между частотными шкалами цифрового и аналогового фильтров, пересчитаем все частоты среза цифрового фильтра в частоты среза аналогового фильтра, которые будут равны $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ (см. на фиг. 4.12 вверху). Теперь рассчитаем аналоговый фильтр, все характерные частоты которого совпадали бы с этими пересчитанными частотами среза цифрового фильтра. Амплитудная характеристика такого аналогового фильтра изображена на фиг. 4.12 слева вверху. Выполнив билинейное преобразование этого аналогового фильтра, получим цифровой фильтр, все частоты среза которого будут совпадать с заданными. Ниже в настоящей главе будут даны примеры расчета фильтров нижних и верхних частот методом билинейного преобразования.

Итак, билинейное преобразование обеспечивает простое отображение между аналоговыми и цифровыми фильтрами и является алгебраическим преобразованием, при котором ось $j\Omega$ полностью отображается в единичную окружность на z -плоскости. Кроме того, ему присуще свойство отображать физически реализуемый устойчивый аналоговый фильтр также в физически реализуемый и устойчивый цифровой фильтр. Более того, аналоговые широкополосные фильтры с резкими скатами могут быть отображены в широкополосные цифровые фильтры с резкими скатами без искажений частотной характеристики, связанных с наложениями, которые характерны для метода инвариантного преобразования импульсной характеристики. Недостаток метода билинейного преобразования заключается в том, что эффекты нелинейности соотношения между частотными шкалами аналогового и цифрового фильтров удастся учесть лишь в том случае, когда частотная характеристика аналогового фильтра имеет вид ступенчатообразной функции. Кроме того, при билинейном преобразовании ни импульсная, ни фазовая характеристики аналогового и цифрового фильтров не будут совпадать.

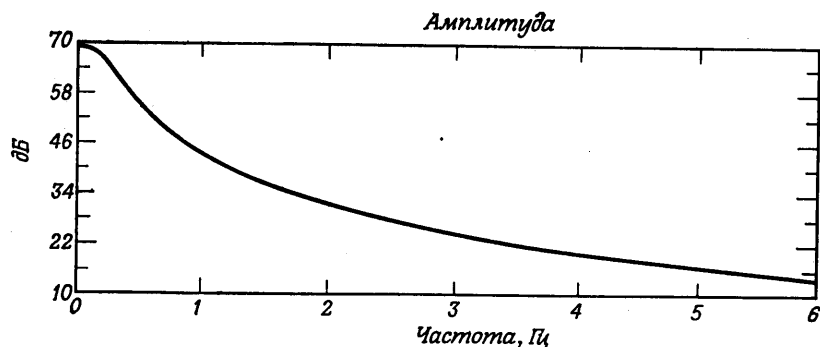
4.8. Согласованное z -преобразование

Четвертый метод дискретизации аналоговых фильтров, называемый согласованным z -преобразованием, основан на непосредственном отображении полюсов и нулей из s -плоскости в полюсы и нули на z -плоскости. При таком отображении полюс (или нуль) в точке $s = -a$ плоскости s отображается в полюс (или нуль) в точке $z = e^{-aT}$ плоскости z , где T — период дискретизации. Таким образом, при согласованном z -преобразовании отображающая замена будет иметь вид

$$s + a \rightarrow 1 - z^{-1}e^{-aT}. \quad (4.66)$$



Фиг. 4.13. Расположение полюсов и нулей в s -плоскости и амплитудная характеристика аналогового фильтра.

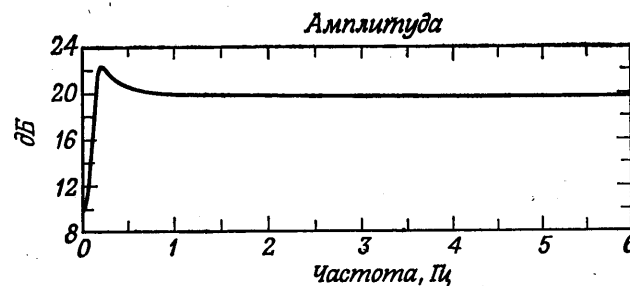
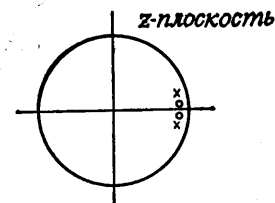


Если полюсы (или нули) комплексные, то (4.66) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} (s + a - jb)(s + a + jb) &= \\ = (s + a)^2 + b^2 &\rightarrow 1 - 2z^{-1}e^{-aT} \cos(bT) + e^{-2aT}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Необходимо отметить, что полюсы цифрового фильтра, рассчитываемого методом согласованного z -преобразования аналогового фильтра, оказываются идентичными полюсам, получаемым при инвариантном преобразовании импульсной характеристики того же аналогового фильтра, однако нули существенно различаются. Необходимо также учитывать, что для использования метода согласованного z -преобразования передаточная функция $H(s)$ аналогового фильтра должна быть разложена на множители.

Метод согласованного z -преобразования довольно прост в использовании, однако во многих случаях он неприменим. Так, если центральные частоты аналогового фильтра, соответствующие его нулям, превышают половину частоты дискретизации, то положение нулей цифрового фильтра будет существенно искажено



Фиг. 4.14. Расположение полюсов и нулей в z -плоскости и амплитудная характеристика цифрового фильтра, рассчитанного методом согласованного z -преобразования полюсов и нулей аналогового фильтра, представленного на фиг. 4.13.

эффектом наложения. Покажем это на примере передаточной функции

$$H(s) = \frac{s^2 + 2s + 5626}{s^2 + 2s + 2}$$

с нулями в точках $s = -1 \pm j75$ и полюсами в точках $s = -1 \pm j1$. Расположение нулей и полюсов этой функции в s -плоскости, а также амплитудная характеристика (в логарифмическом масштабе) представлены на фиг. 4.13. Пусть $T = 1/12$. Используя согласованное z -преобразование, получим следующее выражение для передаточной функции цифрового фильтра:

$$H(z) = \frac{1 - 2e^{-1/12} \cos\left(\frac{75}{12}\right) z^{-1} + e^{-1/6} z^{-2}}{1 - 2e^{-1/12} \cos\left(\frac{1}{12}\right) z^{-1} + e^{-1/6} z^{-2}}$$

Полюсы этой функции расположены в точках с полярными координатами $z = e^{-1/12} e^{\pm j(1/12)}$, а нули — в точках с координатами $z = e^{-1/12} e^{\pm j75/12}$. Приближенное положение полюсов и нулей в z -плоскости и амплитудная характеристика цифрового фильтра показаны на фиг. 4.14. Видно, что при использовании согласо-

ванного z -преобразования из-за эффекта наложения нули аналогового фильтра из области верхних смещаются в область нижних частот для цифрового фильтра.

Согласованное z -преобразование неприменимо также в случае, когда передаточная функция аналогового фильтра имеет только полюсы. Передаточная функция цифрового фильтра также будет иметь только полюсы, но во многих случаях она не будет соответствовать исходному аналоговому фильтру. Считается, что несколько лучшие результаты можно получить, искусственно введя в цифровой фильтр нули в точке $z = -1$, однако эту меру даже в лучшем случае следует рассматривать лишь как временную. Вообще использование инвариантного преобразования импульсной характеристики или билинейного преобразования предпочтительнее использования согласованного z -преобразования.

4.9. Обзор методов расчета аналоговых фильтров нижних частот

Значительная часть теории расчета цифровых БИХ-фильтров требует понимания методов расчета фильтров непрерывного времени. Поэтому в данном разделе будут приведены расчетные формулы для нескольких стандартных типов аналоговых фильтров, включая фильтры Баттерворта, Бесселя, Чебышева типа I и II и Кауэра (называемые также эллиптическими фильтрами). Подробный анализ достоинств и недостатков способов аппроксимации заданных характеристик, соответствующих этим фильтрам, можно найти в ряде работ, посвященных методам расчета аналоговых фильтров, поэтому ниже будут лишь кратко перечислены основные свойства фильтров каждого типа и приведены расчетные соотношения, необходимые для получения коэффициентов аналоговых фильтров.

Пусть нужно рассчитать нормированный фильтр нижних частот с частотой среза, равной $\Omega = 1$ рад/с. В качестве аппроксимируемой функции будет, как правило, использоваться квадрат амплитудной характеристики (исключением является фильтр Бесселя). Будем считать, что передаточная функция аналогового фильтра является рациональной функцией переменной s следующего вида:

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{1 + \sum_{i=1}^n a_i s^i} \quad (4.68)$$

1. Фильтры Баттерворта

Фильтры Баттерворта нижних частот характеризуются тем, что имеют максимально гладкую амплитудную характеристику в начале координат в s -плоскости. Это означает, что все существующие производные от амплитудной характеристики в начале координат равны нулю. Квадрат амплитудной характеристики нормированного (т. е. имеющего частоту среза 1 рад/с) фильтра Баттерворта равен

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\Omega^2)^n}, \quad (4.69)$$

где n — порядок фильтра. Аналитически продолжая функцию (4.69) на всю s -плоскость, получим

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (-s^2)^n}. \quad (4.70)$$

Все полюсы (4.70) находятся на единичной окружности на одинаковом расстоянии друг от друга в s -плоскости. Выразим передаточную функцию $H(s)$ через полюсы, располагающиеся в левой полуплоскости s :

$$H(s) = \frac{k_0}{\prod_{k=1}^n (s - s_k)}, \quad (4.71)$$

где

$$s_k = e^{j\pi[1/2 + (2k-1)/2n]}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (4.72)$$

а k_0 — константа нормирования. Используя формулы (4.69) и (4.72), можно сформулировать несколько свойств фильтров Баттерворта нижних частот:

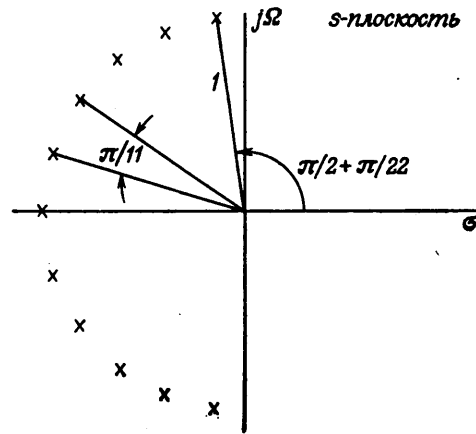
1. Фильтры Баттерворта имеют только полюсы (все нули передаточных функций этих фильтров расположены на бесконечности).

2. На частоте $\Omega = 1$ рад/с коэффициент передачи фильтров Баттерворта равен $1/\sqrt{2}$ (т. е. на частоте среза их амплитудная характеристика спадает на 3 дБ).

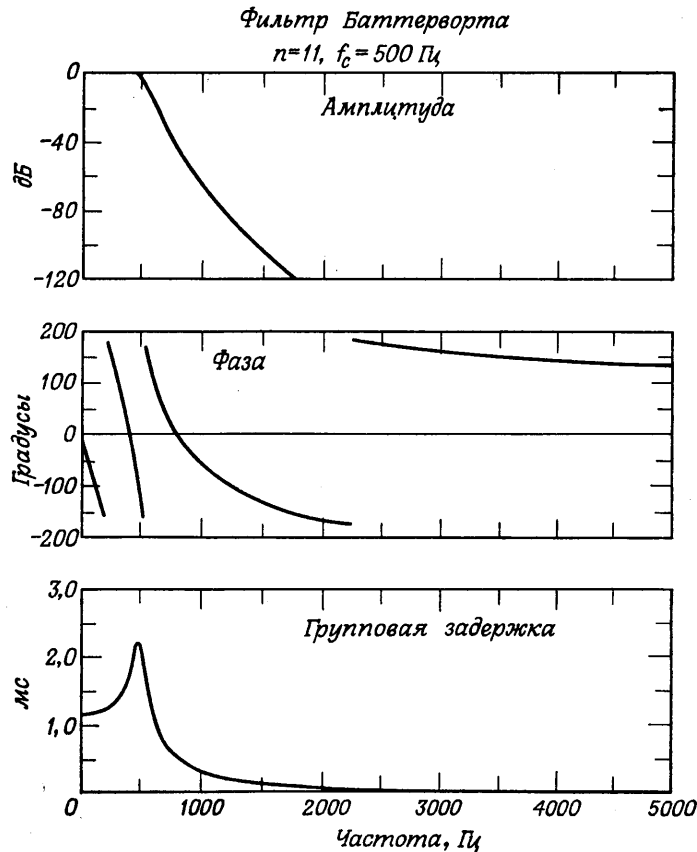
3. Порядок фильтра n полностью определяет весь фильтр.

На практике порядок фильтра Баттерворта обычно рассчитывают из условия обеспечения определенного ослабления на некоторой заданной частоте $\Omega_t > 1$. Порядок фильтра, обеспечивающий на частоте $\Omega = \Omega_t$ уровень амплитудной характеристики, равный $1/A$, можно найти из соотношения

$$n = \frac{\lg(A^2 - 1)}{2 \lg \Omega_t}. \quad (4.73)$$



Фиг. 4.15. Расположение полюсов аналогового фильтра Баттерворта нижних частот.



Фиг. 4.16. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки аналогового фильтра Баттерворта нижних частот.

Пусть, например, требуется на частоте $\Omega_t = 2$ рад/с обеспечить ослабление, равное $A = 100$. Тогда

$$n = \frac{\lg(9999)}{2 \lg 2} \approx \frac{4}{2(0,301)} = 6,64.$$

Округлив n в большую сторону до целого числа, найдем, что заданное ослабление обеспечит фильтр Баттерворта 7-го порядка.

Пример 1. Рассчитать фильтр Баттерворта с ослаблением не менее 66 дБ на частоте $\Omega = 2000$ л рад/с и с ослаблением 3 дБ на частоте $\Omega = 1000$ л рад/с.

Решение. Используя в качестве расчетных характеристик $1/A = 0,0005$ (что соответствует ослаблению на 66 дБ) и $\Omega_t = 2$, получим $n = 10,97$. Округление дает $n = 11$. На фиг. 4.15 показано расположение полюсов рассчитанного фильтра Баттерворта в s -плоскости. Амплитудная (в логарифмическом масштабе) и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки этого фильтра представлены на фиг. 4.16.

2. Фильтры Бесселя

Фильтры Бесселя характеризуются максимально гладкой характеристикой групповой задержки в начале координат в s -плоскости. Переходная характеристика фильтров Бесселя имеет весьма малый выброс (обычно менее 1%), причем и импульсная и амплитудная характеристики стремятся к гауссовой кривой по мере увеличения порядка фильтра. Можно показать, что при дискретизации непрерывных фильтров Бесселя методами, рассматриваемыми в данной главе, характерное для этих фильтров свойство максимальной гладкости характеристики групповой задержки, вообще говоря, не сохраняется. Подробно этот вопрос изложен в статье Тайрана.

Передачная функция фильтров Бесселя записывается в виде

$$H(s) = \frac{d_0}{B_n(s)}, \quad (4.74)$$

где $B_n(s)$ — функция Бесселя n -го порядка, а d_0 — константа нормирования, равная

$$d_0 = \frac{(2n)!}{2^n n!}. \quad (4.75)$$

Появление функций Бесселя в знаменателе (4.74) является результатом усечения при представлении функции единичной задержки e^{-s} в виде цепной дроби. Функции Бесселя удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению:

$$B_n(s) = (2n - 1) B_{n-1}(s) + s^2 B_{n-2}(s) \quad (4.76)$$

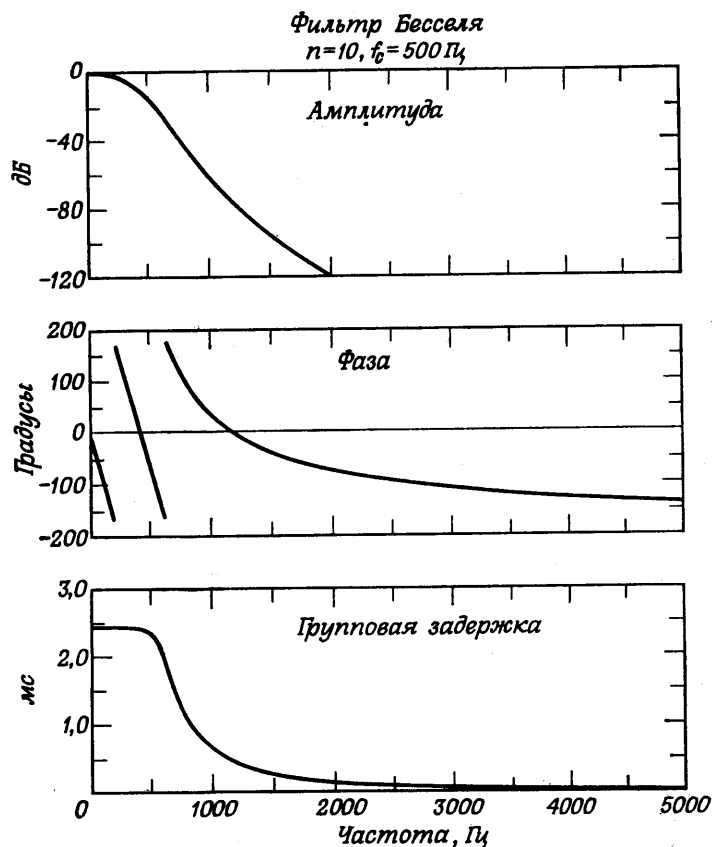
с начальными условиями $B_0(s) = 1$ и $B_1(s) = s + 1$. Эти функции можно также представить в виде

$$B_n(s) = \sum_{k=0}^n d_k s^k, \quad (4.77)$$

где

$$d_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k} k! (n-k)!}, \quad k=0, 1, \dots, n. \quad (4.78)$$

Можно показать, что фильтры Бесселя имеют только полюсы, которые расположены на окружности с центром на действительной положительной полуоси s -плоскости.



Фиг. 4.17. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки аналогового фильтра Бесселя нижних частот.

В отличие от фильтров Баттерворта частота среза фильтров Бесселя Ω_c зависит от их порядка, что затрудняет работу с ними. Частоту среза фильтра Бесселя n -го порядка можно найти, анализируя поведение его амплитудной характеристики на высоких частотах. Из формул (4.75) и (4.78) получим

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} |H(j\Omega)| \rightarrow \frac{d_0}{d_n \Omega^n} = \frac{d_0}{2\Omega^n}. \quad (4.79)$$

Чтобы определить асимптотическую частоту среза, найдем такую частоту Ω_c , на которой $|H(j\Omega)| = 1/2$. Соотношение (4.79) дает

$$|H(j\Omega_c)| \rightarrow \frac{1}{2} = \frac{d_0}{2\Omega_c^n}, \quad (4.80)$$

откуда

$$\Omega_c = d_0^{1/n}. \quad (4.81)$$

Для нормирования Ω_c к величине 1 рад/с разделим все корни фильтра на $d_0^{1/n}$. При этом задержка в фильтре вместо 1 становится равной $d_0^{1/n}$, а уровень амплитудной характеристики на частоте 1 рад/с будет уменьшаться при увеличении порядка фильтра n .

Обычно фильтры Бесселя рассчитывают, задавая порядок фильтра n и частоту среза и отыскивая корни по таблице.

На фиг. 4.17 в качестве примера приведены амплитудная (в логарифмическом масштабе) и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки фильтра Бесселя нижних частот 10-го порядка. Асимптотическая частота среза этого фильтра равна 1000 л рад/с (т. е. 500 Гц).

3. Фильтры Чебышева

Отличительной чертой фильтров Чебышева является наименьшая величина максимальной ошибки аппроксимации в заданной полосе частот. В действительности ошибка аппроксимации представляется в заданной полосе равновеликими пульсациями, т. е. она флуктуирует между максимумами и минимумами равной величины. В зависимости от того, где минимизируется ошибка аппроксимации — в полосе пропускания или в полосе непропускания, — различают фильтры Чебышева типа I и II.

Фильтры Чебышева типа I имеют только полюсы и обеспечивают равновеликие пульсации амплитудной характеристики в полосе пропускания и монотонное изменение ослабления в полосе непропускания. Квадрат амплитудной характеристики фильтра Чебышева типа I n -го порядка описывается выражением

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_n^2(\Omega)}, \quad (4.82)$$

где $T_n(\Omega)$ — полином Чебышева n -го порядка, по определению равный

$$T_n(\Omega) = \begin{cases} \cos(n \arccos \Omega), & |\Omega| \leq 1, \\ \text{ch}(n \text{ Arch } \Omega), & |\Omega| > 1, \end{cases} \quad (4.83)$$

а ε — параметр, характеризующий пульсации в полосе пропускания.

Свойство оптимальности фильтров Чебышева типа I порядка n заключается в том, что не существует какого-либо другого фильтра n -го порядка, содержащего только полюсы, который имел бы такие же или лучшие характеристики и в полосе пропускания, и в полосе непропускания. Другими словами, если какой-либо фильтр n -го порядка, содержащий только полюсы, имеет в полосе пропускания лучшие характеристики по сравнению с фильтром Чебышева типа I порядка n , то в полосе непропускания характеристики этого фильтра наверняка будут хуже, чем у фильтра Чебышева.

Фильтры Чебышева типа II (иногда их называют также обратными фильтрами Чебышева) обеспечивают монотонное изменение ослабления в полосе пропускания (максимально гладкое при $\Omega = 0$) и равновеликие пульсации в полосе непропускания. Нули фильтров этого типа располагаются на мнимой оси в s -плоскости, а полюсы — в левой полуплоскости. Квадрат амплитудной характеристики фильтров Чебышева типа II порядка n можно представить следующим образом:

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 [T_n(\Omega_r)/T_n(\Omega_r/\Omega)]^2}, \quad (4.84)$$

где Ω_r — наименьшая частота, на которой в полосе непропускания достигается заданный уровень ослабления.

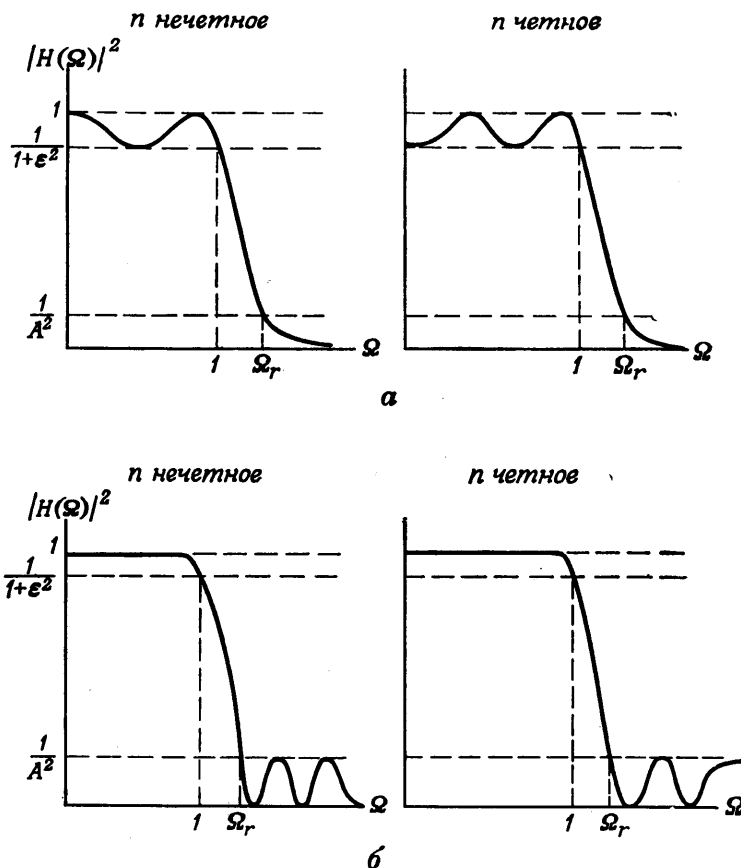
На фиг. 4.18 показано поведение квадрата амплитудной характеристики для фильтров Чебышева типа I и II при четных и нечетных n . Во всех этих фильтрах граница полосы пропускания находится при $\Omega = 1$, где $|H(1)|^2 = 1/(1 + \varepsilon^2)$, а граница полосы непропускания расположена при $\Omega = \Omega_r$, где $|H(\Omega_r)|^2 = 1/A^2$.

Фильтр Чебышева типа I имеет простые полюсы в точках $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$, где $k = 1, 2, \dots, n$, которые лежат в s -плоскости на эллипсе, уравнение которого имеет вид

$$\frac{\sigma_k^2}{\text{sh}^2 \varphi} + \frac{\Omega_k^2}{\text{ch}^2 \varphi} = 1. \quad (4.85)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma_k &= -\text{sh } \varphi \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \\ \Omega_k &= \text{ch } \varphi \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \end{aligned} \quad (4.86)$$



Фиг. 4.18. Общий вид функции квадрата амплитудной характеристики аналоговых фильтров Чебышева нижних частот типа I и II. а — фильтр Чебышева типа I; б — фильтр Чебышева типа II.

$$\begin{aligned} \text{sh } \varphi &= \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \\ \text{ch } \varphi &= \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \end{aligned} \quad (4.87)$$

и

$$\gamma = \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right)^{1/n}. \quad (4.88)$$

Фильтры Чебышева типа II имеют и полюсы, и нули. Нули являются чисто мнимыми и находятся в точках

$$s_k = j \frac{\Omega_r}{\cos \{[(2k-1)/2n]\pi\}}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.89)$$

(Отметим, что при нечетных n нуль с номером $k = (n + 1)/2$ находится на бесконечности.) Полюсы фильтров типа II можно найти, вычислив координаты особых точек знаменателя передаточной функции (4.84).

Простые преобразования дают для полюсов $s_k = \sigma_k + j\Omega_k$ ($k = 1, 2, \dots$) следующие выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_k &= \frac{\Omega_r \alpha_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2}, \\ \Omega_k &= \frac{-\Omega_r \beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2},\end{aligned}\quad (4.90)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_k &= -\operatorname{sh} \varphi \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \\ \beta_k &= \operatorname{ch} \varphi \cos \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right],\end{aligned}\quad (4.91)$$

причем

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} \varphi &= \frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2}, \\ \operatorname{ch} \varphi &= \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2}\end{aligned}\quad (4.92)$$

и

$$\gamma = (A + \sqrt{A^2 - 1})^{1/n}. \quad (4.93)$$

Фильтры Чебышева типа I и II полностью определяются любыми тремя из следующих четырех параметров:

- 1) n (порядок фильтра);
- 2) ε (параметр, характеризующий пульсации в полосе пропускания, см. фиг. 4.18);
- 3) Ω_r (наименьшая частота, на которой в полосе непропускания достигается заданное ослабление, см. фиг. 4.18);
- 4) A (параметр, характеризующий ослабление в полосе непропускания, см. фиг. 4.18).

Порядок фильтра Чебышева n , необходимый для обеспечения заданных значений ε , A и Ω_r , определяется с помощью формулы

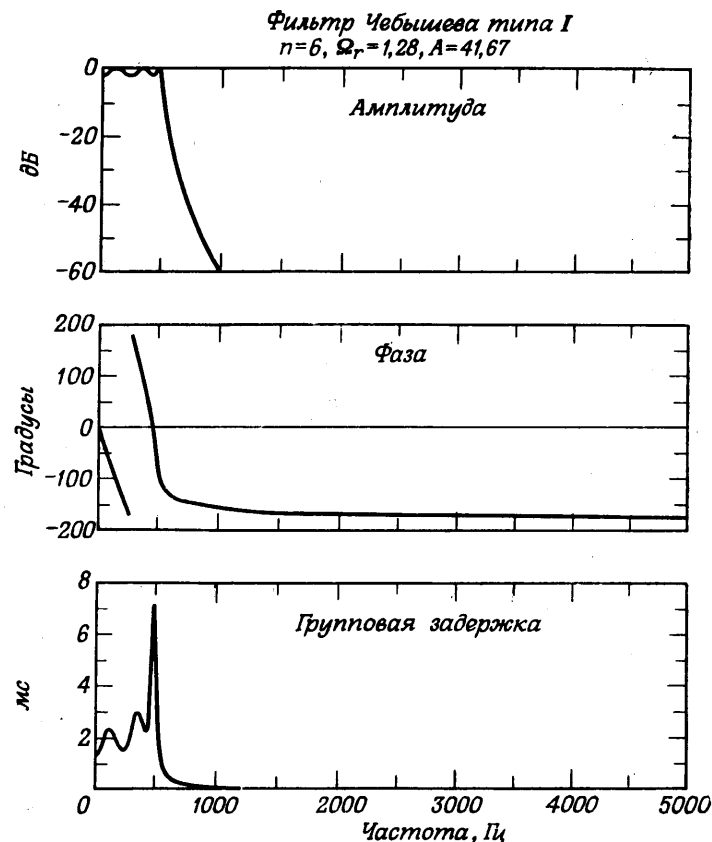
$$n = \frac{\lg(g + \sqrt{g^2 - 1})}{\lg(\Omega_r + \sqrt{\Omega_r^2 - 1})}, \quad (4.94)$$

где

$$g = \sqrt{\frac{A^2 - 1}{\varepsilon^2}}. \quad (4.95)$$

Пример 2. Рассчитать фильтр Чебышева минимального порядка, удовлетворяющий следующим условиям:

- пульсации в полосе пропускания равны 2 дБ;
- переходное отношение $1/\Omega_r = 0,781$;



Фиг. 4.19. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристики групповой задержки аналогового фильтра Чебышева нижних частот типа I.

ослабление в полосе непропускания 30 дБ.

Решение. Используя фиг. 4.18, найдем параметры фильтра ε , A и Ω_r по заданным характеристикам

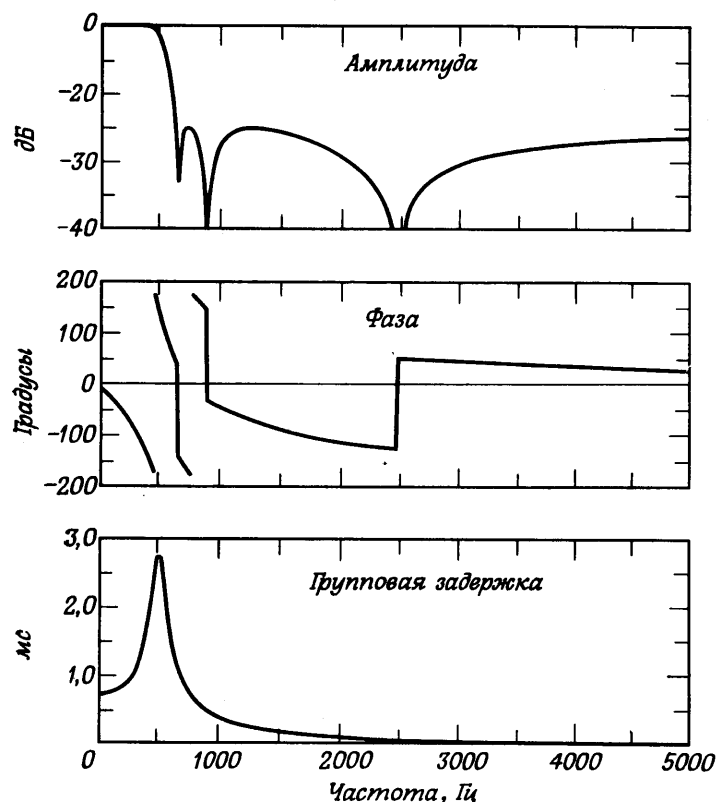
$$-2 \text{ дБ} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}, \quad \varepsilon = 0,764,$$

$$-30 \text{ дБ} = 20 \lg \left(\frac{1}{A} \right), \quad A = 31,62,$$

$$\Omega_r = \frac{1}{0,781} = 1,28.$$

Затем по формуле (4.95) получим $g = 41,33$, а по формуле (4.94) вычислим значение $n = 6,03$.

Фильтр Чебышева типа II



Фиг. 4.20. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки аналогового фильтра Чебышева нижних частот типа II.

На фиг. 4.19 и 4.20 представлены основные характеристики (амплитудная в логарифмическом масштабе, фазовая и групповой задержки) фильтров Чебышева типа I и II, удовлетворяющие условиям, перечисленным в примере 2. Оба фильтра имеют частоту среза $\Omega_c = 1000\pi$ рад/с (т. е. $f_c = 5000$ Гц). Из сопоставления фиг. 4.19 и 4.20 видно, что поведение характеристики групповой задержки в полосе пропускания для фильтра типа II вообще значительно лучше, чем для фильтра типа I. Это связано с тем, что нули фильтров Чебышева типа II располагаются в s -плоскости на оси $j\Omega$, тогда как все нули фильтров Чебышева типа I находятся на бесконечности.

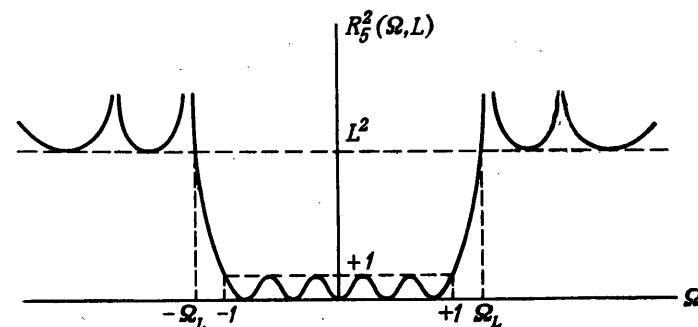
4. Эллиптические фильтры

Эллиптические фильтры характеризуются тем, что их амплитудная характеристика имеет равновеликие пульсации и в полосе пропускания, и в полосе непропускания. Можно показать, что с точки зрения минимальной ширины переходной полосы эллиптические фильтры являются оптимальными, т. е. для заданных порядка фильтра и уровня пульсаций не существует других фильтров с более быстрым переходом от полосы пропускания к полосе непропускания. Квадрат амплитудной характеристики эллиптического фильтра нижних частот записывается в виде

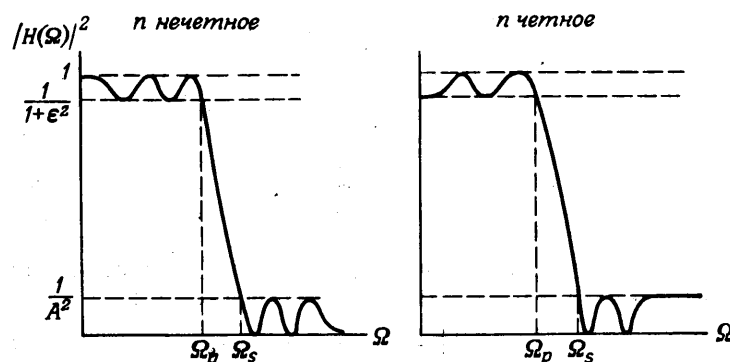
$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\Omega, L)} \quad (4.96)$$

где $R_n(\Omega, L)$ — рациональная функция Чебышева, а L — параметр, характеризующий пульсации функции $R_n(\Omega, L)$. Проанализируем свойства эллиптических фильтров, используя фиг. 4.21, где представлена типичная функция $R_n^2(\Omega, L)$. Видно, что в полосе пропускания $-1 \leq \Omega \leq 1$ эта функция осциллирует между 0 и 1, а, начиная с частоты Ω_L , она осциллирует между L^2 и ∞ . При изменении параметра L величина Ω_L также будет меняться. Именно на этом свойстве рациональных функций Чебышева основана методика расчета фильтров с произвольным ослаблением и в полосе пропускания, и в полосе непропускания. Фактически можно выбрать любые три из четырех параметров фильтра (порядок, ослабление в полосе пропускания, ослабление в полосе непропускания и переходное отношение, или, что то же самое, частота среза Ω_L), и четвертый из них определяется однозначно.

Изучение свойств функции $R_n(\Omega, L)$ требует знания теории эллиптических функций Якоби, детальное изложение которой увело бы нас слишком далеко. Поэтому, отослав заинтересованного читателя к книге Даниэльса, ограничимся тем, что сначала представим расчетное соотношение, позволяющее найти порядок эллип-



Фиг. 4.21. Типичная рациональная функция Чебышева.



Фиг. 4.22. Общий вид квадрата амплитудной характеристики аналогового эллиптического фильтра нижних частот.

тического фильтра, обеспечивающего заданные величины уровня пульсаций и переходного отношения, а после этого приведем в качестве примера характеристики типичного эллиптического фильтра. На фиг. 4.22 показано поведение квадрата амплитудной характеристики типичных эллиптических фильтров при нечетном и четном значениях n . Там же представлены параметры пульсаций ϵ и A . Видно, что для эллиптических фильтров они определяются так же, как и для фильтров Чебышева. Переходное отношение k определяется следующим образом:

$$k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s}, \quad (4.97)$$

где Ω_p — граничная частота полосы пропускания, а Ω_s — граничная частота полосы непропускания. Если ввести параметр k_1 , равный

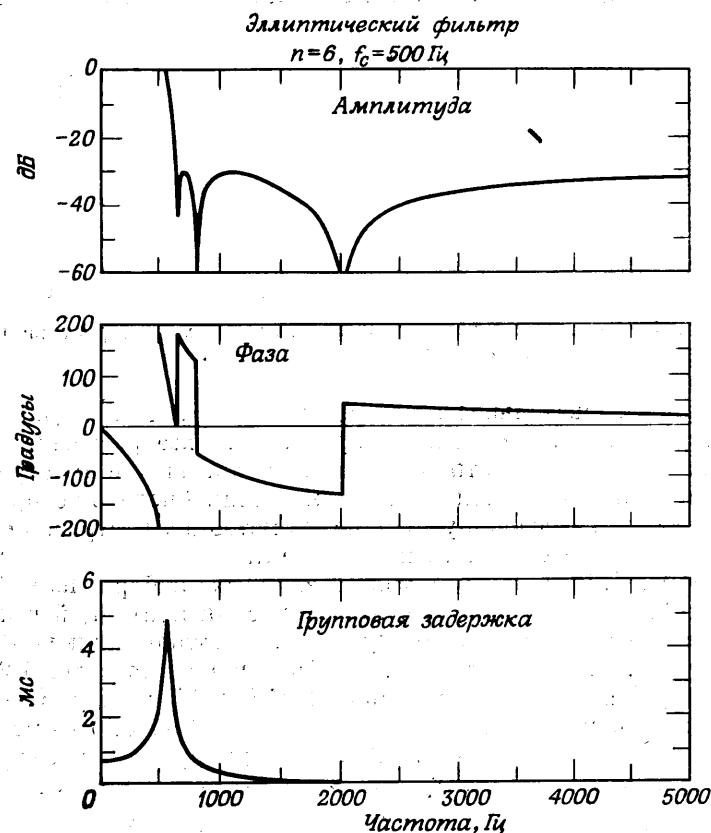
$$k_1 = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}, \quad (4.98)$$

то порядок эллиптического фильтра n , удовлетворяющего заданным значениям ϵ , A , Ω_p и Ω_s , можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{K(k) K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1) K(\sqrt{1-k^2})}, \quad (4.99)$$

где $K(\cdot)$ — полный эллиптический интеграл 1-го рода. В разд. 4.10 описана графическая методика нахождения порядка эллиптических фильтров Чебышева и Баттерворта, удовлетворяющих заданным характеристикам.

Амплитудная (в логарифмическом масштабе) и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки эллиптического фильтра нижних частот представлены на фиг. 4.23.



Фиг. 4.23. Амплитудная и фазовая характеристики, а также характеристика групповой задержки аналогового эллиптического фильтра нижних частот.

Порядок фильтра $n = 6$, частота среза $\Omega_c = 1000 \pi$ рад/с ($f_c = 500$ Гц), переходное отношение $k = 0,781$, характеристики пульсаций $A = 31,62$ и $\epsilon = 0,01$.

4.10. Расчетные диаграммы фильтров нижних частот

Выше уже были приведены все расчетные формулы, необходимые для проектирования фильтров нижних частот, однако было бы весьма полезно и информативно представить соотношения между параметрами фильтров графически. Поскольку число этих параметров в общем случае равно пяти (из них два параметра характеризуют пульсации, два дают граничные частоты и один — порядок фильтра), то ясно, что представить соотношения между всеми параметрами с помощью одной диаграммы не удастся. Используя,