

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ДВУМЕРНОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

7.1. Введение

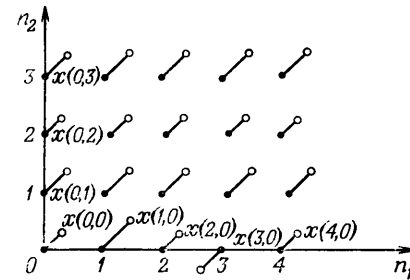
Существует множество сигналов, которые в принципе являются двумерными и обрабатывать которые необходимо именно двумерными методами. К ним относятся различные изображения, получаемые, например, при метеосъемках и аэрофотосъемках, рентгеновские снимки, сделанные в медицинских целях, сейсмограммы, результаты гравиметрических и магнитных измерений, а также снимки, получаемые с помощью электронного микроскопа и используемые для анализа пространственной структуры сложных биологических молекул. Хотя двумерные сигналы и можно обрабатывать с помощью одномерных систем, в целом предпочтительнее использовать двумерные системы. Многие основополагающие идеи одномерной обработки легко обобщаются на случай двумерной обработки. В то же время некоторые весьма важные понятия, относящиеся к одномерным системам, нельзя непосредственно использовать для двумерных систем. Целью данной главы является изучение основных идей и методов двумерной обработки сигналов, а также иллюстрация их применения на примере двумерной фильтрации.

7.2. Двумерные сигналы

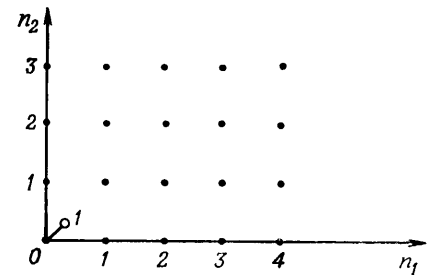
Пусть $x(n_1, n_2)$ является двумерной последовательностью, причем n_1 и n_2 — целые переменные. Как и в одномерном случае, обозначение $x(n_1, n_2)$ часто соответствует дискретизованному непрерывному двумерному сигналу $x(s, t)$, т. е.

$$x(n_1, n_2) = x(n_1 T_1, n_2 T_2) = x(s, t) |_{s=n_1 T_1, t=n_2 T_2}. \quad (7.1)$$

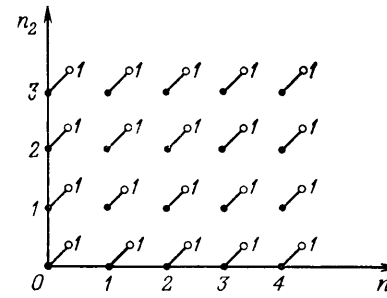
Двумерную последовательность графически представить довольно сложно, поэтому в данной главе по мере необходимости будут использоваться пространственные изображения. Например, последовательность $x(n_1, n_2)$, $0 \leq n_1, n_2 \leq \infty$, можно изобразить так, как показано на фиг. 7.1, причем значения $x(n_1, n_2)$ задаются высотой отрезков, исходящих из точек с координатами (n_1, n_2) .



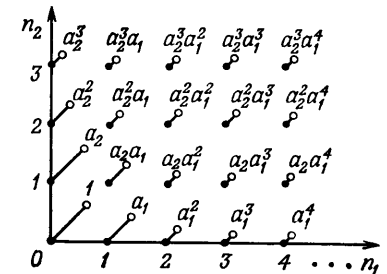
Фиг. 7.1. Пространственное изображение двумерного сигнала $x(n_1, n_2)$.



Фиг. 7.2. Двумерный цифровой единичный импульс.



Фиг. 7.3. Двумерный цифровой единичный скачок.



Фиг. 7.4. Двумерная экспоненциальная последовательность.

Несколько важных двумерных последовательностей изображены на фиг. 7.2—7.4. К ним относятся:

1. Цифровой единичный импульс (или единичный отсчет)

$$u_0(n_1, n_2) = \begin{cases} 1 & \text{при } n_1 = n_2 = 0, \\ 0 & \text{при других } n_1, n_2. \end{cases} \quad (7.2)$$

2. Цифровой единичный скачок

$$u_{-1}(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & n_1, n_2 \geq 0, \\ 0, & n_1 \text{ или } n_2 < 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

3. Экспоненциальная последовательность

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} a_1^{n_1} a_2^{n_2}, & n_1, n_2 \geq 0, \\ 0, & n_1 \text{ или } n_2 < 0. \end{cases} \quad (7.4)$$

4. Комплексная синусоида

$$x(n_1, n_2) = e^{j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)}, \quad -\infty \leq n_1, n_2 \leq \infty. \quad (7.5)$$

Как было показано выше, двумерный единичный скачок связан с двумерным единичным импульсом соотношением

$$u_{-1}(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^n \sum_{m_2=-\infty}^n u_0(m_1, m_2). \quad (7.6)$$

7.3. Двумерные системы

Основная теорема о свертке для линейных систем с постоянными параметрами остается в силе и для двумерных систем. Это означает, что если на вход ЛПП-системы с импульсной характеристикой $h(n_1, n_2)$ поступает последовательность $x(n_1, n_2)$, то последовательность $y(n_1, n_2)$ на выходе системы можно найти следующим образом:

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2) = \quad (7.7)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = \quad (7.8)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} x(m_1, m_2) h(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \quad (7.9)$$

В большинстве случаев (за исключением простейших) использовать эти формулы весьма непросто. Чтобы показать это, рассмотрим следующий пример:

Пример 1. Дана ЛПП-система с импульсной характеристикой

$$h(n_1, n_2) = a^{n_1 n_2}, \quad -\infty \leq n_1, n_2 \leq \infty.$$

Входная последовательность имеет вид

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n_1, n_2 \leq 2, \\ 0 & \text{при других } n_1, n_2. \end{cases}$$

Необходимо найти последовательность $y(n_1, n_2)$ на выходе системы.

Решение. Используя формулы (7.8) и (7.9), получим

$$y(n_1, n_2) = \sum_{m_1=0}^2 \sum_{m_2=0}^2 a^{(n_1-m_1)(n_2-m_2)}.$$

Вычисление суммы в правой части осложняется тем, что член $a^{m_1 m_2}$ нельзя представить произведением вида $\alpha(m_1)\beta(m_2)$. Таким образом, при нахождении $y(n_1, n_2)$ двумерную сумму приходится вычислять непосредственным сложением всех ее членов. Чтобы

закончить рассмотрение примера, выполним это суммирование:

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) &= a^{n_1 n_2} + a^{n_1(n_2-1)} + a^{n_1(n_2-2)} + \\ &+ a^{(n_1-1)n_2} + a^{(n_1-1)(n_2-1)} + a^{(n_1-1)(n_2-2)} + \\ &+ a^{(n_1-2)n_2} + a^{(n_1-2)(n_2-1)} + a^{(n_1-2)(n_2-2)}. \end{aligned}$$

Сложность вычисления свертки даже в простых случаях дает некоторое представление о тех трудностях, с которыми приходится сталкиваться при работе с двумерными системами.

7.4. Физическая реализуемость. Разделимость. Устойчивость

Двумерный фильтр называют *физически реализуемым*, если его импульсная характеристика удовлетворяет условию

$$h(n_1, n_2) = 0, \quad n_1, n_2 < 0. \quad (7.10)$$

Фильтр называют *разделимым*, если его импульсную характеристику можно представить в виде произведения двух одномерных функций, т. е.

$$h(n_1, n_2) = g(n_1) f(n_2). \quad (7.11)$$

Если условие (7.11) не выполняется, фильтр называют *неразделимым*. Достоинством разделимых фильтров является то, что для них двумерную свертку (7.8) можно вычислить путем последовательного нахождения одномерных сверток. Это нетрудно показать, переписав соотношение (7.8) в виде

$$y(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} g(m_1) f(m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = \quad (7.12)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} g(m_1) \left[\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} f(m_2) x(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \right] = \quad (7.13)$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} g(m_1) a(n_1 - m_1, n_2), \quad (7.14)$$

где $a(n_1 - m_1, n_2)$ — последовательность одномерных сверток, получаемых в процессе нахождения сумм в квадратных скобках формулы (7.13), которые соответствуют фиксированным m_1 . Из формулы (7.14) следует, что выходную последовательность $y(n_1, n_2)$ можно получить, двукратно выполняя операции одномерной свертки.

Легко понять, что если разделимыми являются как импульсная характеристика $h(n_1, n_2)$, так и входная последовательность $x(n_1, n_2)$, то и выходная последовательность $y(n_1, n_2)$ также будет разделимой. В этом случае с учетом соотношений (7.8) и (7.11)

получим

$$y(n_1, n_2) = \left[\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} g(m_1) b(n_1 - m_1) \right] \left[\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} f(m_2) c(n_2 - m_2) \right] = (7.15)$$

$$= \alpha(n_1) \beta(n_2), \quad (7.16)$$

где

$$x(n_1, n_2) = b(n_1) c(n_2). \quad (7.17)$$

Двумерные фильтры являются *устойчивыми* (для них все элементы выходной последовательности будут ограничены, если были ограничены все элементы входной последовательности) тогда и только тогда, когда их импульсные характеристики удовлетворяют условию

$$\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} |h(n_1, n_2)| < \infty. \quad (7.18)$$

Можно показать, что, как и в одномерном случае, условие устойчивости (7.18) является и необходимым, и достаточным.

Одна из трудностей, связанных с использованием условия устойчивости (7.18), заключается в сложности нахождения суммы при произвольных $h(n_1, n_2)$. В связи с этим желательны и даже необходимы другие методы количественной оценки устойчивости, которые будут рассмотрены в последующих разделах данной главы.

7.5. Двумерные разностные уравнения

Как и в одномерном случае, двумерный ЛПП-фильтр обычно можно описать линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами, которое связывает входную и выходную последовательности. Для физически реализуемого фильтра такое разностное уравнение в самом общем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \sum_{m_1=0}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} \alpha_{m_1, m_2} y(n_1 - m_1, n_2 - m_2) = \\ = \sum_{l_1=0}^{L_1} \sum_{l_2=0}^{L_2} \beta_{l_1, l_2} x(n_1 - l_1, n_2 - l_2), \end{aligned} \quad (7.19)$$

причем набор постоянных коэффициентов $\{\alpha_{m_1, m_2}\}$ и $\{\beta_{l_1, l_2}\}$ определяет конкретный фильтр. Для полного описания фильтра необходимо задать также набор начальных условий. Уравнение (7.19) можно записать в виде рекуррентного соотношения. Для этого текущий выходной отсчет $y(n_1, n_2)$ следует выразить через предшествующие выходные и входные отсчеты и текущий входной

отсчет. Такое рекуррентное соотношение (при $\alpha_{0,0} = 1$) имеет вид

$$\begin{aligned} y(n_1, n_2) = \sum_{l_1=0}^{L_1} \sum_{l_2=0}^{L_2} \beta_{l_1, l_2} x(n_1 - l_1, n_2 - l_2) - \\ - \sum_{\substack{m_1=0 \\ (m_1 \text{ и } m_2 \neq 0 \text{ одновременно})}}^{M_1} \sum_{m_2=0}^{M_2} \alpha_{m_1, m_2} y(n_1 - m_1, n_2 - m_2). \end{aligned} \quad (7.20)$$

В качестве примера рассмотрим фильтр, описываемый разностным уравнением

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) + \alpha_{1,0} y(n_1 - 1, n_2) + \alpha_{1,1} y(n_1 - 1, n_2 - 1) \quad (7.21)$$

с начальными условиями

$$y(n_1, n_2) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} n_1 < 0, \\ n_2 < 0. \end{cases} \quad (7.22)$$

Если на вход фильтра поступает единичный импульс, то выходная последовательность будет равна

$$y(n_1, n_2) = \begin{cases} C_{n_1}^{n_2} (\alpha_{1,1})^{n_2} (\alpha_{1,0})^{n_1 - n_2} & \text{при} \quad \begin{cases} 0 \leq n_2 \leq n_1, \\ 0 \leq n_1 < \infty, \end{cases} \\ 0 & \text{при других } n_1, n_2. \end{cases} \quad (7.23)$$

Результат (7.23) легко проверить, проведя непосредственные вычисления $y(n_1, n_2)$ при нескольких значениях (n_1, n_2) с помощью формул (7.21) и (7.22):

$$\begin{aligned} y(0, 0) &= x(0, 0) = 1, \\ y(1, 0) &= \alpha_{1,0} y(0, 0) = \alpha_{1,0}, \\ y(2, 0) &= \alpha_{1,0} y(1, 0) = (\alpha_{1,0})^2, \\ y(0, 1) &= 0, \\ y(1, 1) &= \alpha_{1,1} y(0, 0) = \alpha_{1,1}, \\ y(0, 2) &= 0, \\ y(1, 2) &= 0, \\ y(2, 1) &= \alpha_{1,0} y(1, 1) + \alpha_{1,1} y(1, 0) = 2\alpha_{1,0} \alpha_{1,1}, \\ y(3, 1) &= \alpha_{1,0} y(2, 1) + \alpha_{1,1} y(2, 0) = 3(\alpha_{1,0})^2 \alpha_{1,1}. \end{aligned}$$

Методы решения двумерных разностных уравнений относительно обеих переменных аналогичны методам решения одномерных уравнений и рассматриваться не будут.

7.6. Частотные методы

При анализе двумерных ЛПП-систем крайне важную роль играют двумерные синусоидальные сигналы, поскольку, как и в одномерном случае, они являются собственными функциями систем

Так, если на вход двумерной системы поступает синусоидальный сигнал

$$x(n_1, n_2) = e^{j\omega_1 n_1} e^{j\omega_2 n_2} \begin{cases} -\infty \leq n_1 \leq \infty, \\ -\infty \leq n_2 \leq \infty, \end{cases} \quad (7.24)$$

то, согласно теореме о свертке, выходная последовательность будет равна

$$y(n_1, n_2) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) e^{j\omega_1(n_1-m_1)} e^{j\omega_2(n_2-m_2)} = \quad (7.25)$$

$$= e^{j\omega_1 n_1} e^{j\omega_2 n_2} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) e^{-j\omega_1 m_1} e^{-j\omega_2 m_2} = \quad (7.26)$$

$$= x(n_1, n_2) H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}). \quad (7.27)$$

Здесь функция $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ представляет собой частотную характеристику двумерной системы, которая имеет вид двумерного ряда Фурье

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} h(m_1, m_2) e^{-j\omega_1 m_1} e^{-j\omega_2 m_2}, \quad (7.28)$$

так что коэффициенты фильтра $h(n_1, n_2)$ можно вычислить по известной формуле

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) e^{j\omega_1 n_1} e^{j\omega_2 n_2} d\omega_1 d\omega_2. \quad (7.29)$$

Частотная характеристика $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ обладает несколькими интересными свойствами. Ясно, что она периодична по обеим осям, т. е.

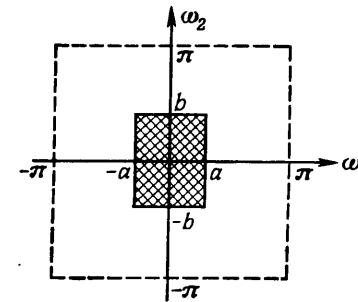
$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H[e^{j(\omega_1+l \cdot 2\pi)}, e^{j(\omega_2+m \cdot 2\pi)}], \quad -\infty \leq l, m \leq \infty. \quad (7.30)$$

Если отсчеты импульсной характеристики принимают только действительные значения, то частотная характеристика будет удовлетворять следующему условию:

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H^*(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2}). \quad (7.31)$$

Это означает, что поведение частотной характеристики $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ при $0 \leq \omega_1 \leq \pi$, $0 \leq \omega_2 \leq \pi$, т. е. в первом квадранте, полностью определяет ее поведение в третьем квадранте (и наоборот).

Продемонстрируем применение формулы (7.29) на двух важных примерах:



Фиг. 7.5. Частотная характеристика идеального двумерного фильтра нижних частот с прямоугольной областью пропускания.

Пример 2. Найти коэффициенты Фурье $h(n_1, n_2)$ для фильтра с частотной характеристикой

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1 & \text{при } \begin{cases} -a \leq \omega_1 \leq a, \\ -b \leq \omega_2 \leq b, \end{cases} \\ 0 & \text{при других } \omega_1, \omega_2, \end{cases}$$

т. е. $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = 1$ в пределах заштрихованного прямоугольника на фиг. 7.5.

Решение. Согласно равенству (7.29), находим

$$h(n_1, n_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-b}^b \int_{-a}^a e^{j\omega_1 n_1} e^{j\omega_2 n_2} d\omega_1 d\omega_2 = \left[\frac{\sin(an_1)}{\pi n_1} \right] \left[\frac{\sin(bn_2)}{\pi n_2} \right].$$

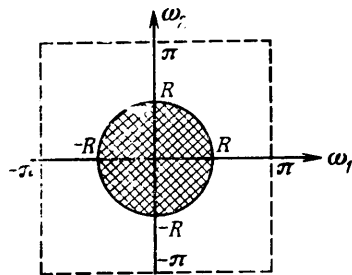
Из данного примера видно, что если частотную характеристику можно представить в виде произведения двух членов, один из которых зависит только от ω_1 , а другой — только от ω_2 , то импульсная характеристика $h(n_1, n_2)$ также будет равна произведению двух функций, одна из которых зависит только от n_1 , а вторая — только от n_2 .

Пример 3. Найти коэффициенты Фурье для фильтра с частотной характеристикой

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1, & \omega_1^2 + \omega_2^2 \leq R^2, \\ 0, & \omega_1^2 + \omega_2^2 > R^2, \end{cases}$$

т. е. $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = 1$ в заштрихованном круге на фиг. 7.6.

Решение. Легко заметить, что $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2})$ обладает круговой симметрией, т. е. $H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = f(\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2})$. Можно показать,



Фиг. 7.6. Частотная характеристика идеального двумерного фильтра нижних частот с круговой областью пропускания.

что при этом и коэффициенты Фурье также обладают круговой симметрией, т. е. $h(n_1, n_2) = g(\sqrt{n_1^2 + n_2^2})$.

Следовательно, проще всего найти $h(n_1, n_2)$, предварительно вычислив $h(n_1, 0)$ и заменив n_1 на $\sqrt{n_1^2 + n_2^2}$. Итак,

$$h(n_1, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-R}^R e^{j\omega_1 n_1} d\omega_1 \int_{-\sqrt{R^2 - \omega_1^2}}^{\sqrt{R^2 - \omega_1^2}} d\omega_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-R}^R e^{j\omega_1 n_1} 2\sqrt{R^2 - \omega_1^2} d\omega_1.$$

Введя подстановку

$$\omega_1 = R \sin \varphi,$$

откуда

$$d\omega_1 = R \cos \varphi d\varphi,$$

получим

$$h(n_1, 0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2R^2 \cos^2 \varphi e^{jRn_1 \sin \varphi} d\varphi = \frac{RJ_1(Rn_1)}{2\pi n_1}.$$

Здесь $J_1(x)$ — функция Бесселя первого порядка. Таким образом,

$$h(n_1, n_2) = \frac{RJ_1(R\sqrt{n_1^2 + n_2^2})}{2\pi\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

7.7. Двумерное z-преобразование

Полезным средством представления последовательности $x(n_1, n_2)$ является ее двумерное z-преобразование, записываемое следующим образом:

$$X(z_1, z_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}. \quad (7.32)$$

Сумма (7.32) определена в некоторой области сходимости, т. е. для некоторого интервала значений z_1 и z_2 . Часто бывает очень трудно найти область сходимости этой суммы, т. е. положение всех особых точек функции $X(z_1, z_2)$. К этому вопросу мы вернемся позднее при рассмотрении методов расчета двумерных фильтров.

Обратное z-преобразование определяется следующим образом:

$$x(n_1, n_2) = \frac{1}{(2\pi j)^2} \oint_{C_1} \oint_{C_2} X(z_1, z_2) z_1^{n_1-1} z_2^{n_2-1} dz_1 dz_2, \quad (7.33)$$

где C_1 и C_2 — некоторые замкнутые контуры интегрирования в плоскостях z_1 и z_2 .

Чтобы проиллюстрировать применение формулы (7.32) для вычисления двумерного z-преобразования, рассмотрим последовательность

$$x(n_1, n_2) = \begin{cases} K^{n_1} u_0(n_1 - n_2), & n_1, n_2 > 0, \\ 0, & n_1 \text{ или } n_2 \leq 0. \end{cases}$$

Ее z-преобразование равно

$$\begin{aligned} X(z_1, z_2) &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} K^{n_1} u_0(n_1 - n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2} = \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} K^{n_1} (z_1 z_2)^{-n_1} = \frac{1}{1 - K z_1^{-1} z_2^{-1}}, \end{aligned}$$

причем оно сходится, если

$$|K z_1^{-1} z_2^{-1}| < 1.$$

7.8. Конечные последовательности

Существует класс двумерных последовательностей, z-преобразования которых сходятся в плоскостях z_1 и z_2 везде, за исключением, быть может, точек $z_1 = 0, z_2 = 0$ или $z_1 = \infty, z_2 = \infty$. К этому классу относятся последовательности конечной длины, все элементы которых ограничены. Сходимость z-преобразования обеспечивается тем, что пределы суммирования в (7.32) конечны, а все слагаемые $x(n_1, n_2)$ ограничены, так что и произведения $x(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$ при конечных значениях z_1 и z_2 также будут ограничены. То, что z-преобразование конечных последовательностей сходится во всех точках плоскостей z_1 и z_2 , гарантирует устойчивость двумерных фильтров с импульсной характеристикой в виде конечной последовательности.

7.9. Свертка последовательностей

Нетрудно показать, что если последовательность $y(n_1, n_2)$ равна двумерной свертке входной последовательности $x(n_1, n_2)$ с импульсной характеристикой $h(n_1, n_2)$, то ее z -преобразование $Y(z_1, z_2)$ равно произведению z -преобразований свертываемых последовательностей $X(z_1, z_2)$ и $H(z_1, z_2)$. Таким образом, справедливы следующие важные соотношения:

$$x(n_1, n_2) \leftrightarrow X(z_1, z_2), \quad (7.34)$$

$$h(n_1, n_2) \leftrightarrow H(z_1, z_2), \quad (7.35)$$

$$y(n_1, n_2) = x(n_1, n_2) * h(n_1, n_2), \quad (7.36)$$

$$Y(z_1, z_2) = X(z_1, z_2) \cdot H(z_1, z_2). \quad (7.37)$$

В качестве упражнения читателю предлагается доказать справедливость соотношения (7.37). Итак, при помощи формулы (7.37) отклик $y(n_1, n_2)$ можно найти, вычислив обратное z -преобразование от произведения z -преобразований входной последовательности $x(n_1, n_2)$ и импульсной характеристики $h(n_1, n_2)$. Приведем простой пример, иллюстрирующий применение этого метода:

Пример 4. На вход двумерного ЛПП-фильтра поступает последовательность

$$x(n_1, n_2) = L^{n_1} u_0(n_1 - n_2), \quad 0 \leq n_1, n_2 \leq \infty.$$

Импульсная характеристика фильтра равна

$$h(n_1, n_2) = K^{n_1} u_0(n_1 - n_2), \quad 0 \leq n_1, n_2 < \infty.$$

Найти выходную последовательность фильтра $y(n_1, n_2)$.

Решение. Найдем сначала z -преобразования последовательностей $x(n_1, n_2)$ и $h(n_1, n_2)$:

$$X(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} L^{n_1} z_1^{-n_1} z_2^{-n_1} = \frac{1}{(1 - Lz_1^{-1}z_2^{-1})}, \quad |z_1 z_2| > L,$$

$$H(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty} K^{n_1} z_1^{-n_1} z_2^{-n_1} = \frac{1}{(1 - Kz_1^{-1}z_2^{-1})}, \quad |z_1 z_2| > K.$$

Используя соотношение (7.37), получим

$$Y(z_1, z_2) = \frac{1}{(1 - Lz_1^{-1}z_2^{-1})(1 - Kz_1^{-1}z_2^{-1})} = \frac{L/(L-K)}{1 - Lz_1^{-1}z_2^{-1}} + \frac{K/(K-L)}{1 - Kz_1^{-1}z_2^{-1}}.$$

Обратное z -преобразование можно найти по таблицам. Оно равно

$$y(n_1, n_2) = \left(\frac{L}{L-K}\right) L^{n_1} u_0(n_1 - n_2) + \left(\frac{K}{K-L}\right) K^{n_1} u_0(n_1 - n_2).$$

7.10. Двумерное ДПФ

Завершая общее описание двумерных сигналов и систем, рассмотрим коротко двумерное ДПФ и эффективный способ его вычисления с помощью одномерного БПФ.

Двумерный периодический сигнал удовлетворяет условию

$$x_p(n_1, n_2) = x_p(n_1 + m_1 N_1, n_2 + m_2 N_2), \quad (7.38)$$

где N_1 — период по первой координате, N_2 — период по второй координате, а m_1 и m_2 — произвольные целые числа. Индекс p в формуле (7.38) указывает, что сигнал периодичен. Как и в одномерном случае, двумерный периодический сигнал можно представить линейной комбинацией конечного числа комплексных экспонент, причем N_1 и N_2 кратны их периодам, т. е.

$$x_p(n_1, n_2) = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} X_p(k_1, k_2) e^{j(2\pi/N_1)n_1 k_1} e^{j(2\pi/N_2)n_2 k_2}. \quad (7.39)$$

Коэффициенты Фурье $X_p(k_1, k_2)$ представляют амплитуду составляющей $x_p(n_1, n_2)$ при $\omega_1 = (2\pi/N_1)k_1$, $\omega_2 = (2\pi/N_2)k_2$. Значения коэффициентов $X_p(k_1, k_2)$ легко найти, вычислив значения двумерного z -преобразования на одном периоде последовательности $x_p(n_1, n_2)$ на частотах ω_1 и ω_2 , что дает

$$X_p(k_1, k_2) = X(z_1, z_2) \Big|_{z_1=e^{j(2\pi/N_1)k_1}, z_2=e^{j(2\pi/N_2)k_2}} = \quad (7.40)$$

$$= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} x(n_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_1)n_1 k_1} e^{-j(2\pi/N_2)n_2 k_2}. \quad (7.41)$$

Соотношение (7.39) называют двумерным обратным дискретным преобразованием Фурье, а (7.41) — двумерным дискретным преобразованием Фурье.

Рассмотрим некоторые свойства преобразований (7.39) и (7.41). Одно из важных свойств связано с возможностью вычисления двумерных преобразований (7.39) и (7.41) с помощью последовательности одномерных ДПФ, а другое — с обобщением преобразований (7.39) и (7.41) на сигналы конечной длины. Первое свойство можно показать, переписав преобразование (7.41) в виде

$$X_p(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-j(2\pi/N_1)n_1 k_1} \left[\sum_{n_2=0}^{N_2-1} x_p(n_1, n_2) e^{-j(2\pi/N_2)n_2 k_2} \right]. \quad (7.42)$$

При изменении n_1 от 0 до $N_1 - 1$ суммы в квадратных скобках образуют N_1 одномерных ДПФ. Обозначив результат каждого из одномерных ДПФ через $g_p(n_1, k_2)$, переписем соотношение (7.41)

в виде

$$X_p(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} e^{-j(2\pi/N_1)n_1k_1} g_p(n_1, k_2). \quad (7.43)$$

Полученное соотношение снова представляет собой N_2 одномерных ДПФ, соответствующих изменению k_2 от 0 до $N_2 - 1$. Вышеизложенное легко обобщить на случай обратного ДПФ.

Второе свойство, заключающееся в том, что ДПФ полностью представляет последовательность конечной длины $x(n_1, n_2)$, легко проверить, если в формулах (7.39) и (7.41) положить значения $x_p(n_1, n_2)$ равными нулю вне области $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1, 0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$. Такие последовательности будем называть последовательностями конечной длины и обозначать через $x(n_1, n_2)$. Хотя последовательность $x(n_1, n_2)$ уже не является периодической, ее значения совпадают на одном периоде со значениями ее периодического эквивалента, так что ДПФ и обратное ДПФ дают возможность просто и точно найти коэффициенты Фурье последовательности конечной длины. Главное различие между $x(n_1, n_2)$ и периодической последовательностью $x_p(n_1, n_2)$ состоит в том, что преобразование Фурье от $x(n_1, n_2)$ является непрерывной функцией частот ω_1 и ω_2 , тогда как спектр периодической последовательности $x_p(n_1, n_2)$ состоит из линий, расположенных на кратных частотах.

Выше рассматривалось применение прямого и обратного ДПФ для фильтрации одномерных сигналов. Они могут быть использованы и в двумерном случае. По-видимому, метод быстрой свертки, основанный на алгоритме БПФ, является наиболее важным средством выполнения двумерной фильтрации.

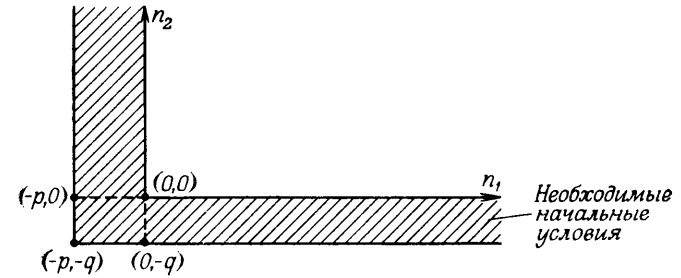
7.11. Расчет двумерных фильтров

Двумерный цифровой фильтр описывается двумерным z -преобразованием

$$H(z_1, z_2) = \frac{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j}}{\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q b_{ij} z_1^{-i} z_2^{-j}}, \quad (7.44)$$

где a_{ij} и b_{ij} — постоянные, а $b_{00} = 1$. Разностное уравнение такого фильтра имеет вид

$$y(n_1, n_2) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{ij} x(n_1 - i, n_2 - j) - \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q b_{ij} y(n_1 - i, n_2 - j), \quad 0 = i \neq j = 0, \quad 0 \leq n_1 \leq \infty, \quad 0 \leq n_2 \leq \infty, \quad (7.45)$$



Фиг. 7.7. Область задания набора начальных условий, необходимых для решения двумерного разностного уравнения.

причем предполагается, что номера (n_1, n_2) в процессе счета возрастают, т. е. фильтр является физически реализуемым. Из уравнения (7.45) видно, что для определения отклика фильтра при $n_1, n_2 \geq 0$ необходимо иметь набор начальных условий. Область задания этого набора показана на фиг. 7.7 штриховкой.

7.12. БИХ-фильтры

При проектировании фильтров с импульсными характеристиками бесконечной длины необходимо выбрать коэффициенты a_{ij} , b_{ij} таким образом, чтобы характеристика получающегося фильтра аппроксимировала заданную характеристику фильтра, а сам фильтр был бы устойчивым. Обеспечение обоих условий связано с большими трудностями, так что простой методики расчета БИХ-фильтров пока не существует. Прежде чем перейти к изучению конкретных методов расчета двумерных БИХ-фильтров, целесообразно обсудить причины возникающих трудностей. С точки зрения проектирования фильтров важным свойством одномерных z -преобразований является возможность представления многочленов высоких степеней в виде произведения многочленов более низких степеней. Так, полином

$$P(z) = z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4 \quad (7.46)$$

можно разложить на множители, что дает

$$P(z) = (z - \beta_1)(z - \beta_2)(z - \beta_3)(z - \beta_4). \quad (7.47)$$

Важность этого разложения трудно переоценить. Оно дает возможность проектировщику проверить устойчивость фильтров высокого порядка с помощью простых критериев, использующих полиномы более низкого порядка. Кроме того, оно дает удобный способ построения фильтров путем последовательного соединения фильтров более низкого порядка, что существенно уменьшает

трудности, связанные с чувствительностью к неточностям коэффициентов, которые характерны для фильтров с передаточными функциями, являющимися полиномами высоких степеней.

Для двумерных полиномов описанное выше свойство не сохраняется, так что в общем случае двумерный полином $P(z_1, z_2)$ нельзя представить в виде произведения простых многочленов более низких степеней. Главным следствием этого свойства двумерных полиномов является то, что, за исключением простейших случаев, практически невозможно проверить устойчивость двумерных БИХ-фильтров. Более того, из этого свойства следует, что неустойчивый фильтр нельзя сделать устойчивым, включив последовательно с ним соответствующий всепропускающий фильтр. И наконец, оно означает, что двумерные БИХ-фильтры нельзя построить путем последовательного соединения фильтров более низкого порядка. Таким образом, даже если удастся рассчитать устойчивый БИХ-фильтр высокого порядка, найти подходящую схему его реализации будет весьма непросто.

В последующих разделах описаны возможности проверки устойчивости БИХ-фильтров методами прямого вычисления.

7.13. Устойчивость БИХ-фильтров

Для проверки устойчивости БИХ-фильтров по двумерному z -преобразованию их импульсных характеристик было предложено несколько методов. Однако на практике их применение часто связано с трудностями и занимает много времени. Приводимая ниже теорема Шенкса представляет один из методов проверки устойчивости БИХ-фильтров.

Первая теорема устойчивости. Физически реализуемый БИХ-фильтр с z -преобразованием импульсной характеристики $H(z_1, z_2) = A(z_1, z_2)/B(z_1, z_2)$ устойчив тогда и только тогда, когда $B(z_1, z_2) \neq 0$ при любых z_1 и z_2 , для которых $|z_1| \geq 1$ и $|z_2| \geq 1$.

Доказательство. Пусть

$$H(z_1, z_2) = \frac{A(z_1, z_2)}{B(z_1, z_2)} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} h(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}. \quad (7.48)$$

Для того чтобы фильтр с импульсной характеристикой $h(n_1, n_2)$ был устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} |h(n_1, n_2)| < \infty. \quad (7.49)$$

Следовательно, требуется показать, что условие (7.49) выполняется тогда и только тогда, когда функция $H(z_1, z_2)$

аналитична в области

$$D = \{(z_1, z_2): |z_1| \geq 1 \text{ и } |z_2| \geq 1\}. \quad (7.50)$$

Для доказательства достаточности заметим, что если $H(z_1, z_2)$ аналитична в области D , то всегда можно отыскать число $\varepsilon > 0$, такое, что $H(z_1, z_2)$ аналитична в области

$$D_1 = \{(z_1, z_2): |z_1| > 1 - \varepsilon \text{ и } |z_2| > 1 - \varepsilon\}, \quad (7.51)$$

откуда следует, что сумма

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$$

является в области D_1 абсолютно сходящейся, так что

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} |h(n_1, n_2)| < \infty.$$

Для доказательства необходимости условия (7.49) заметим, что если

$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} |h(n_1, n_2)| < \infty,$$

то по условию сходимости сумма

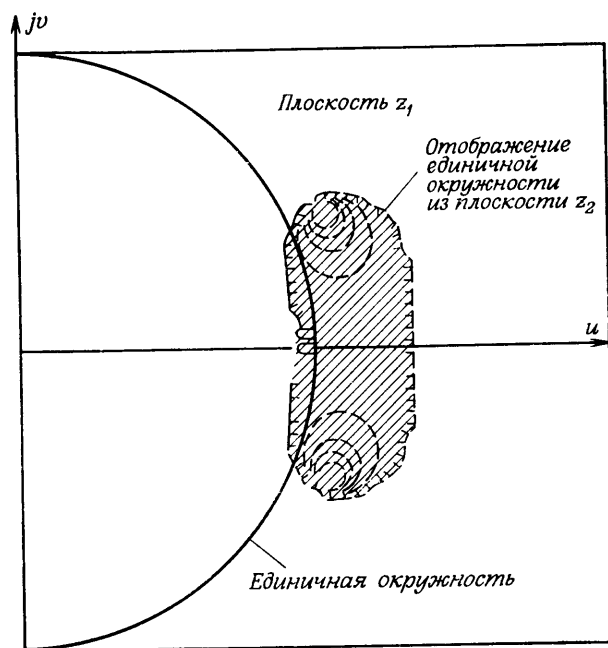
$$\sum_{n_1} \sum_{n_2} h(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}$$

сходится в области D абсолютно, откуда следует, что функция $H(z_1, z_2)$ является в области D аналитической.

Применение данной теоремы в практических ситуациях сопряжено с трудностями. Для проверки устойчивости необходимо единичный круг из плоскости z_1 (т. е. область $d_1 \equiv z_1, |z_1| \leq 1$) отобразить на плоскость z_2 , решив неявное уравнение $B(z_1, z_2) = 0$ относительно переменной z_2 . При этом фильтр будет устойчивым тогда и только тогда, когда отображение области d_1 на плоскость z_2 не пересекается с единичным кругом на плоскости z_2 .

Итак, использование данного критерия устойчивости требует решения уравнения $B(\hat{z}_1, z_2) = 0$ относительно z_2 для большого набора значений $z_1 = \hat{z}_1$ ($0 \leq |\hat{z}_1| \leq 1$), что на практике почти всегда затруднительно (за исключением простейших случаев). В качестве примера использования сформулированного критерия устойчивости рассмотрим фильтр, имеющий z -преобразование импульсной характеристики вида

$$H(z_1, z_2) = \frac{1}{B(z_1, z_2)},$$



Фиг. 7.8. Контуры равных значений модулей корней z_2 уравнения $B(z_1, z_2) = 0$ в функции комплексной переменной z_1 (по Шенксу).

где

$$B(z_1, z_2) = 1 - 0,8z_1^{-1} - 1,635z_2^{-1} + 1,272z_1^{-1}z_2^{-1} + 0,8z_2^{-2} - 0,64z_1^{-1}z_2^{-2}.$$

Подставив $z_1 = \hat{z}_1$, получим квадратное уравнение с комплексными коэффициентами относительно z_2^{-1} :

$$B(\hat{z}_1, z_2) = (1 - 0,8\hat{z}_1^{-1}) + (-1,635 + 1,272\hat{z}_1^{-1})z_2^{-1} + (0,8 - 0,64\hat{z}_1^{-1})z_2^{-2}.$$

Это уравнение легко решается, после чего по вышеприведенной теореме проверяется устойчивость фильтра. На фиг. 7.8 изображены контуры постоянных значений модулей корней уравнения z_2 в функции значений комплексной величины $z_1 = u + jv$. Пример взят из работы Шенкса. Контур, для которых $|z_2| < 1$, не приведены, поэтому заштрихованная область является отображением [соответствующим уравнению $B(z_1, z_2) = 0$] внешней (по отношению к единичной окружности) части плоскости z_2 на плоскость z_1 . Так как заштрихованная область выходит за пределы единичного круга, то фильтр будет неустойчивым.

Существует упрощенный вариант рассмотренного критерия устойчивости (он получен Хуангом), требующий значительно мень-

шего объема вычислений. Его можно сформулировать в виде следующей теоремы:

Вторая теорема устойчивости. Физически реализуемый фильтр, имеющий z -преобразование импульсной характеристики вида $H(z_1, z_2) = A(z_1, z_2)/B(z_1, z_2)$, где A и B — полиномы, устойчив тогда и только тогда, когда:

1. Отображение области $d_1 = (z_1 : |z_1| = 1)$ на плоскость z_2 , согласно уравнению $B(z_1, z_2) = 0$, целиком лежит внутри области $d_2 = (z_2 : |z_2| \geq 1)$.

2. Соотношение $B(z_1, z_2) = 0$ не отображает ни одной точки из области $d_1 = (z_1 : |z_1| \geq 1)$ в точку $z_2 = 0$.

Доказательство теоремы здесь не приводится. Следствия из нее очевидны. Согласно этой теореме, достаточно рассмотреть отображение $B(\hat{z}_1, z_2) = 0$ только для окружности $|\hat{z}_1| = 1$ и, кроме того, решить уравнение $B(z_1, 0) = 0$, чтобы определить, имеет ли оно корни с модулем, превышающим единицу.

Существуют и другие, еще более совершенные методы проверки выполнения сформулированных выше критериев устойчивости фильтров, но здесь они рассматриваться не будут. Поскольку (если не на практике, то по крайней мере теоретически) устойчивость двумерного фильтра может быть проверена, то более важными вопросами являются следующие: как найти коэффициенты заведомо устойчивого фильтра с заданной частотной характеристикой и каким образом превратить неустойчивый фильтр в устойчивый, не исказив при этом его амплитудной характеристики? Ответов на эти вопросы в большинстве случаев нет.

Частичное решение второго вопроса, связанного со стабилизацией неустойчивых фильтров, было получено Шенксом. Пусть $H(z_1, z_2) = 1/B(z_1, z_2)$ — передаточная функция неустойчивого фильтра. Чтобы получить аппроксимацию $\hat{H}(z_1, z_2)$ этой функции, соответствующую устойчивому фильтру, найдем сначала полином $C(z_1, z_2)$, аппроксимирующий функцию $1/B(z_1, z_2)$ с минимальной среднеквадратической ошибкой и имеющий вид

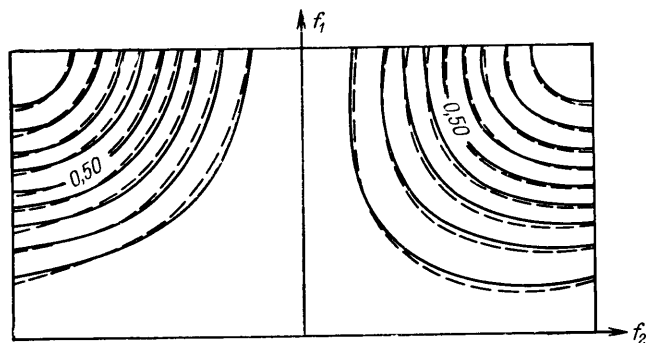
$$C(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^a \sum_{n_2=0}^b c(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}, \quad (7.52)$$

где a и b — целые положительные числа. Допустим, что

$$B(z_1, z_2) C(z_1, z_2) = 1 + d_{10}z_1^{-1} + d_{01}z_2^{-1} + d_{11}z_1^{-1}z_2^{-1} + \dots \quad (7.53)$$

Тогда из всех полиномов порядка (a, b) полином $C(z_1, z_2)$ будет аппроксимировать функцию $1/B(z_1, z_2)$ с минимальной среднеквадратической ошибкой, если сумма

$$\sum_{i=0}^a \sum_{j=0}^b (d_{ij})^2 \quad (7.54)$$



Фиг. 7.9. Амплитудные характеристики неустойчивого фильтра (—) и его устойчивой аппроксимации (---), полученной методом двойного обращения (по Шенксу).

будет минимальна. Теперь найдем многочлен $\hat{B}(z_1, z_2)$, аппроксимирующий функцию $1/C(z_1, z_2)$ с минимальной среднеквадратической ошибкой. Согласно Шенксу, фильтр с передаточной функцией

$$\hat{H}(z_1, z_2) = \frac{1}{\hat{B}(z_1, z_2)} \quad (7.55)$$

является устойчивым, причем его амплитудная характеристика приблизительно совпадает с характеристикой исходного фильтра. На фиг. 7.9 в качестве примера изображены полученные Шенксом амплитудные характеристики неустойчивого фильтра и фильтра, «стабилизированного» методом двойного обращения с использованием критерия минимума среднеквадратической ошибки. Контуры постоянного уровня амплитудных характеристик B и \hat{B} , показанные на рисунке, отличаются весьма незначительно друг от друга.

7.14. КИХ-фильтры

Для двумерных КИХ-фильтров проблемы устойчивости не существует, так как их импульсные характеристики ограничены и по амплитуде, и по длительности, так что при любых конечных N_1 и N_2 условие устойчивости

$$\sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} |h(n_1, n_2)| < \infty \quad (7.56)$$

всегда выполняется. (Импульсные характеристики КИХ-фильтров отличны от нуля в прямоугольнике $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$, $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$.) Из неравенства (7.56) следует, что многие методы проектирования одномерных фильтров часто можно обобщить на

двумерный случай, внося в них соответствующие изменения. В последующих разделах данной главы будут описаны (и проиллюстрированы примерами) метод взвешивания, метод частотной выборки и метод расчета оптимального фильтра.

Будем считать, что частотные характеристики фильтров имеют круговую симметрию, т. е.

$$H(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) \approx \hat{H}(e^{j2\pi \sqrt{f_1^2 + f_2^2}}). \quad (7.57)$$

Такие фильтры находят применение во многих практических задачах, например при обработке изображений, когда обе пространственные частоты равноценны. Легко показать, что, располагая отсчеты импульсной характеристики в виде прямоугольной сетки, добиться точной круговой симметрии невозможно. Причина заключается в периодичности $H(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$ по двум осям, т. е.

$$H[e^{j2\pi(f_1+m_1)}, e^{j2\pi(f_2+m_2)}] = H(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) \quad (7.58)$$

(m_1 и m_2 — произвольные целые числа), что противоречит условию (7.57). На практике, однако, удается получить достаточно хорошее приближение к условию круговой симметрии (7.57).

7.15. Двумерные весовые функции (окна)

Метод весовых функций распространяется на двумерный случай непосредственно. Заданная частотная характеристика $D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$ (обычно при определенных ограничениях можно считать, что она обладает круговой симметрией) разлагается в двумерный ряд Фурье

$$D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} h(n_1, n_2) e^{-j2\pi n_1 f_1} e^{-j2\pi n_2 f_2}, \quad (7.59)$$

в результате чего невзвешенная импульсная характеристика $h(n_1, n_2)$ определяется следующим образом:

$$h(n_1, n_2) = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2}) e^{j2\pi n_1 f_1} e^{j2\pi n_2 f_2} df_1 df_2. \quad (7.60)$$

Чтобы сделать пределы суммирования в разложении (7.59) конечными и вместе с тем улучшить сходимость усеченного ряда в точках разрыва характеристики $D(e^{j2\pi f_1}, e^{j2\pi f_2})$, умножим коэффициенты ряда Фурье на весовую последовательность $w(n_1, n_2)$ конечной длины. При этом аппроксимация частотной характерис-