

Фиг. 7.15. Контуры равных уровней фильтра нижних частот, рассчитанного с использованием окна Кайзера.

на фиг. 7.13, б. Видно, что по сравнению с прямоугольным окном объем под боковыми лепестками стал значительно меньше. На фиг. 7.14, а, б приведена в линейном и логарифмическом масштабе амплитудная характеристика фильтра нижних частот, рассчитанного с использованием окна Кайзера, а на фиг. 7.15 изображены контуры равных уровней этой характеристики в области $0 \leq f_1 \leq 0,5$; $0 \leq f_2 \leq 0,5$. Видно, что форма амплитудной характеристики улучшается по сравнению со случаем прямоугольного окна (фиг. 7.12) весьма существенно, а характеристика с высокой степенью точности обладает круговой симметрией.

7.17. Фильтры с частотной выборкой

Расчет двумерных фильтров методом частотной выборки основан на приведенных выше формулах прямого и обратного двумерного ДПФ. Рассмотрим фильтр с импульсной характеристикой конечной длины $h(n_1, n_2)$, заданной в прямоугольнике $0 \leq n_1 \leq N_1 - 1$, $0 \leq n_2 \leq N_2 - 1$, z -преобразование которой равно

$$H(z_1, z_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1, n_2) z_1^{-n_1} z_2^{-n_2}. \quad (7.70)$$

Вычисляя значения правой части (7.70) для дискретного набора частот

$$\omega_{k_1} = k_1 \left(\frac{2\pi}{N_1} \right), \quad k_1 = 0, 1, \dots, N_1 - 1, \quad (7.71)$$

$$\omega_{k_2} = k_2 \left(\frac{2\pi}{N_2} \right), \quad k_2 = 0, 1, \dots, N_2 - 1, \quad (7.72)$$

получим ДПФ импульсной характеристики фильтра

$$H(k_1, k_2) = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} h(n_1, n_2) \exp \left\{ -j2\pi \left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2} \right) \right\}. \quad (7.73)$$

Нетрудно найти и обратное ДПФ:

$$\begin{aligned} h(n_1, n_2) &= \\ &= \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} H(k_1, k_2) \exp \left\{ j2\pi \left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Подставив выражение (7.74) в преобразование (7.70), получим следующую интерполяционную формулу для расчета частотной характеристики фильтра в произвольной точке:

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) &= \\ &= \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \left\{ \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} H(k_1, k_2) \exp \left[j2\pi \left(\frac{k_1 n_1}{N_1} + \frac{k_2 n_2}{N_2} \right) \right] \right\} \exp[-j(\omega_1 n_1 + \omega_2 n_2)]. \end{aligned} \quad (7.75)$$

Изменив порядок суммирования и просуммировав по n_1 и n_2 , получим

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} H(k_1, k_2) A(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2), \quad (7.76)$$

где

$$\begin{aligned} A(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{N_1 N_2} \left(\frac{1 - \exp(-jN_1 \omega_1)}{1 - \exp\{j[2\pi(k_1/N_1) - \omega_1]\}} \right) \times \\ &\times \left(\frac{1 - \exp(-jN_2 \omega_2)}{1 - \exp\{j[2\pi(k_2/N_2) - \omega_2]\}} \right). \end{aligned} \quad (7.77)$$

При расчете двумерных фильтров методом частотной выборки формула (7.76) является основной. Из этой формулы видно, что частотная характеристика фильтра, рассматриваемая как непрерывная функция частоты, представляет собой линейную комбинацию сдвинутых интерполирующих функций $A(k_1, k_2, \omega_1, \omega_2)$, умноженных на коэффициенты ДПФ $H(k_1, k_2)$. Совокупность этих коэффициентов называют частотной выборкой, так как они дают

значения частотной характеристики фильтра в равноотстоящих по обеим частотным осям точках. При расчете фильтров методом частотной выборки большей части частотных отсчетов придают определенные значения, зависящие от вида аппроксимируемой частотной характеристики. Остальные, не задаваемые отсчеты являются свободными переменными, которые оптимизируются согласно выбранному критерию минимизации.

Для частного случая расчета методом частотной выборки фильтров с линейной фазовой характеристикой формулы (7.76) и (7.77) можно преобразовать, используя свойство симметрии коэффициентов ДПФ, описываемое соотношениями вида

$$H(k_1, k_2) = |H(k_1, k_2)| e^{j\theta(k_1, k_2)}, \quad (7.78)$$

причем

$$|H(k_1, k_2)| = |H(k_1, N_2 - k_2)| = |H(N_1 - k_1, k_2)|, \quad (7.79)$$

$$\theta(k_1, k_2) = \theta(k_1) + \theta(k_2), \quad (7.80)$$

$$\theta(k_1) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N_1} k_1 \left(\frac{N_1-1}{2}\right), & k_1 = 0, 1, \dots, NU, \\ \frac{2\pi}{N_1} (N_1 - k_1) \left(\frac{N_1-1}{2}\right), & k_1 = NU + 1, \dots, N_1 - 1, \end{cases} \quad (7.81)$$

$$\theta(k_2) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N_2} k_2 \left(\frac{N_2-1}{2}\right), & k_2 = 0, 1, \dots, NV, \\ \frac{2\pi}{N_2} (N_2 - k_2) \left(\frac{N_2-1}{2}\right), & k_2 = NV + 1, \dots, N_2 - 1, \end{cases} \quad (7.82)$$

где

$$NU = \begin{cases} \frac{N_1}{2}, & \text{если } N_1 \text{ четное,} \\ \frac{N_1-1}{2}, & \text{если } N_1 \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (7.83)$$

$$NV = \begin{cases} \frac{N_2}{2}, & \text{если } N_2 \text{ четное,} \\ \frac{N_2-1}{2}, & \text{если } N_2 \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (7.84)$$

Если N_1 или N_2 четные, то должны выполняться дополнительные ограничения

$$\theta\left(k_1, \frac{N_2}{2}\right) = \theta\left(\frac{N_1}{2}, k_2\right) = 0, \quad (7.85)$$

$$H\left(k_1, \frac{N_2}{2}\right) = H\left(\frac{N_1}{2}, k_2\right) = 0. \quad (7.86)$$

Учитывая записанные выше условия, преобразуем формулы (7.76) и (7.77) к следующему виду (после довольно длинных выкладок):

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) &= \\ &= \exp \left\{ -j \left[\omega_1 \left(\frac{N_1-1}{2}\right) + \omega_2 \left(\frac{N_2-1}{2}\right) \right] \right\} \frac{1}{N_1 N_2} \times \\ &\quad \times \left[H(0, 0) \alpha(\omega_1, N_1) \alpha(\omega_2, N_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_1=1}^{NU} |H(k_1, 0)| \alpha(\omega_2, N_2) \beta(\omega_1, k_1, N_1) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_2=1}^{NV} |H(0, k_2)| \alpha(\omega_1, N_1) \beta(\omega_2, k_2, N_2) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k_1=1}^{NU} \sum_{k_2=1}^{NV} |H(k_1, k_2)| \beta(\omega_1, k_1, N_1) \beta(\omega_2, k_2, N_2) \right], \quad (7.87) \end{aligned}$$

где

$$\alpha(\omega, N) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}, \quad (7.88)$$

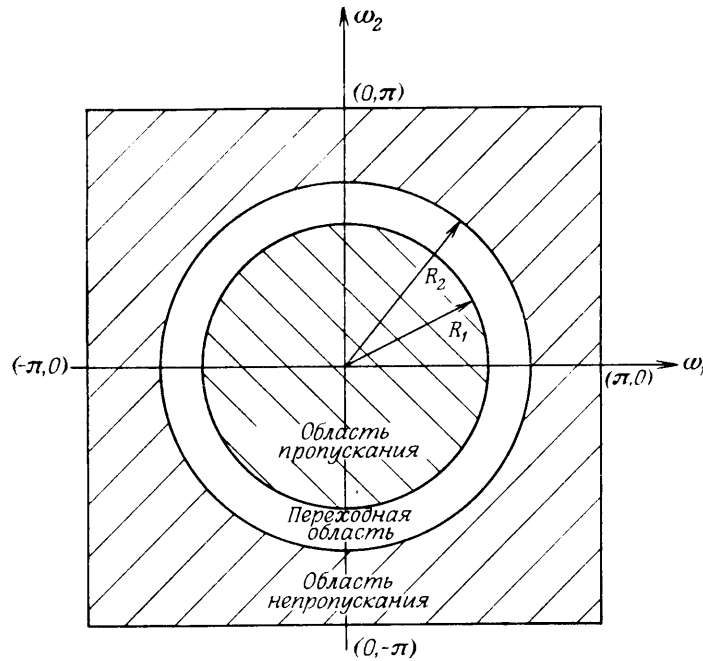
$$\beta(\omega, k, N) = \frac{\sin[(\omega/2 - \pi k/N)N]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{\sin[(\omega/2 + \pi k/N)N]}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)}, \quad (7.89)$$

$$NU = \begin{cases} \frac{N_1}{2} - 1, & \text{если } N_1 \text{ четное,} \\ \frac{N_1-1}{2}, & \text{если } N_1 \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (7.90)$$

$$NV = \begin{cases} \frac{N_2}{2} - 1, & \text{если } N_2 \text{ четное,} \\ \frac{N_2-1}{2}, & \text{если } N_2 \text{ нечетное.} \end{cases} \quad (7.91)$$

Внешне громоздкая формула (7.87) состоит в основном из суммы простых интерполирующих функций, смещенных по частотам в соответствии со значениями k_1 и k_2 . Эта формула (без учета стоящих в начале формулы множителей с линейным изменением фазы) и является основным расчетным соотношением при проектировании фильтров методом частотной выборки.

На фиг. 7.16 показано расположение областей частот на плоскости (ω_1, ω_2) , характерное для двумерного фильтра нижних час-



Фиг. 7.16. Частотные области, характерные для фильтра нижних частот с круговой симметрией.

тот с круговой симметрией. В области пропускания

$$\rho(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2} \leq R_1. \quad (7.92)$$

Для переходной области

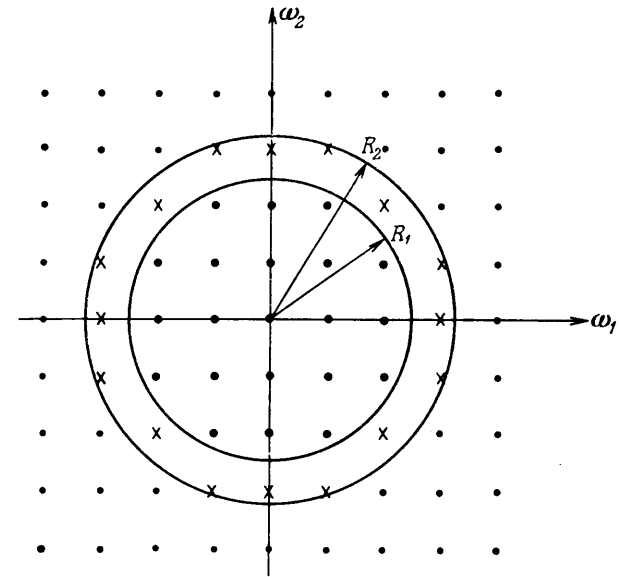
$$R_1 < \rho(\omega_1, \omega_2) < R_2, \quad (7.93)$$

а для области непропускания

$$\rho(\omega_1, \omega_2) \geq R_2. \quad (7.94)$$

Частоты, на которых рассчитывается ДПФ (на них берется частотная выборка), образуют в плоскости (ω_1, ω_2) сетку из $(N_1 \times N_2)$ точек, как показано на фиг. 7.17 для $N_1 = N_2 = 9$. Чтобы рассчитать методом частотной выборки фильтр, аппроксимирующий идеальный фильтр нижних частот с характеристикой

$$\hat{H}(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = \begin{cases} 1, & \rho(\omega_1, \omega_2) \leq R_1, \\ 0, & \rho(\omega_1, \omega_2) \geq R_2, \end{cases} \quad (7.95)$$



Фиг. 7.17. Частотная выборка размером (9×9) .

имеющей круговую симметрию, необходимо частотные отсчеты, попадающие в область пропускания, взять равными единице, а отсчеты, лежащие в области непропускания, приравнять нулю. Значения отсчетов, находящихся в переходной области, являются свободными переменными, которые следует выбрать согласно критерию минимизации.

Для упрощения уравнений и выкладок, связанных с минимизацией, будут использованы следующие предположения. Во-первых, будем считать, что N_1 и N_2 — равные нечетные числа. Во-вторых, допустим, что

$$H(k_1, k_2) = H(k_2, k_1), \quad (7.96)$$

т. е. что частотная характеристика фильтра симметрична относительно биссектрис углов, образованных осями координат. При расчете фильтров с круговой симметрией такое предположение является правомерным, так как в идеальном случае, когда ошибка аппроксимации равна нулю, условие (7.96) выполняется. И наконец, предположим, что член с линейной фазой в формуле (7.87) можно не учитывать.

В рамках сделанных предположений формулу (7.87) можно упростить, записав ее в виде

$$H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) = H_{\text{фикс}}(\omega_1, \omega_2) + \sum_{m=1}^M T_m H_m(\omega_1, \omega_2), \quad (7.97)$$

где $H_{\text{фикс}}(\omega_1, \omega_2)$ описывает вклад, вносимый фиксированными единичными коэффициентами ДПФ; T_m равно значению m -го коэффициента ДПФ, попавшего в переходную область; M — общее число таких коэффициентов, а $H_m(\omega_1, \omega_2)$ — интерполяционная функция, связанная с m -м коэффициентом в переходной области. Теперь расчетные соотношения можно записать в виде

$$1 - \alpha\delta \leq H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \leq 1 + \alpha\delta \quad \text{при } \rho(\omega_1, \omega_2) \leq R_1, \quad (7.98)$$

$$-\delta \leq H(e^{j\omega_1}, e^{j\omega_2}) \leq \delta \quad \text{при } \rho(\omega_1, \omega_2) \geq R_2, \quad (7.99)$$

где δ — максимальная ошибка аппроксимации в области непропускания, а $\alpha\delta$ (где α — некоторая постоянная) — максимальная ошибка аппроксимации в области пропускания. Задача расчета фильтра заключается в таком выборе коэффициентов в переходной полосе, чтобы величина δ была минимальной.

Нетрудно видеть, что эта задача представляет собой задачу линейного программирования с системой линейных неравенств типа (7.98) и (7.99), составленных для ряда точек, достаточно часто расположенных в области пропускания и в области непропускания. Запишем неравенства в явной форме:

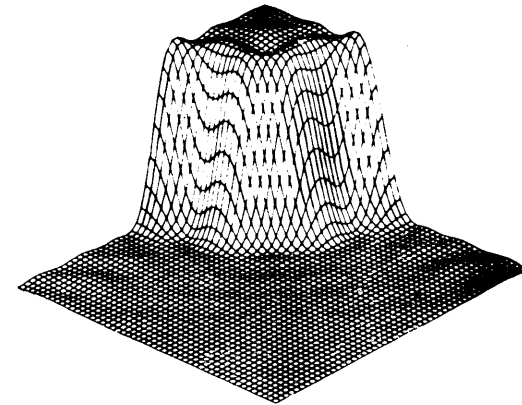
$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^M T_m H_m(\omega_1, \omega_2) - \alpha\delta &\leq 1 - H_{\text{фикс}}(\omega_1, \omega_2), \\ - \sum_{m=1}^M T_m H_m(\omega_1, \omega_2) - \alpha\delta &\leq -1 + H_{\text{фикс}}(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при всех} \\ (\omega_1, \omega_2), \text{ для} \\ \text{которых} \\ \rho(\omega_1, \omega_2) \leq \\ \leq R_1; \end{array} \quad (7.100)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=1}^M T_m H_m(\omega_1, \omega_2) - \delta &\leq -H_{\text{фикс}}(\omega_1, \omega_2), \\ - \sum_{m=1}^M T_m H_m(\omega_1, \omega_2) - \delta &\leq H_{\text{фикс}}(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{при всех} \\ (\omega_1, \omega_2), \text{ для} \\ \text{которых} \\ \rho(\omega_1, \omega_2) \geq R_2. \end{array} \quad (7.101)$$

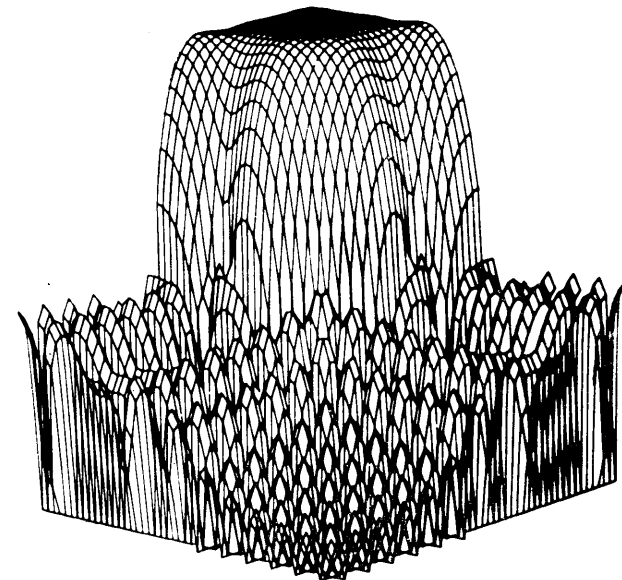
Таким образом, критерий минимизации свелся к такому выбору значений (T_1, T_2, \dots, T_M) , при которых обеспечивается минимум δ .

7.18. Двумерные фильтры нижних частот с частотной выборкой

Для иллюстрации метода частотной выборки на фиг. 7.18 и 7.19 изображены в линейном и логарифмическом масштабе амплитудные характеристики двух фильтров нижних частот, рассчитанных этим методом. Фильтры имеют следующие параметры: в обоих случаях $N_1 = N_2 = N = 25$. На фиг. 7.18 $R_1 = 5\pi/12,5$; $R_2 = 7\pi/12,5$, а на фиг. 7.19 $R_1 = 3\pi/12,5$; $R_2 = 6\pi/12,5$. Для обоих

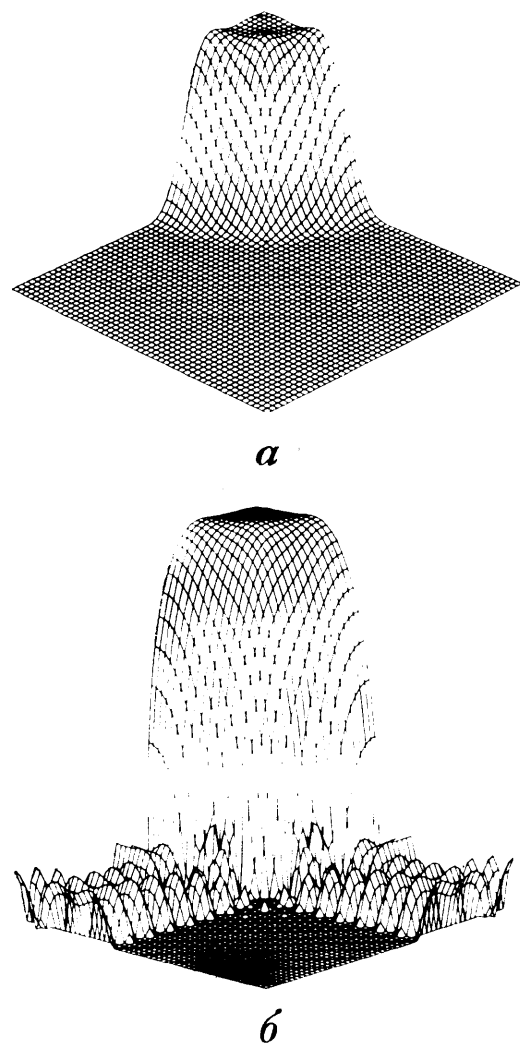


a

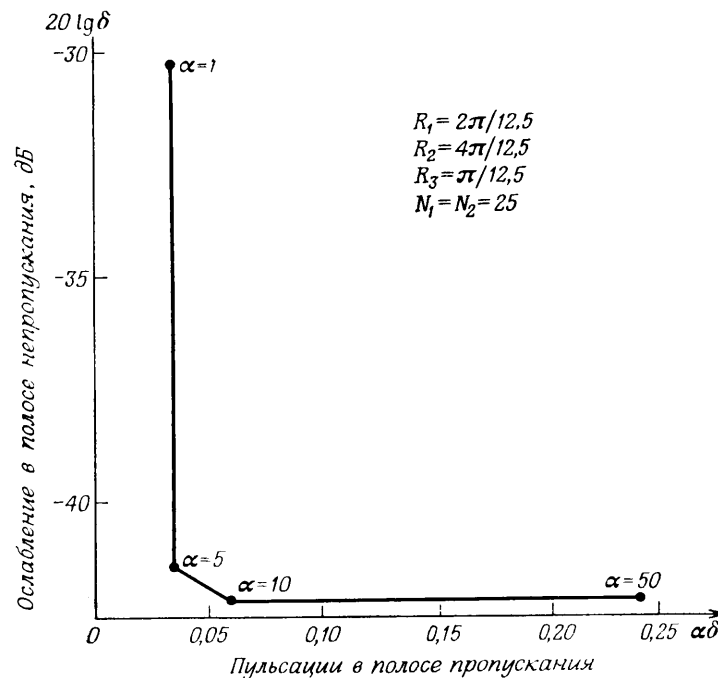


б

Фиг. 7.18. Амплитудные характеристики фильтра нижних частот, рассчитанного методом частотной выборки, в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабе.



Фиг. 7.19. Амплитудные характеристики другого фильтра нижних частот, рассчитанного методом частотной выборки, в линейном и логарифмическом масштабе.

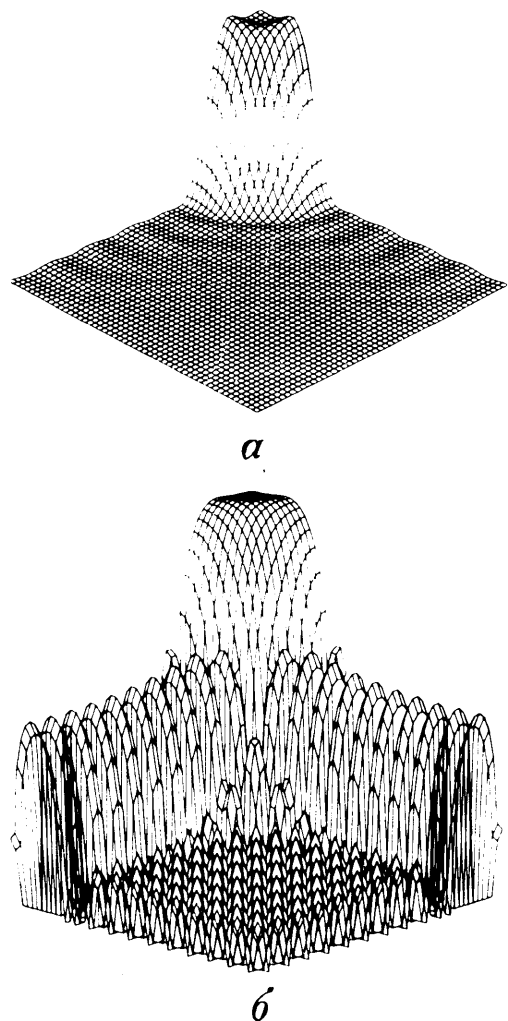


Фиг. 7.20. Взаимосвязь между ослаблением в полосе непропускания и уровнем пульсаций в полосе пропускания при расчете фильтров нижних частот методом частотной выборки.

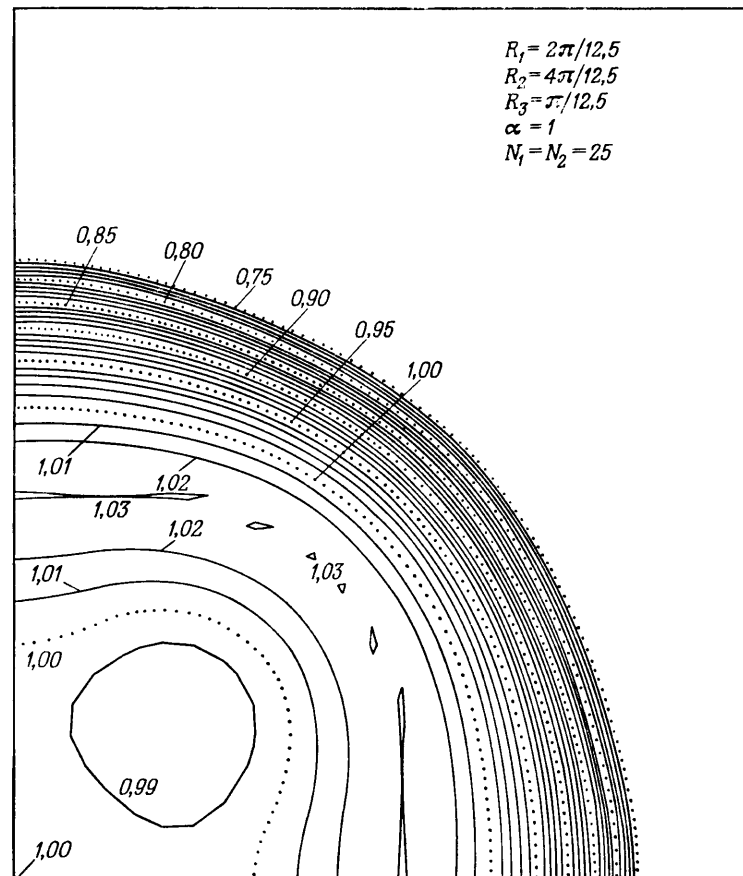
фильтров $\alpha = 1000$, т. е. к уровню пульсаций амплитудной характеристики в области пропускания жестких требований не предъявлялось. Минимальное ослабление в области непропускания составляет для первого фильтра (фиг. 7.18) 41,8 дБ, а для второго (фиг. 7.19) 69,9 дБ.

На фиг. 7.20 показано, каким образом изменение коэффициента α (равного отношению амплитуд пульсаций в областях пропускания и непропускания) влияет на уровень пульсаций в области пропускания и на величину ослабления в области непропускания. Интересно отметить, что при изменении α от 50 до 5 амплитуда пульсаций в области пропускания уменьшается в шесть раз, тогда как ослабление в области непропускания изменяется всего на 0,8 дБ. В связи с этим величину α целесообразно выбирать в максимальной близости от излома кривой на фиг. 7.20.

Наконец, на фиг. 7.21 и 7.22 представлены амплитудная характеристика и контуры ее постоянных уровней в области пропускания и в переходной области для фильтра нижних частот с пара-



Фиг. 7.21. Амплитудная характеристика в линейном (а) и логарифмическом (б) масштабе двумерного фильтра нижних частот, рассчитанного методом частотной выборки, с фиксацией выборки в области пропускания.



Фиг. 7.22. Контуры равных уровней амплитудной характеристики, изображенной на фиг. 7.21.

метрами, приведенными на фиг. 7.20, причем $\alpha = 1$. Из фиг. 7.22 видно, что (по крайней мере при $\alpha = 1$) характеристика с достаточно хорошей точностью обладает требуемой круговой симметрией.

7.19. Расчет оптимальных (в минимаксном смысле) двумерных фильтров

Двумерные КИХ-фильтры, подобно одномерным, можно рассчитать так, чтобы они были оптимальными по Чебышеву, т. е. обеспечивали бы минимаксную ошибку аппроксимации. В этом случае все отсчеты импульсной характеристики фильтра, или, что