

### 1.4.6. Улучшение качества речевого сигнала

В ряде случаев речевой сигнал, поступающий в систему связи, оказывается искаженным, что снижает качество передачи. В этом случае методы цифровой обработки могут быть использованы для улучшения качества восприятия сигнала. Примерами подобных разработок являются устранение реверберации (или эха), устранение шума в речевом сигнале, восстановление речевого сигнала, записанного в гелиевокислородной среде, которая используется в качестве дыхательной смеси водолазами.

## 1.5. Заключение

В данной главе рассмотрены основные области применения методов цифровой обработки сигналов. Очевидно, что они весьма обширны и рассмотреть их достаточно глубоко в одной книге чрезвычайно трудно. При написании книги рассмотрено несколько вариантов ее построения, например, изложение может быть проведено в соответствии с классификацией представлений сигналов (см. рис. 1.2) или же наоборот, так, чтобы основное внимание уделялось применению методов цифровой обработки. Фактически о каждой области применения (рис. 1.4) может быть написана отдельная книга. Третья возможность, избранная здесь, состоит в построении книги в соответствии с имеющимися методами цифровой обработки сигналов. Такой подход по нашему мнению позволяет сконцентрировать внимание на наиболее важных направлениях рассматриваемой проблемы. Поэтому в последующих главах содержится обзор методов цифровой обработки сигналов (гл. 2), введение в цифровые модели речевого сигнала (гл. 3), обсуждение представлений речевого сигнала во временной области (гл. 4), кодирования речевого колебания (гл. 5), кратковременных спектральных представлений (гл. 6), гомоморфной обработки (гл. 7), линейного предсказания (гл. 8). В этих главах подробно рассмотрены вопросы теории цифровой обработки речевых сигналов. Для иллюстрации применения этой теории в различных приложениях в гл. 9 рассматриваются примеры систем речевого общения человека и машины.

## 2

# Основы цифровой обработки сигналов

## 2.0. Введение

В данной книге рассматриваются цифровые методы обработки речи, поэтому читатель должен хорошо представлять основы теории цифровой обработки сигналов. В главе проводится краткий обзор основных положений этой теории, вводятся обозначения, которые используются далее. Читатели, которые незнакомы с методами описания и анализа сигналов в дискретном времени, при необходимости могут получить ряд полезных сведений в руководствах по цифровой обработке сигналов [1—3].

### 2.1. Сигналы и системы в дискретном времени

Изучение методов обработки или передачи информации естественно начинать с представления сигналов в виде непрерывно изменяющихся процессов. Акустическое колебание, формируемое в

речевом тракте человека, имеет именно такую природу. С математической точки зрения его можно описать функцией непрерывного времени  $t$ . Аналоговые (непрерывные во времени) сигналы будут обозначаться через  $x_a(t)$ . Речевой сигнал можно представить и последовательностью чисел. Такое представление и составляет, по существу, предмет данной книги. Последовательности обозначаются далее через  $x(n)$ . Если последовательность чисел представляет собой последовательность мгновенных значений аналогового сигнала, взятых периодически с интервалом  $T$ , то эта операция дискретизации будет иногда обозначаться через  $x_a(nT)$ . На рис. 2.1 показан пример речевого сигнала в аналоговой форме и в виде последовательности отсчетов, взятых с частотой дискретизации

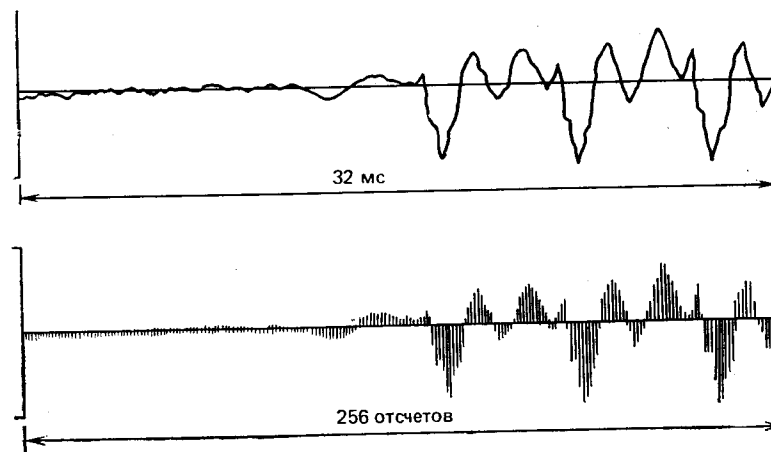


Рис. 2.1. Представление речевого сигнала

8 кГц. Для удобства даже при рассмотрении дискретных сигналов иногда на графике будет изображаться непрерывная функция, которая может рассматриваться как огибающая последовательности отсчетов. При изучении систем цифровой обработки речи нам потребуется несколько специальных последовательностей. Часть из них представлена на рис. 2.2. Единичный отсчет или последовательность, состоящая из одного единичного импульса, определяется как

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Последовательность единичного скачка имеет вид

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

Экспоненциальная последовательность

$$x(n) = a^n. \quad (2.3)$$

Если  $a$  — комплексное число, т. е.  $a = re^{i\omega_0}$ , то

$$x(n) = r^n e^{i\omega_0 n} = r^n (\cos \omega_0 n + i \sin \omega_0 n). \quad (2.4)$$

Если  $r=1$  и  $\omega_0 \neq 0$ ,  $x(n)$  — комплексная синусоида; если  $\omega_0=0$ ,  $x(n)$  — действительное; если  $r < 1$  и  $\omega_0 \neq 0$ , то  $x(n)$  — экспоненциально-затухающая осциллирующая последовательность. Последовательности этого типа часто используются при представлении линейных систем и моделировании речевых сигналов.

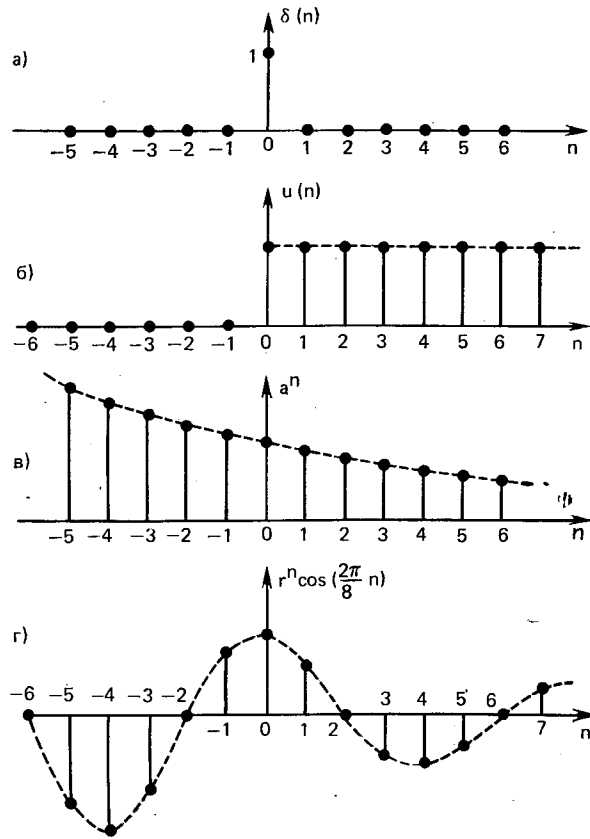


Рис. 2.2. Единичный отсчет (а), функция единичного скачка (б), действительная экспонента (в) и затухающий косинус (г)

Обработка сигналов включает преобразование их в форму, удобную для дальнейшего использования. Таким образом, предметом изучения являются дискретные системы или, что то же самое, преобразования входной последовательности в выходную. Подобные преобразования далее изображаются на структурных схемах так, как это показано на рис. 2.3а. Многие системы анализа речевых сигналов разработаны для оценивания переменных во време-

ни параметров по последовательности мгновенных значений речевого колебания. Подобные системы имеют многомерный выход, т. е. одномерная последовательность на входе, представляющая собой речевой сигнал, преобразуется в векторную последовательность на выходе, как это изображено на рис. 2.3б. В данной книге рассматриваются системы как с одномерным, так и с многомерным выходами.

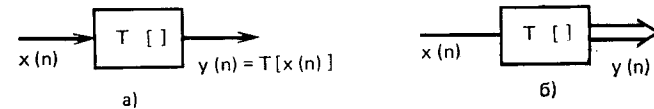


Рис. 2.3. Структурная схема представления сигнала при одномерном входе и выходе (а), одномерном входе и многомерном выходе (б)

При обработке речевых сигналов особенно широкое применение находят системы, инвариантные к временному сдвигу. Такие системы полностью описываются откликом на единичный импульс. Сигнал на выходе системы может быть рассчитан по сигналу на входе и отклику на единичный импульс  $h(n)$  с помощью дискретной свертки

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k) = x(n) * h(n), \quad (2.5a)$$

где символ  $*$  обозначает свертку. Эквивалентное выражение имеет вид

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) x(n-k) = h(n) * x(n). \quad (2.5б)$$

Линейные системы, инвариантные к временному сдвигу, применяются при фильтрации сигнала и, что более важно, они полезны как модели речеобразования.

## 2.2. Описание преобразований сигналов и систем

Анализ сигналов и расчет систем значительно облегчаются при их описании в частотной области. В этой связи полезно кратко остановиться на представлении сигналов и систем в дискретном времени с использованием преобразования Фурье и  $z$ -преобразования.

### 2.2.1. Прямое и обратное $z$ -преобразование

Прямое и обратное  $z$ -преобразование последовательности определяется двумя уравнениями:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}; \quad (2.6a)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C X(z) (z)^{n-1} dz. \quad (2.66)$$

Прямое  $z$ -преобразование  $x(n)$  определяется уравнением (2.6a). В общем случае  $X(z)$  — бесконечный ряд по степеням  $z^{-1}$ ; последовательность  $x(n)$  играет роль коэффициентов ряда. В общем случае подобные степенные ряды сходятся к конечному пределу только для некоторых значений  $z$ . Достаточное условие сходимости имеет вид

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| |z^{-n}| < \infty. \quad (2.7)$$

Множество значений, для которых ряды сходятся, образует область на комплексной плоскости, известную как *область сходимости*. В общем случае эта область имеет вид

$$R_1 < |z| < R_2. \quad (2.8)$$

Для того чтобы выявить связь между областью сходимости и структурой последовательности, рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.** Пусть  $x(n) = \delta(n-n_0)$ . Тогда подстановка в (2.6a) дает  $X(z) = z^{-n_0}$ .

**Пример 2.** Пусть  $x(n) = u(n) - u(n-N)$ . Тогда  $X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} (1) z^{-n} = (1 - z^{-N}) / (1 - z^{-1})$ .

В обоих случаях  $x(n)$  имеет конечную длительность. Таким образом,  $X(z)$  есть просто полином переменной  $z^{-1}$  и область сходимости представляет собой всю  $z$ -плоскость, за исключением точки  $z=0$ . Все последовательности конечной длительности имеют область сходимости, которая по крайней мере равна  $0 < |z| < \infty$ .

**Пример 3.** Пусть  $x(n) = a^n u(n)$ . Тогда

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \frac{1}{1 - az^{-1}}, \quad |a| < |z|.$$

В этом случае степенной ряд представляет собой сумму членов геометрической прогрессии, для которой существует удобное замкнутое выражение. Этот результат типичен для последовательностей бесконечной протяженности, отличных от нуля при  $n > 0$ . В общем случае область сходимости имеет вид  $|z| > R_1$ .

**Пример 4.** Пусть  $x(n) = -b^n u(-n-1)$ . Тогда

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^n z^{-n} = \frac{1}{1 - bz^{-1}}, \quad |z| < |b|.$$

Это типичный результат для бесконечных последовательностей, отличных от нуля при  $n < 0$ , область сходимости которых в общем случае имеет вид  $|z| < R_2$ . Наиболее общий случай, где  $x(n)$  отлично от нуля для  $-\infty < n < \infty$ , может быть представлен в виде комбинации ситуаций, иллюстрированных в примерах 3 и 4. Для этого случая область сходимости имеет вид  $R_1 < |z| < R_2$ .

Обратное преобразование определяется контурным интегралом (2.66), где  $C$  — замкнутый контур, охватывающий начало координат  $z$ -плоскости и расположенный в области сходимости  $X(z)$ . Для случая действительного  $z$ -преобразования удобным способом вычисления обратного преобразования является разложение на простые дроби [1].

Существует много теорем и свойств  $z$ -преобразования, полезных при изучении систем в дискретном времени. Хорошее знание и умение применять эти теоремы и свойства на практике являются необходимыми условиями полного понимания материала последующих глав. Перечень основных теорем представлен в табл. 2.1. Можно заметить, что эти теоремы близки к соответствующим теоремам преобразования Лапласа для непрерывных функций. Однако сходство не должно приводить к ложному выводу, что  $z$ -преобразование представляет собой в некотором смысле аппроксимацию преобразования Лапласа. Преобразование Лапласа — это *точное* представление непрерывной функции времени, а  $z$ -преобразование — *точное* представление последовательности чисел. Соответствующая связь между непрерывным и дискретным представлениями сигнала может быть установлена на основе теоремы дискретизации, что об- суждается в § 2.4.

Таблица 2.1

Последовательности и их  $z$ -преобразования

|                                  | Последовательность  | $z$ -преобразование                        |
|----------------------------------|---------------------|--|
| Линейность                       | $ax_1(n) + bx_2(n)$ | $aX_1(z) + bX_2(z)$                        |
| Сдвиг                            | $x(n+n_0)$          | $z^{n_0}X(z)$                              |
| Экспоненциальное взвешивание     | $a^n x(n)$          | $X(a^{-1}z)$                               |
| Линейное взвешивание             | $nx(n)$             | $-z \frac{dX(z)}{dz}$                      |
| Обращение времени                | $x(-n)$             | $X(z^{-1})$                                |
| Свертка                          | $x(n) * h(n)$       | $X(z)H(z)$                                 |
| Произведение последовательностей | $x(n)w(n)$          | $\frac{1}{2\pi i} \int_C X(v)W(z/v)v^1 dv$ |

### 2.2.2. Преобразование Фурье

Описание сигнала в дискретном времени с помощью преобразования Фурье задается в виде

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-i\omega n}; \quad (2.9a)$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{i\omega}) e^{i\omega n} d\omega. \quad (2.9b)$$

Эти уравнения, как нетрудно убедиться, представляют собой частный случай уравнений (2.6). Преобразование Фурье получается путем вычисления  $z$ -преобразования на единичной окружности, т. е. подстановкой  $z = e^{i\omega}$ . Как показано на рис. 2.4, частота  $\omega$  может быть интерпретирована как угол на  $z$ -плоскости. Достаточное условие существования преобразования Фурье можно получить, подставляя  $|z| = 1$  в (2.7):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty. \quad (2.10)$$

С целью иллюстрации вычисления преобразований Фурье вернемся к примерам из 2.2.1. Преобразование Фурье получается простой заменой. В первых двух примерах в результате действительно получается преобразование Фурье, поскольку единичная окружность

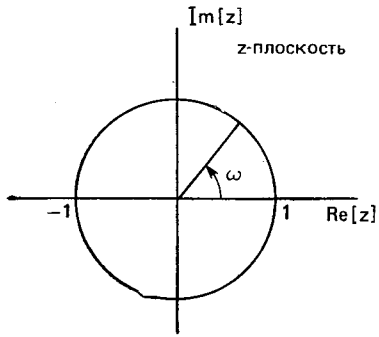


Рис. 2.4. Единичная окружность на  $z$ -плоскости

оной окружности, оно должно повторяться после каждого полного обхода этой окружности, т. е. когда  $\omega$  изменится на  $2\pi$  рад.

Подставляя  $z = e^{i\omega}$  в условие каждой теоремы в табл. 2.1, получим соответствующее множество теорем для преобразования Фурье. Конечно, эти результаты справедливы лишь при условии существования преобразований Фурье.

### 2.2.3. Дискретное преобразование Фурье

Как и в случае аналоговых сигналов, если последовательность периодическая с периодом  $N$ , т. е.

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + N), \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.11)$$

то  $\tilde{x}(n)$  можно представить в виде суммы синусоид, а не в виде интеграла, как это было в (2.9б). Преобразование Фурье для периодической последовательности имеет вид

$$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-i2\pi kn/N}; \quad (2.12a)$$

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{i2\pi kn/N}. \quad (2.12б)$$

Это точное представление периодической последовательности. Однако, основное преимущество данного описания заключается в возможности несколько иной интерпретации уравнений (2.12). Рассмотрим последовательность конечной длины  $x(n)$ , равную нулю

вне интервала  $0 \leq n \leq N-1$ . В этом случае  $z$ -преобразование имеет вид

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) z^{-n}. \quad (2.13)$$

Если записать  $X(z)$  в  $N$  равноотстоящих точках единичной окружности, т. е.  $z_k = e^{i2\pi kh/N}$ ,  $k=0, 1, \dots, N-1$ , то получим

$$X(e^{i2\pi kh/N}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-i2\pi kn/N}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (2.14)$$

Если при этом построить периодическую последовательность в виде бесконечного числа повторений сегмента  $x(n)$ ,

$$\tilde{x}(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n + rN), \quad (2.15)$$

то отсчеты  $X(e^{i2\pi kh/N})$ , как это видно из (2.12a) и (2.14), будут представлять собой коэффициенты Фурье периодической последовательности  $\tilde{x}(n)$  в (2.15). Таким образом, последовательность длиной  $N$  можно точно описать с помощью дискретного преобразования Фурье (ДПФ) в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{i2\pi kn/N}, \quad k=0, 1, \dots, N-1; \quad (2.16a)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{i2\pi kn/N}, \quad n=0, 1, \dots, N-1. \quad (2.16б)$$

Очевидно, что различие между соотношениями (2.16) и (2.12) состоит лишь в небольшом изменении обозначений (опущен символ, означающий периодичность) и в ограничении интервалов  $0 \leq k \leq N-1$  и  $0 \leq n \leq N-1$ . Следует, однако, иметь в виду, что все последовательности при использовании ДПФ ведут себя так, как если бы они были периодическими функциями, т. е. ДПФ является на самом деле представлением периодической функции времени, заданной (2.15). Несколько иной подход при использовании ДПФ заключается в том, что индексы последовательности интерпретируются по модулю  $N$ . Это следует из того факта, что если  $x(n)$  имеет длину  $N$ , то

$$\tilde{x}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n + rN) = x(n \text{ по модулю } N) = x((n))_N. \quad (2.17)$$

Введение двойных обозначений позволяет отразить периодичность, присущую представлению с помощью ДПФ. Эта периодичность существенно отражается на свойствах ДПФ. Наиболее важные теоремы о ДПФ представлены в табл. 2.2. Очевидно, что задержка последовательности должна рассматриваться по модулю

Таблица 2.2

Последовательности и их дискретное преобразование Фурье

|                               | Последовательность                | $N$ -точечное ДПФ                             |
|-------------------------------|-----------------------------------|---|
| Линейность                    | $ax_1(n) + bx_2(n)$               | $aX_1(k) + bX_2(k)$                           |
| Сдвиг                         | $x((n+n_0))_N$                    | $e^{i2\pi/n_0 kn} X(k)$                       |
| Обращение времени             | $x((n))_N$                        | $X^*(k)$                                      |
| Свертка                       | $\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h((n-m))_N$ | $X(k)H(k)$                                    |
| Умножение последовательностей | $x(n)w(n)$                        | $\frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} X(r)W((k-r))_N$ |

$N$ . Это приводит, например, к некоторым особенностям выполнения дискретной свертки.

Дискретное преобразование Фурье со всеми его особенностями является важным способом описания сигналов по следующим причинам: 1) ДПФ можно рассматривать как дискретизированный вариант  $z$ -преобразования (или преобразования Фурье) последовательности конечной длительности; 2) ДПФ очень сходно по своим свойствам (с учетом периодичности) с преобразованием Фурье и  $z$ -преобразованием; 3)  $N$  значений  $X(k)$  можно вычислить с использованием эффективного (время вычисления пропорционально  $N \log N$ ) семейства алгоритмов, известных под названием быстрых преобразований Фурье (БПФ) [1—4].

Дискретное преобразование Фурье широко используется при вычислении корреляционных функций, спектров и при реализации цифровых фильтров [5—6], а также часто используется и при обработке речевых сигналов.

### 2.3. Основы цифровой фильтрации

Цифровой фильтр представляет собой систему с постоянными параметрами (инвариантную к сдвигу), работающую в дискретном времени. Напомним, что для таких систем сигнал на входе и выходе связан дискретной сверткой (2.5). Соответствующее соотношение между  $z$ -преобразованиями, как это видно из табл. 2.1, имеет вид

$$Y(z) = H(z)X(z). \quad (2.18)$$

Прямое  $z$ -преобразование отклика на единичный импульс  $H(z)$  называется *передаточной функцией* системы. Преобразование Фурье отклика на единичный импульс  $H(e^{i\omega})$  называется *частот-*

*ной характеристикой*. Обычно  $H(e^{i\omega})$  представляет собой комплексную функцию  $\omega$ , которую можно записать в виде

$$H(e^{i\omega}) = H_r(e^{i\omega}) + iH_i(e^{i\omega}) \quad (2.19)$$

или через модуль и фазу:

$$H(e^{i\omega}) = |H(e^{i\omega})| e^{i \arg [H(e^{i\omega})]}. \quad (2.20)$$

Инвариантная к сдвигу линейная система называется *физически реализуемой*, если  $h(n) = 0$  при  $n < 0$ . Линейная система устойчива, если для любой ограниченной по уровню входной последовательности выходная последовательность также ограничена. Необходимым и достаточным условием устойчивости линейной системы с постоянными параметрами является

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty. \quad (2.21)$$

Это условие аналогично (2.10) и оказывается достаточным для существования  $H(e^{i\omega})$ .

Сигналы на входе и выходе линейных инвариантных к сдвигу систем, таких, например, как фильтры, связаны дискретной сверткой (2.5) и, кроме того, разностным уравнением

$$y(n) - \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r). \quad (2.22)$$

Вычисляя  $z$ -преобразование от обеих частей, можно получить

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{r=0}^M b_r z^{-r}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}. \quad (2.23)$$

Сравнивая (2.22) и (2.23), полезно отметить следующее. Если задано разностное уравнение вида (2.22), то  $H(z)$  можно получить непосредственной подстановкой коэффициентов при входном сигнале в числитель передаточной функции к соответствующим степеням  $z^{-1}$ , а коэффициенты при выходном сигнале — в знаменатель к соответствующим степеням  $z^{-1}$ .

Передаточная функция в общем случае является дробно рациональной. Таким образом, она определяется положением нулей и полюсов на  $z$ -плоскости. Это означает, что  $H(z)$  можно представить в виде

$$H(z) = \frac{A \prod_{r=1}^M (1 - c_r z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})}. \quad (2.24)$$

При рассмотрении  $z$ -преобразования отмечалось, что физически реализуемые системы имеют область сходимости вида  $|z| > R_1$ . Если система, кроме того, еще и устойчива, то  $R_1$  должно быть меньше единицы, таким образом единичная окружность входит в область сходимости. Иначе говоря, для устойчивой системы все полюсы  $H(z)$  должны лежать внутри единичной окружности.

Достаточно определить два типа линейных систем с постоянными параметрами. Это системы с конечной импульсной характеристикой (КИХ) и системы с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ). Эти два класса обладают отличными друг от друга свойствами, которые будут рассмотрены ниже.

### 2.3.1. Системы с конечными импульсными характеристиками

Если все коэффициенты  $a_k$  в уравнении (2.22) равны нулю, то разностное уравнение принимает вид

$$y(n) = \sum_{r=0}^M b_r x(n-r). \quad (2.25)$$

Сравнивая (2.25) с (2.56), можно отметить, что

$$h(n) = \begin{cases} b_n, & 0 \leq n \leq M, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Системы с КИХ обладают рядом важных свойств. Передаточная функция  $H(z)$  таких систем представляет собой полином по степеням  $z^{-1}$  и, таким образом, не имеет ненулевых полюсов, а содержит только нули. Системы с КИХ могут обладать строго линейной фазо-частотной характеристикой (ФЧХ). Если  $h(n)$  удовлетворяет условию

$$h(n) = \pm h(M-n), \quad (2.27)$$

$$\text{то } H(e^{i\omega}) = A(e^{i\omega}) e^{-i\omega(M/2)}, \quad (2.28)$$

где  $A(e^{i\omega})$  — действительная или чисто мнимая величина в зависимости от знака в (2.27).

Возможность получения строго линейной ФЧХ является очень важным обстоятельством применительно к речевым сигналам в тех случаях, когда требуется сохранить взаимное расположение элементов сигнала. Это свойство систем с КИХ существенно облегчает решение задачи их проектирования, поскольку все внимание можно уделять лишь аппроксимации амплитудно-частотной характеристики (АЧХ). За это достоинство фильтра с линейной ФЧХ приходится расплачиваться необходимостью аппроксимации протяженной импульсной реакции в случае фильтров с крутыми АЧХ.

Хорошо разработаны три метода проектирования КИХ-фильтров с линейными ФЧХ: взвешивания [1, 2, 5, 7], частотной выборки [1, 2, 8] и проектирования оптимальных фильтров с минимаксной ошибкой [1, 2, 9—11]. Первый из трех перечисленных методов чисто аналитический, т. е. приводит к замкнутой системе уравне-

ний относительно коэффициентов фильтра. Второй и третий методы являются оптимизационными и используют итеративный (в отличие от замкнутой формы) подход для определения коэффициентов фильтра. Несмотря на простоту метода взвешивания, широкое применение нашли все три метода. Это обусловлено завершенностью глубоких исследований оптимальных КИХ-фильтров и, кроме того, наличием подробно описанных программ, позволяющих пользователю легко рассчитать любой фильтр [2, 10].

При рассмотрении вопросов реализации цифровых фильтров полезно изображать их в виде схем. Разностное уравнение (2.25) изображено на рис. 2.5. Подобные схемы, называемые структур-

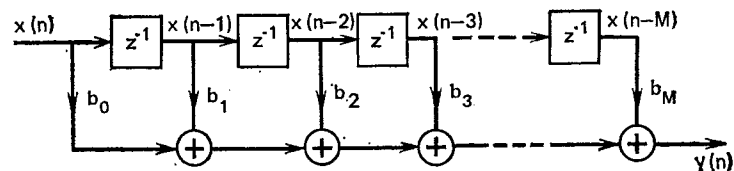


Рис. 2.5. Структурная схема КИХ-фильтра

ными, описывают в графической форме те операции, которые необходимо проделать над входной последовательностью для получения сигнала на выходе. Основные элементы на схеме отображают устройства суммирования, умножения на постоянные коэффициенты (последние показаны возле стрелок, обозначающих операцию умножения) и хранения последних значений входной последовательности. Эта структурная схема позволяет составить наглядное представление о сложности устройства. Когда система обладает линейной фазо-частотной характеристикой, возможны дополнительные упрощения в технической реализации (см. задачу 2.7).

### 2.3.2. Системы с бесконечными импульсными характеристиками

Если передаточная функция (2.24) имеет полюсы и нули, то разностное уравнение (2.22) можно переписать в виде

$$y(n) = \sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^M b_r x(n-r). \quad (2.29)$$

Это уравнение представляет собой рекуррентную формулу, которая может использоваться для последовательного вычисления текущего значения выходного сигнала по прошлым значениям выходного сигнала. Если в (2.24)  $M < N$ , то  $H(z)$  можно разложить на простые дроби:

$$H(z) = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}. \quad (2.30)$$

Для физически реализуемых систем легко показать (см. задачу 2.9), что

$$h(n) = \sum_{k=1}^N A_k (d_k)^n u(n). \quad (2.31)$$

Таким образом,  $h(n)$  имеет бесконечную протяженность. Однако вследствие рекуррентности соотношения (2.29) часто оказывается возможным построить БИХ-фильтр, позволяющий получить тот же результат с более высокой эффективностью (т. е. при меньшем объеме вычислений), чем при использовании КИХ-фильтра. Это особенно справедливо для фильтров с крутым срезом.

Существует ряд методов проектирования БИХ-фильтров. Расчет частотно-селективных фильтров (ФНЧ, полосовых и т. д.) часто основывается на известных методах проектирования аналоговых фильтров. В этот класс входят методы Баттерворта (максимально плоской АЧХ), Бесселя (равного времени групповой задержки), Чебышева (равновеликих колебаний в полосе пропускания или затухания) и метод равновеликих колебаний как в полосе пропускания, так и в полосе затухания. Перечисленные методы являются аналитическими и широко применяются при проектировании цифровых КИХ-фильтров [1, 2]. В дополнение к перечисленным, разработан ряд оптимизационных методов расчета фильтров [12].

Главное отличие БИХ-фильтров от КИХ-фильтров состоит в том, что невозможно спроектировать БИХ-фильтр со строго линейной ФЧХ, в то время как КИХ-фильтр может обладать такой характеристикой [13].

Фильтры с БИХ обладают большой гибкостью при реализации. На рис. 2.6а показан фильтр, описываемый уравнением (2.29) для случая  $M=N=4$ . Этот способ реализации называют прямой формой. Обобщение на случай произвольных  $M$  и  $N$  очевидно. Уравнение

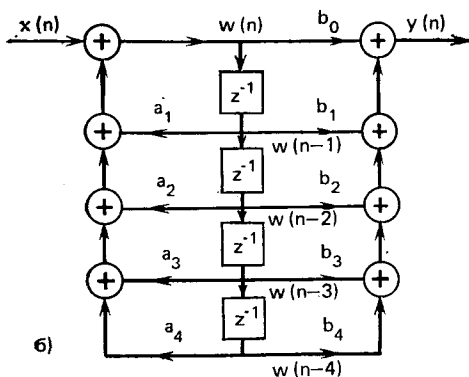


Рис. 2.6. Прямая форма БИХ-фильтра (а) и БИХ-фильтра с минимальной памятью (б)

(2.29) можно преобразовать в ряд различных эквивалентных форм. Особенно полезной среди них является форма, описываемая уравнениями

$$w(n) = \sum_{k=1}^N a_k w(n-k) + x(n); y(n) = \sum_{r=0}^M b_r w(n-r) \quad (2.32)$$

(см. задачу 2.10). Эта система уравнений может быть реализована так, как это показано на рис. 2.6б, что существенно экономит объем памяти, необходимый для хранения значений входной и выходной последовательностей.

Соотношение (2.24) показывает, как можно выразить  $H(z)$  через нули и полюсы. Нули и полюсы появляются на  $z$ -плоскости комплексно-сопряженными парами, поскольку  $a_k$  и  $b_r$  действитель-

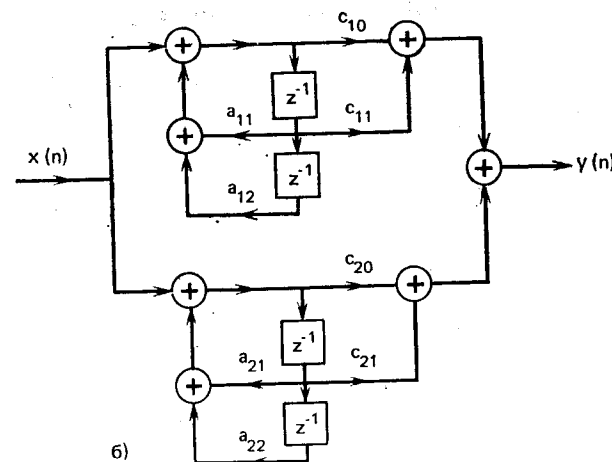
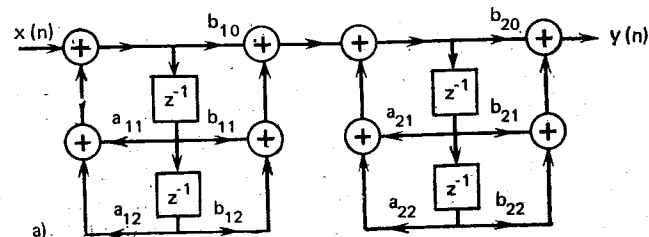


Рис. 2.7. Каскадная (а) и параллельная (б) формы цифрового фильтра

но. Группируя комплексно-сопряженные нули и полюсы,  $H(z)$  можно выразить в виде произведения элементарных передаточных функций второго порядка

$$H(z) = A \prod_{k=1}^K \left[ \frac{1 + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} \right], \quad (2.33)$$

где  $K$  — целая часть  $(N+1)/2$ . Любая система, таким образом, может быть реализована в виде каскадного соединения систем второго порядка, каждая из которых реализуется в виде рис. 2.6. На рис. 2.7а такое соединение изображено для случая  $N=M=4$ . Обобщение на случай системы произвольного порядка очевидно. Разложение на простые дроби (2.30) предполагает несколько иную реализацию. Объединяя комплексно-сопряженные полюсы,  $H(z)$  можно представить в виде

$$H(z) = \sum_{k=1}^K \frac{c_{0k} + c_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}. \quad (2.34)$$

Это приводит к параллельной форме реализации, которая изображена на рис. 2.7б для  $N=4$ .

Все рассмотренные способы реализации используются и при обработке речи. Каскадная форма часто предпочтительнее, так как наименее чувствительна к шумам округления, точности квантования коэффициентов и нарушениям устойчивости [1, 2]. Все перечисленные выше формы используются при построении синтезаторов речевого сигнала, а прямая форма особенно важна при синтезе по параметрам линейного предсказания (см. гл. 8).

## 2.4. Дискретизация

Для применения методов цифровой обработки к такому аналоговому сигналу, как речевое колебание, необходимо представить его в виде последовательности чисел. Обычно это осуществляется путем периодической дискретизации аналогового сигнала для получения последовательности его значений

$$x(n) = x_a(nT), \quad -\infty < n < \infty, \quad (2.35)$$

где  $n$ , конечно, принимает только целые значения. На рис. 2.1 показан речевой сигнал и соответствующая последовательность отсчетов, взятых с периодом  $T=1/8000$  с.

### 2.4.1. Теорема дискретизации<sup>1</sup>

Условия, которые должны выполняться для того, чтобы аналоговый сигнал можно было представить последовательностью своих отсчетов единственным образом, хорошо известны и часто формулируются в следующем виде.

**Теорема дискретизации:** если сигнал  $x_a(t)$  имеет преобразование Фурье  $X_a(i\Omega)$  такое, что  $X_a(i\Omega) = 0$  при  $|\Omega| \geq 2\pi F_N$ , то  $x_a(t)$  может быть восстановлен единственным образом по последовательности равноотстоящих отсчетов  $x_a(nT)$ ,  $-\infty < n < \infty$ , если  $1/T > 2F_N$ .

<sup>1</sup> См. прим. ред. на с. 13.

Данная теорема вытекает из того факта, что если преобразование Фурье сигнала  $x_a(t)$  определяется выражением

$$X_a(i\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-i\Omega t} dt \quad (2.36)$$

и преобразование Фурье последовательности  $x(n)$  определено в соответствии с (2.9а), то в частотной области выполняется соотношение [1, 2]

$$X(e^{i\Omega T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a\left(i\Omega + i\frac{2\pi}{T}k\right). \quad (2.37)$$

Для пояснения соотношения (2.37) предположим, что  $X_a(i\Omega)$  имеет вид, показанный на рис. 2.8а, т. е. допустим, что  $X_a(i\Omega) = 0$  для  $|\Omega| > \Omega_N = 2\pi F_N$ . Частоту  $F_N$  называют частотой Найквиста. В

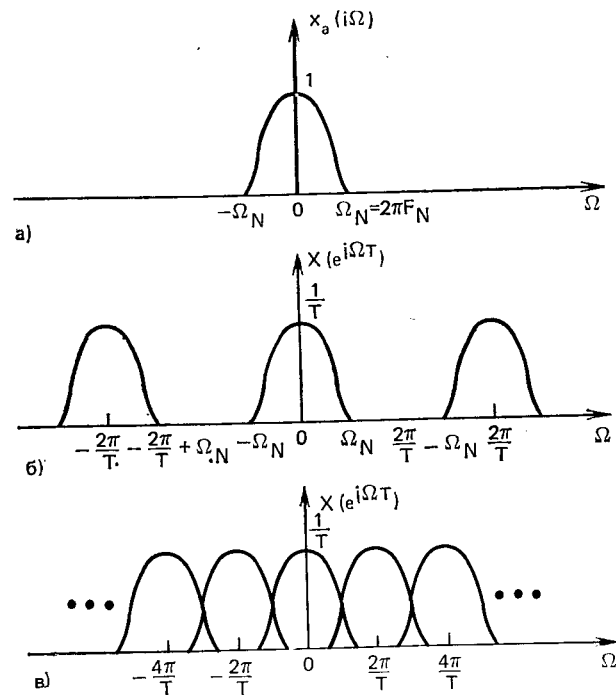


Рис. 2.8. Дискретизация

соответствии с (2.37)  $X(e^{i\Omega T})$  представляет собой сумму бесконечного числа спектров  $X_a(i\Omega)$ , каждый из которых расположен на высших гармониках частоты  $2\pi/T$ . На рис. 2.8б показан случай, когда  $1/T > 2F_N$ . Здесь дополнительные компоненты преобразования Фурье не попадают в основной диапазон  $|\Omega| < 2\pi F_N$ . На рис. 2.8в приведен обратный случай, когда  $1/T < 2F_N$ . Здесь спектры,



отстоящие друг от друга на  $2\pi/T$ , пересекаются. Такая ситуация, при которой смежные спектры перекрываются, называется *наложением частот*. Очевидно, что наложения частот можно избежать только при условии, что преобразование Фурье исходного сигнала ограничено по полосе частот и частота дискретизации, по крайней мере, равна удвоенной частоте Найквиста ( $1/T > 2F_N$ ).

Если  $1/T > 2F_N$ , то преобразование Фурье последовательности отсчетов пропорционально преобразованию Фурье аналогового сигнала в основной полосе частот:

$$X(e^{i\Omega T}) = X_a(i\Omega)/T, \quad |\Omega| < \pi/T. \quad (2.38)$$

Используя этот результат, можно показать, что исходный сигнал связан с последовательностью отсчетов следующей формулой [1, 2]:

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT) \left[ \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T} \right]. \quad (2.39)$$

Таким образом, по последовательности отсчетов аналогового сигнала, взятых с частотой, равной, по крайней мере, удвоенной частоте Найквиста, можно по (2.39) восстановить исходный аналоговый сигнал. Применяемые на практике цифроаналоговые преобразователи основаны на приближении соотношения (2.39).

Дискретизация предполагается во многих алгоритмах обработки речевых сигналов, предназначенных для оценки таких важных параметров речи, как частоты формант или период основного тона. В этих случаях аналоговая функция, подвергаемая дискретизации, недоступна наблюдению. Однако параметры изменяются во времени медленно, и поэтому их можно оценивать со скоростью порядка 100 отсч./с (т. е. дискретизировать). Полученные отсчеты параметра являются значениями ограниченной по частоте функции, которую можно восстановить в соответствии с (2.39).

#### 2.4.2. Прореживание и интерполяция дискретизированного сигнала

В ряде примеров, рассматриваемых в книге, возникает задача изменения частоты дискретизации сигнала, представленного в дискретном времени. Такая задача появляется, например, когда сигнал, дискретизированный с высокой частотой и представленный в разностной форме с использованием двухуровневого квантователя (дельта-модуляция), преобразуется в многоуровневый сигнал ИКМ с более низкой частотой дискретизации. Другой пример соответствует случаю, в котором параметр речевого сигнала дискретизируют с низкой частотой для более эффективного кодирования, а для восстановления сигнала требуется более высокая частота дискретизации. В первом случае частоту дискретизации следует понизить, а во втором — повысить. Процесс понижения и повышения частоты дискретизации будет далее называться прорежива-

нием и интерполяцией соответственно. В обоих случаях будем предполагать, что имеется последовательность отсчетов  $x(n) = x_a(nT)$ , где аналоговая функция  $x_a(t)$  имеет ограниченное по частоте преобразование Фурье, такое, что  $X_a(i\Omega) = 0$ ,  $|\Omega|/2\pi > F_N$ . Как было показано выше, если  $1/T > 2F_N$ , то преобразование Фурье удовлетворяет соотношению

$$X(e^{i\Omega T}) = X_a(i\Omega)/T, \quad |\Omega| < \pi/T. \quad (2.40)$$

**Прореживание.** Пусть требуется понизить частоту дискретизации в  $M$  раз, т. е. необходимо построить новую последовательность, соответствующую отсчетам  $x_a(t)$ , взятым с периодом  $T' = MT$ , т. е.

$$y(n) = x_a(nT') = x_a(nTM). \quad (2.41)$$

Легко видеть, что

$$y(n) = x(Mn), \quad -\infty < n < \infty. \quad (2.42)$$

Таким образом,  $y(n)$  получается путем сохранения только одного из  $M$  отсчетов. Из приведенного выше обсуждения теоремы дискретизации следует, что если  $1/T' > 2F_N$ , то  $y(n)$  также единственным образом описывает исходный аналоговый сигнал. Преобразования Фурье  $x(n)$  и  $y(n)$  связаны соотношением [14]

$$Y(e^{i\Omega T'}) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X\left(e^{i(\Omega T' - 2\pi k)/M}\right). \quad (2.43)$$

Из (2.43) видно, что для устранения наложения между спектрами необходимо, чтобы  $1/T' > 2F_N$ . Если это условие выполняется, то получаем

$$\begin{aligned} Y(e^{i\Omega T'}) &= \frac{1}{M} X(e^{i\Omega T'/M}) = \frac{1}{M} \frac{1}{T} X_a(i\Omega) = \\ &= \frac{1}{T'} X_a(i\Omega), \quad -\pi/T' < \Omega < \pi/T'. \end{aligned} \quad (2.44)$$

На рис. 2.9 показан пример снижения частоты дискретизации. На рис. 2.9а приведено преобразование Фурье исходного аналогового сигнала. На рис. 2.9б показано преобразование Фурье для  $x(n) = x_a(nT)$ , где частота дискретизации ( $1/T$ ) несколько больше частоты Найквиста ( $2F_N$ ). На рис. 2.9в представлен случай снижения втрое частоты дискретизации, т. е.  $T' = 3T$ . Здесь возникает наложение частот, поскольку  $1/T' < 2F_N$ . Пусть  $x(n)$  формируется на выходе ФНЧ с частотой среза  $\pi/T' = \pi/(3T)$  и далее получается последовательность отсчетов  $y(n)$ . Преобразование Фурье сигнала на выходе ФНЧ показано на рис. 2.9г. В данном случае при снижении частоты дискретизации втрое наложения частот не возникает, но последовательность отсчетов  $y(n)$  относится уже не к сигналу  $x(t)$ , а к сигналу  $y_a(t)$ , полученному на выходе фильтра нижних частот. Структурная схема обобщенной системы прореживания приведена на рис. 2.10.

**Интерполяция.** Пусть имеется последовательность отсчетов аналогового сигнала  $x(n) = x_a(nT)$ . Если необходимо повысить частоту дискретизации в  $L$  раз, то следует вычислить новую последовательность

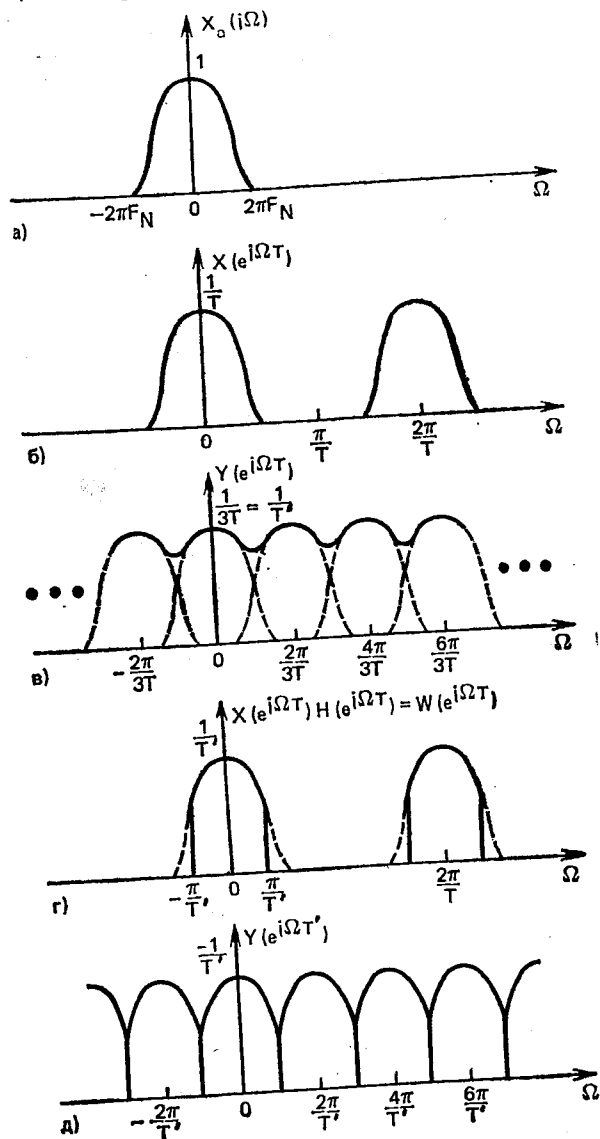


Рис. 2.9. Прореживание

последовательность, соответствующую отсчетам  $x_a(t)$ , взятым с периодом  $T' = T/L$ , т. е.

$$y(n) = x_a(nT') = x_a(nT/L). \quad (2.45)$$

Очевидно,  $y(n) = x(n/L)$  для  $n=0, \pm L, \pm 2L$ , но для других значений недостающие отсчеты необходимо получить с использованием методов интерполяции [14]. Для того чтобы выяснить, как

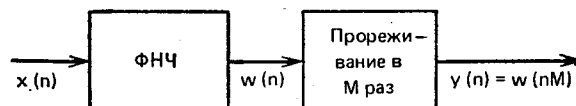


Рис. 2.10. Структурная схема прореживания

это сделать с помощью цифрового фильтра, рассмотрим последовательность

$$v(n) = \begin{cases} x, \left(\frac{n}{L}\right), & n=0, \pm L, \pm 2L, \dots, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.46)$$

Легко показать [14], что преобразование Фурье  $v(n)$  имеет вид

$$V(e^{i\Omega T'}) = X(e^{i\Omega T' L}) = X(e^{i\Omega T}). \quad (2.47)$$

Таким образом,  $V(e^{i\Omega T'})$  оказывается периодической функцией с периодом  $2\pi/T' = 2\pi/LT'$ . На рис. 2.11а показан  $V(e^{i\Omega T'})$  и  $X(e^{i\Omega T})$  при  $T' = T/3$ . Для получения последовательности  $y(n) = x_a(nT')$  по  $v(n)$  необходимо, чтобы

$$Y(e^{i\Omega T'}) = X_a(i\Omega)/T', \quad -\pi/T' \leq \Omega \leq \pi/T'. \quad (2.48)$$

Предположим, что

$$X(e^{i\Omega T}) = X_a(i\Omega)/T, \quad -\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T. \quad (2.49)$$

Тогда из рис. 2.11б видно, что необходимо с помощью фильтра нижних частот выделить составляющие в полосе частот  $-\pi/T \leq \Omega \leq \pi/T$ , и подавить гармоники, расположенные вокруг частот  $\Omega = 2\pi/T$  и  $\Omega = 4\pi/T$ . Более того, для сохранения амплитудных значений, соответствующих интервалу дискретизации  $T'$ , коэффициент усиления фильтра должен быть равен  $L = T/T'$ . Таким обра-

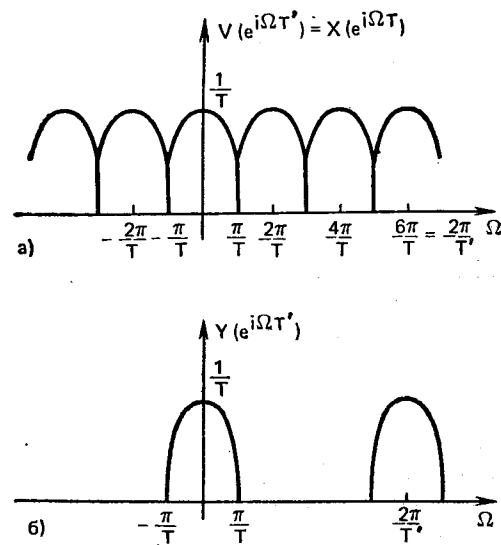


Рис. 2.11. Интерполяция

$$Y(e^{i\Omega T'}) = H(e^{i\Omega T'}) V(e^{i\Omega T'}) = H(e^{i\Omega T'}) X(e^{i\Omega T}) = \\ = H(e^{i\Omega T'}) \frac{1}{T} X_a(i\Omega). \quad (2.50)$$

Для того чтобы  $Y(e^{i\Omega T'}) = (1/T) X_a(i\Omega)$ ,  $\Omega \leq \pi/T'$ , необходимо выполнение соотношения

$$H(e^{i\Omega T'}) = \begin{cases} L, & |\Omega| \leq \pi/T, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2.51)$$

Общая структурная схема процесса интерполяции представлена на рис. 2.12.

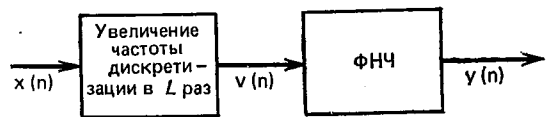


Рис. 2.12. Структурная схема интерполяции

**Изменение частоты дискретизации в дробное число раз.** Отсчеты, соответствующие периоду дискретизации  $T' = MT/L$ , можно получить путем комбинации интерполяции с параметром  $L$  и последующей процедуры прореживания с параметром  $M$ . Соответствующим подбором целых чисел  $M$  и  $L$  можно получить любое необходимое соотношение между частотами дискретизации. Объединив структурные схемы на рис. 2.9 и 2.11, легко заметить, что вместо двух достаточно иметь один фильтр нижних частот (рис. 2.13).

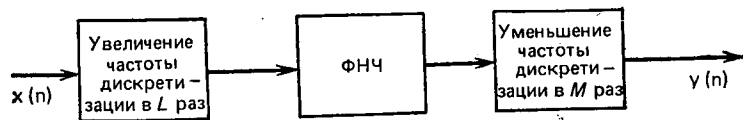


Рис. 2.13. Структурная схема повышения частоты дискретизации

**Преимущества КИХ-фильтров.** Важным аспектом при использовании методов интерполяции и прореживания является выбор фильтра нижних частот. Значительная экономия в объеме вычислений в таких системах достигается использованием КИХ-фильтров в стандартной прямой форме. Экономия в вычислениях достигается вследствие того, что при прореживании только один из каждых  $M$  отсчетов подвергается фильтрации, а при интерполяции каждые  $L-1$  из  $L$  отсчетов равны нулю и потому не влияют на процесс вычисления. Это обстоятельство трудно использовать в полной мере при применении БИХ-фильтров [14].

Если предположить, что фильтрация будет осуществлена с использованием КИХ-фильтра нижних частот, то для большого изменения частоты дискретизации (т. е. большого  $M$  при прореживании и большого  $L$  при интерполяции) более целесообразным оказывается уменьшать (или увеличивать) частоту дискретизации с помощью серии последовательных прореживаний. В этом случае

частота дискретизации уменьшается постепенно и на каждом шаге требуется фильтр нижних частот с менее крутым спадом частотной характеристики. Детальное исследование процедуры последовательного прореживания и интерполяции, а также узкополосной фильтрации содержится в работах [15—18].

## 2.5. Заключение

В этой главе представлен обзор основ теории обработки сигналов в дискретном времени. Введенные здесь понятия дискретной свертки, разностного уравнения, а также описание сигналов и систем в частотной области будут широко использоваться при последующем изложении. Вопросы дискретизации и изменения частоты дискретизации, рассмотренные в § 2.4, также чрезвычайно важны для систем цифровой обработки речевых сигналов.

### Задачи

2.1. Рассмотрим последовательность

$$x(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq n_0 \\ 0, & n < n_0. \end{cases}$$

- Определить  $z$ -преобразование  $x(n)$ .
- Определить преобразование Фурье  $x(n)$  и указать условия существования преобразования Фурье.

2.2. На входе стационарной линейной системы действует сигнал

$$x(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Импульсная характеристика системы имеет вид

$$h(n) = \begin{cases} a^n, & n \geq 0; \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

- Используя понятие дискретной свертки, определить сигнал на выходе системы для любого  $n$ .
- Определить  $z$ -преобразование выходного сигнала.

2.3. Определить  $z$ -преобразование и преобразование Фурье для каждой из следующих последовательностей (все они часто применяются как весовые функции — «окна» — при обработке речевых сигналов).

Экспоненциальное окно

$$w_1(n) = \begin{cases} a^n, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Прямоугольное окно

$$w_2(n) = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Окно Хемминга

$$w_3(n) = \begin{cases} 0,54 - 0,46 \cos [2\pi n/(N-1)], & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Изобразить амплитуды преобразования Фурье для каждого случая. Указание: получить соотношение между  $W_3(e^{i\omega})$  и  $W_2(e^{i\omega})$ .

2.4. Частотная характеристика идеального фильтра нижних частот имеет вид

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c; \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

( $H(e^{i\omega})$ , разумеется, периодическая с периодом  $2\pi$ ).

а) Определить импульсную характеристику идеального фильтра нижних частот.

б) Изобразить импульсную характеристику для  $\omega_c = \pi/4$ . Частотная характеристика идеального полосового фильтра имеет вид

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega_a < |\omega| < \omega_b; \\ 0, & |\omega| < \omega_a \text{ и } \omega_b < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

в) Определить импульсную характеристику идеального полосового фильтра.

г) Изобразить импульсную характеристику для  $\omega_a = \pi/4$  и  $\omega_b = 3\pi/4$ .

2.5. Частотная характеристика идеальной дифференцирующей цепи имеет вид  $H(e^{i\omega}) = i\omega e^{-i\omega\tau}$ ,  $-\pi < \omega < \pi$  (эта характеристика повторяется с периодом  $2\pi$ ). Величина  $\tau$  представляет собой задержку в числе отсчетов.

а) Изобразить амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристики системы.

б) Найти импульсную характеристику системы.

в) Импульсную характеристику данной системы можно ограничить по протяженности величиной  $N$  с помощью окна, такого, как в задаче 2.3. В этом случае задержка составит  $\tau = (N-1)/2$ , так что идеальная импульсная характеристика может быть ограничена симметрично [1]. Если  $\tau = (N-1)/2$  и  $N$  — нечетное число, показать, что идеальная импульсная характеристика убывает как  $1/n$ . Изобразить идеальную импульсную характеристику для случая  $N=11$ .

г) Показать, что при четном  $N$ ,  $h(n)$  убывает как  $1/n^2$ . Изобразить импульсную характеристику для  $N=10$ .

2.6. Частотная характеристика идеального преобразователя Гильберта (90-градусного фазовращателя) с задержкой  $\tau$  есть

$$H(e^{i\omega}) = \begin{cases} -ie^{-i\omega\tau}, & 0 < \omega < \pi; \\ ie^{-i\omega\tau}, & -\pi < \omega < 0. \end{cases}$$

Рассчитать и построить импульсную характеристику этой системы.

2.7. Рассмотрим КИХ-фильтр с линейной фазо-частотной характеристикой. Импульсная характеристика такого фильтра обладает следующим свойством:

$$h(n) = \begin{cases} h(N-1-n), & 0 \leq n \leq N-1; \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

а) Показать, что если  $N$  — четное число, то дискретная свертка для сигнала на выходе может быть представлена как

$$y(n) = \sum_{k=0}^{(N-2)/2} h(k) [x(n-k) + x(n-N-1+k)],$$

и если  $N$  — нечетное, то

$$y(n) = \sum_{k=0}^{(N-3)/2} h(k) [x(n-k) + x(n-N+1+k)] + h((N-1)/2) x(n - (N-1)/2).$$

Таким образом, для вычисления каждого отсчета выходного сигнала необходимо выполнить лишь половину умножений по сравнению с общим случаем.

б) Изобразить структурную схему цифрового фильтра для каждого из приведенных выше соотношений.

2.8. Рассмотрим систему первого порядка

$$y(n) = \alpha y(n-1) + x(n).$$

а) Определить передаточную функцию  $H(z)$  для этой системы.

б) Определить импульсную характеристику системы.

в) Определить, при каких  $\alpha$  система устойчива?

г) Предположим, что сигнал на входе получен дискретизацией с периодом  $T$ . Определить такое значение  $\alpha$ , чтобы  $h(n) < e^{-1}$  для  $nT < 2$  мс, т. е. так, чтобы постоянная времени составляла 2 мс.

2.9. а) Показать, что при  $M < N$   $H(z)$  можно представить в виде разложения на простые дроби в соответствии с (2.30), где коэффициенты  $A_m$  определяются из соотношения  $A_m = H(z)(1-d_m z^{-1})|_{z=d_m}$ ,  $m=1, 2, \dots, N$ .

б) Показать, что  $z$ -преобразование последовательности  $A_k(d_k)^n u(n)$  имеет вид  $A_k/(1-d_k z^{-1})$ ,  $|z| > |d_k|$ , и, таким образом,  $h(n)$  задается соотношением (2.31).

2.10. Рассмотрим две инвариантные к сдвигу линейные системы в каскадной форме, как это показано на рис. 3.2.1, т. е. выход первой системы представляет собой вход второй.

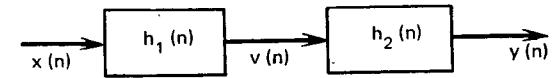


Рис. 3.2.1

а) Показать, что импульсная характеристика общей системы имеет вид  $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$ .

б) Показать, что  $h_1(n)h_2(n) = h_2(n)h_1(n)$  и, таким образом, общая импульсная характеристика не зависит от порядка включения каскадов.

в) Рассмотрим передаточную функцию (2.23), записанную в форме

$$H(z) = \left[ \sum_{r=0}^M b_r z^{-r} \right] \left[ \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} \right] = H_1(z) H_2(z),$$

т. е. в виде каскадного соединения двух систем. Записать разностное уравнение для системы в целом.

г) Рассмотрим две части системы в обратном порядке, т. е.  $H(z) = H_2(z)H_1(z)$ . Показать, что результирующая система описывается (2.33).

2.11. Для разностного уравнения  $y(n) = 2\cos(bT)y(n-1) - y(n-2)$  найти начальные условия  $y(-1)$  и  $y(-2)$  так, чтобы

а)  $y(n) = \cos(bTn)$ ,  $n \geq 0$ ;

б)  $y(n) = \sin(bTn)$ ,  $n \geq 0$ .

2.12. Рассмотрим систему разностных уравнений:

$$y_1(n) = Ay_1(n-1) + By_2(n-1) + x(n),$$

$$y_2(n) = cy_1(n-1) + Dy_2(n-1).$$

а) Изобразить структурную схему для этой системы.

б) Определить передаточные функции.

в) Для случая  $A=D=r \cos \theta$  и  $c=-B=r \sin \theta$  определить импульсную характеристику  $h_1(n)$  и  $h_2(n)$  и результирующую, если система возбуждается сигналом  $x(n) = \delta(n)$ .

2.13. Реализуемая инвариантная к сдвигу система имеет передаточную функцию вида

$$H(z) = \frac{(1+2z^{-1}+z^{-2})(1+2z^{-1}+z^{-2})}{\left(1+\frac{7}{8}z^{-1}+\frac{5}{16}z^{-2}\right)\left(1+\frac{3}{4}z^{-1}+\frac{7}{8}z^{-2}\right)}.$$

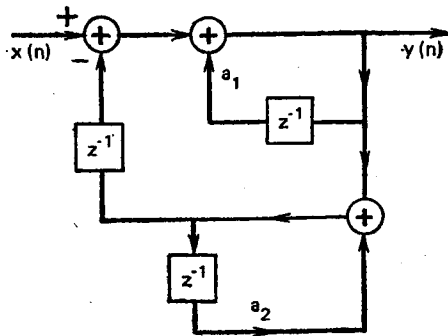


Рис. 3.2.2

а) Изобразить цифровую структурную схему, соответствующую данной системе в каскадной и прямой формах.

б) Определить, устойчива ли эта система? Привести пример.

2.14. Для системы на рис. 3.2.2:

а) Записать разностное уравнение, описывающее эту систему.

б) Определить передаточную функцию для данной системы.

2.15. Определить  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$  через  $b_1$  и  $b_2$  так, чтобы обе системы на рис. 3.2.3 обладали одной и той же передаточной функцией.

2.16. Передаточная функция обычного резонатора имеет вид

$$H(z) = \frac{1 - 2e^{-aT} \cos(bT)z^{-1} + e^{-2aT}}{1 - 2e^{-aT} \cos(bT)z^{-1} + e^{-2aT}z^{-2}}$$

а) Найти полюса и нули  $H(z)$  и изобразить их на  $z$ -плоскости.

б) Найти импульсную характеристику для  $T=10^{-4}$ ;  $b=1000$ ;  $a=200$  и изобразить ее на графике.

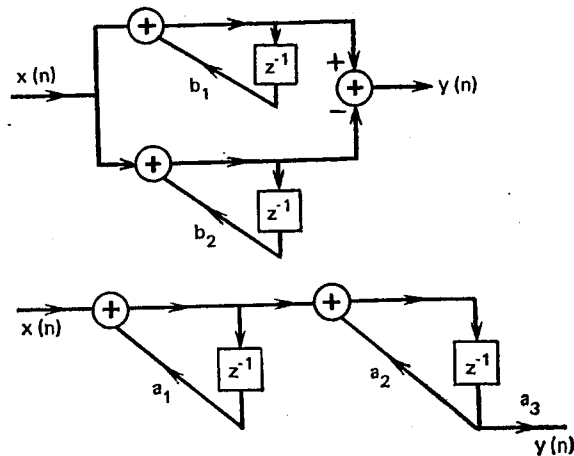


Рис. 3.2.3

2.17. Рассмотрим последовательность конечной длительности  $x(n) = \delta(n) + 0,5\delta(n-5)$ .

а) Найти  $z$ -преобразование и преобразование Фурье для  $x(n)$ .

б) Найти  $N$ -точечное ДПФ для  $x(n)$  при  $N=50$ ;  $10$ ;  $5$ .

в) Сравнить ДПФ при  $N=5$  и  $50$ .

г) Определить взаимосвязь между ДПФ и преобразованием Фурье.

2.18. Речевой сигнал дискретизирован с частотой 20 000 отсч./с. Для вычисления 1024-точечного ДПФ выделен сегмент, равный 1024 отсчетам.

а) Определить длительность сегмента.

б) Какое частотное разрешение достигается в ДПФ?

в) Как изменятся ответы на вопросы а) и б), если сегмент будет содержать 512 отсчетов (для вычисления ДПФ сегмент дополняется 512 нулями)?

## Цифровые модели речевых сигналов

### 3.0. Введение

Для того чтобы научиться применять методы цифровой обработки сигналов в задачах связи, надо хорошо представлять основные положения как теории речеобразования, так и теории цифровой обработки сигналов. В данной главе приведен обзор положений акустической теории речеобразования и показано, как из нее вытекают различные способы представления речи. Особенно большое внимание уделяется моделям в дискретном времени, с помощью которых описывается дискретизированный речевой сигнал. Эти модели служат основой применения методов цифровой обработки.

Назначение данной главы близко к назначению гл. 2, в которой излагаются предварительные сведения об изучаемых вопросах. Более детальное изложение можно найти в [1—5]. Повышенного внимания заслуживают книги Фанта [1] и Фланагана [2]. В [1] подробно рассмотрены положения акустической теории речеобразования и содержится большое количество данных о системах измерения акустических характеристик речи и ее моделях. В книге Фланагана, охватывающей более широкий круг вопросов, дается богатое множество способов физического моделирования процесса речеобразования и указываются пути их применения для представления и обработки речевых сигналов. Эти книги могут быть рекомендованы читателю, желающему глубоко изучить состояние проблемы.

Перед изложением акустической теории речеобразования и ее математических положений полезно познакомиться с различными типами звуков, из которых состоит речь. Поэтому глава начинается с краткого введения в акустическую фонетику, в котором приводятся основные классы фонем английского языка, рассматриваются особенности их произнесения. Далее излагаются основы акустической теории речеобразования. Рассматриваются вопросы распространения звуковых волн в голосовом тракте, электрические аналоги голосового тракта, квазистационарное поведение артикуляторного аппарата при произнесении протяжных звуков речи. Теория позволяет представить речевой сигнал в виде отклика нестационарной линейной системы (голосового тракта), возбуждаемой либо шумом, либо квазипериодической последовательностью импульсов. Такое представление применяется для получения моделей речевого сигнала в дискретном времени. Эти модели, разработанные на основе положений акустической теории, формируются с позиций теории цифровой обработки сигналов и используются далее при изложении основного предмета книги — методов цифровой обработки речевых сигналов.