

## Глава 4

## КОНСТРУКЦИИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

## 4.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой главе рассмотрены конструкции цифровых фильтров и ряд характерных приемов, которыми реализуются фильтры наиболее общих типов.

Прежде чем перейти к обсуждению фильтров более высоких порядков (полоснопропускающих, заграждающих, фильтров высоких и низких частот), подробно рассмотрим главные элементы их конструкций — импульсные фильтры с бесконечными областями отклика (ИБО) первого и второго порядка.

Войти в круг вопросов цифровой фильтрации поможет введенный в гл. 1 фильтр с непрерывной областью, определенный дифференциальным уравнением

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega_n \dot{y}(t) + \omega_n^2 y(t) = x(t), \quad (4.1)$$

где  $x(t)$  — функция на входе, а  $y(t)$  — выход фильтра. Как правило, такой фильтр предназначается для *полосной* фильтрации, причем центр полосы располагается около  $\omega_n$  рад или  $f_n = \omega_n/(2\pi)$  Гц.

Предположим, что заданы нулевые начальные условия. Тогда применение преобразования Фурье приводит к уравнению

$$-\omega^2 Y(f) + 2\zeta\omega_n j\omega Y(f) + \omega_n^2 Y(f) = X(f),$$

где  $\omega = 2\pi f$ . Значит, передаточная функция равна

$$\frac{Y(f)}{X(f)} = H(f) = \frac{1}{-\omega^2 + 2\zeta\omega_n j\omega + \omega_n^2}.$$

Передаточная функция представляет собой, вообще говоря, комплексную функцию от частоты. Как правило, эта независимая переменная принимает действительные значения. Исключение составляют случаи нулей и полюсов фильтра. Наиболее общим видом передаточной функции служит отношение

$$H(f) = \frac{N(f)}{D(f)}$$

взаимно простых многочленов  $N(f)$  и  $D(f)$  от  $f$ . Нулями и полюсами будут решения уравнений  $N(f) = 0$  и  $D(f) = 0$  соответственно.

Как подчеркивалось в гл. 1, нули и полюсы определяют дробно-рациональную функцию типа  $H(f)$  с точностью до постоянного множителя.

В нашем примере нулей нет, а полюсами будут решения уравнения

$$\omega_n^2 \left[ 1 - \left( \frac{f}{f_n} \right)^2 + \frac{j2\zeta f}{f_n} \right] = 0.$$

Перепишав его в виде

$$f^2 - j2\zeta f_n f - f_n^2 = 0,$$

получим решения

$$\begin{aligned} f_1, f_2 &= \frac{j2\zeta f_n \pm \sqrt{(-j2\zeta f_n)^2 + 4f_n^2}}{2} = \\ &= f_n [j\zeta \pm \sqrt{1 - \zeta^2}] = \pm f_n \sqrt{1 - \zeta^2} + j\zeta f_n. \end{aligned}$$

Поэтому передаточную функцию в рассматриваемом примере можно переписать в виде

$$H(f) = -\frac{1}{(2\pi)^2 (f - f_1)(f - f_2)}.$$

В общем случае такой способ записи приводит к представлению передаточной функции вида

$$H(f) = c \frac{\prod_{i=1}^L (f - f_{zi})}{\prod_{k=1}^K (f - f_{pk})},$$

в котором  $f_{zi}$  — нули, а  $f_{pk}$  — полюсы.

Напомним также, что обратное преобразование Фурье  $h(t)$  функции  $H(f)$  связывает  $y(t)$  и  $x(t)$  посредством интегрального уравнения

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (4.2)$$

в котором интеграл есть свертка функций  $h(t)$  и  $x(t)$ .

Заслуживает внимания сопоставление соотношений (4.1) и (4.2). Первое представляет собой *дифференциальное* уравнение, связывающее  $x(t)$  и  $y(t)$ , а последнее — определяющее ту же связь *интегральное* уравнение. Как будет видно из дальнейшего, подобная связь возникает и для цифровых фильтров. В частности, дифференциальным уравнениям будут соответствовать *разностные* уравнения, а свертке (4.2) — соответствующие бесконечные суммы.

Необходимо обратить внимание также на следующие важные обстоятельства. Во-первых, главной характеристикой типов фильтров является коэффициент усиления, т. е. функция  $|H(f)|$ . Во-вторых, передаточную функцию с точностью до постоянного множителя определяют нули и полюсы. Кроме того, с помощью полюсов устанавливается *устойчивость* фильтра, означающая, грубо говоря, что отклик на импульсную функцию ограничен сверху убывающей экспонентой.

#### 4.2. ФИЛЬТРЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Наиболее общий вид цифрового фильтра первого порядка определяется разностным уравнением

$$y(i) = \sum_{k=0}^K b_k x(i-k) - a_1 y(i-1). \quad (4.3)$$

Текущий выход фильтра определяется линейной комбинацией  $K$  предшествовавших значений входа, текущим значением входа и одним предыдущим значением выхода. Этот фильтр и называют фильтром первого порядка потому, что для получения нового значения выхода из линейной комбинации значений входов вычитают только одно предыдущее значение выхода (умноженное на постоянный множитель). Вообще, порядок фильтра определяет число входящих в разностное уравнение значений предшествовавших выходов.

В табл. 4.1 приводятся коэффициенты для нескольких важных случаев. Как видно из этой таблицы, фильтр низких частот задается разностным уравнением

$$y(i) = (1-\alpha)x(i) + \alpha y(i-1).$$

В качестве основных средств анализа фильтров принято использовать передаточную функцию, ее коэффициент усиления и фазу. Вычислить передаточную функцию можно несколькими способами. Приступая к работе с цифровыми фильтрами, имеет смысл для начала провести это вычисление круглым путем. Запишем определение преобразования Фурье

$$Y(f) = T \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(i) \exp(-j2\pi f i T),$$

а затем заменим  $y(i)$  правой частью предыдущего уравнения:

$$Y(f) = T \sum_{i=-\infty}^{\infty} [(1-\alpha)x(i) + \alpha y(i-1)] \exp(-j2\pi f i T).$$

Таблица 4.1

Коэффициенты фильтров пяти типов, полученных из общего уравнения (4.3) для фильтра первого порядка

	$b_0$	$b_1$	$a_1$
Интегратор	$T$	0	-1
Дифференциатор <sup>а)</sup>	$\frac{1}{T}$	$-\frac{1}{T}$	0
Низкополосный фильтр	$(1-\alpha)$	0	$-\alpha$
Фильтр высоких частот	$(1-\alpha)$	0	$\alpha$
Фильтр Конелла <sup>б)</sup> (высоких частот)	$(1-\frac{\alpha}{2})$	$-(1-\frac{\alpha}{2})$	$-(1-\alpha)$
		$0 < \alpha < 1$	

<sup>а)</sup> Пожалуй, не совсем честно называть дифференциатор фильтром первого порядка, поскольку он не имеет члена  $a_1$

<sup>б)</sup> Фильтр Конелла был изобретен Ноутессом (С. В. Notess).

Правую часть полученного уравнения разобьем на две суммы:

$$Y(f) = (1-\alpha)T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp(-j2\pi f i T) + \alpha T \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(i-1) \exp(-j2\pi f i T).$$

Первая из них представляет собой преобразование Фурье последовательности  $x(i)$ :

$$(1-\alpha) \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp(-j2\pi f i T) = (1-\alpha) X(f).$$

Вторая сумма — почти преобразование Фурье. Чтобы показать это, сделаем замену индекса суммирования  $l=i-1$  и перепишем ее в виде

$$\begin{aligned} \alpha T \sum_{i=-\infty}^{\infty} y(i-1) \exp(-j2\pi f i T) &= \\ &= \alpha T \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(l) \exp(-j2\pi f (l+1) T) = \\ &= \alpha \exp(-j2\pi f T) T \sum_{l=-\infty}^{\infty} y(l) \exp(-j2\pi f l T) = \\ &= \alpha \exp(-j2\pi f T) Y(f). \end{aligned}$$

После этой замены можно вынести за знак суммирования экспоненту. В результате получится произведение этой экспоненты на преобразование Фурье последовательности  $y(i)$ ; разумеется, совершенно безразлично, используется ли в определении преобразования  $Y(f)$  переменная  $i$  или  $l$ .

Собирая теперь полученные результаты, приходим к соотношению

$$Y(f) = (1 - \alpha) X(f) + \alpha \exp(-j2\pi fT) Y(f),$$

из которого определяем отношение  $Y(f)/X(f)$ :

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha \exp(-j2\pi fT)}.$$

Проведенные вычисления можно значительно упростить, если воспользоваться теоремой из гл. 1, в которой утверждалось следующее.

**Теорема.** Если  $X(f)$  — преобразование Фурье последовательности  $x(i)$ , то преобразованием Фурье сдвинутой последовательности  $x(i-k)$  будет служить  $X(f) \exp(-j2\pi f k T)$ .

Ее можно непосредственно применять к разностному уравнению. Например, полученное только что выражение для  $H(f)$  можно получить прямо из разностного уравнения, производя замены

$$x(i-k) \rightarrow X(f) \exp(-j2\pi f k T), \quad y(i-l) \rightarrow Y(f) \exp(-j2\pi f l T).$$

После этого остается найти только отношение  $Y(f)/X(f)$ . Это можно сделать перестановкой всех членов, содержащих  $Y(f)$ , в одну часть, а содержащих  $X(f)$  — в другую. Затем надо поделить обе части на произведение  $X(f)$  и коэффициента, полученного при  $Y(f)$ .

Для того чтобы найти коэффициент усиления и фазу фильтра низких частот, нужно разделить в знаменателе действительную и мнимую части:

$$H(f) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha \exp(-j2\pi fT)} = \frac{1 - \alpha}{(1 - \alpha \cos(2\pi fT)) + j\alpha \sin(2\pi fT)}.$$

Получится следующее выражение для коэффициента усиления.

$$|H(f)| = \sqrt{\frac{(1 - \alpha)^2}{(1 - \alpha \cos(2\pi fT))^2 + (\alpha \sin(2\pi fT))^2}} = \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 - 2\alpha \cos(2\pi fT) + \alpha^2}}.$$

Аналогично находится фаза

$$\varphi(f) = \operatorname{arctg} \left( \frac{\alpha \sin(2\pi fT)}{1 - \alpha \cos(2\pi fT)} \right).$$

Для некоторых значений  $\alpha$  коэффициент усиления этого фильтра графически изображен на рис. 4.1. Заметим, что  $|H(0)| = 1$  для всех значений  $\alpha$ . Коэффициент  $\alpha_0 = (1 - \alpha)$  выбран таким лишь затем, чтобы сделать коэффициент усиления равным единице в 0 Гц, т. е. чтобы нормировать его.

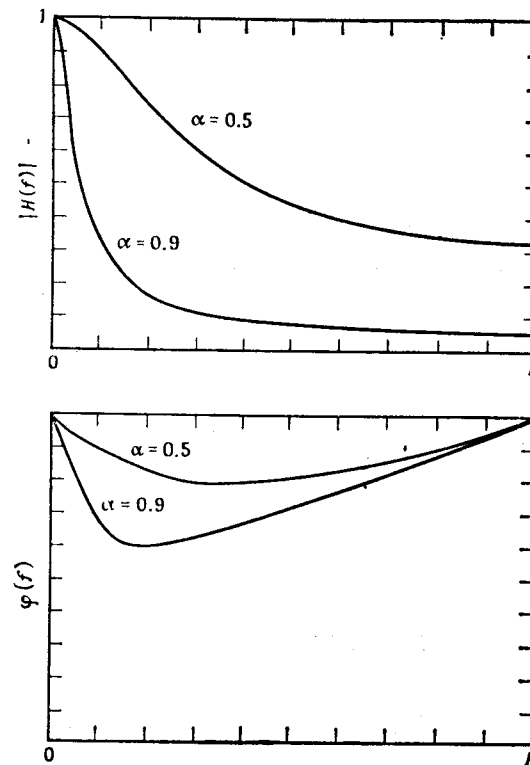


Рис. 4.1. Графики коэффициента усиления и фазы для низкочастотного фильтра первого порядка.

Импульсную функцию отклика  $h(i)$  этого фильтра можно получить, применяя обратное преобразование Фурье к функции  $H(f)$ :

$$h(i) = \int_{-F}^F H(f) \exp(j2\pi f i T) df = \int_{-F}^F \frac{(1 - \alpha) \exp(j2\pi f i T)}{[1 - \alpha \exp(-j2\pi fT)]} df.$$

Найти функцию  $h(i)$  можно и не проводя этого сложного интегрирования: следует только получить  $h(i)$  как отклик для последовательности  $1/T, 0, 0, \dots$ . По определению  $h(i) = 0$  при

$i < 0$ . Поэтому

$$h(0) = \frac{1-\alpha}{T} + 0,$$

$$h(1) = (1-\alpha)0 + \alpha \frac{1-\alpha}{T} = \alpha \frac{1-\alpha}{T},$$

$$h(2) = (1-\alpha)0 + \alpha \left( \alpha \frac{1-\alpha}{T} \right) = \alpha^2 \frac{1-\alpha}{T},$$

...

$$h(i) = \alpha^i \frac{1-\alpha}{T}.$$

Теперь становится понятной причина того, что значение  $\alpha$  выбрано в интервале  $(0; 1)$ . Для таких значений  $\alpha$  члены последовательности  $h(i)$  убывают в геометрической прогрессии. Для значений  $\alpha$ , больших единицы, члены этой последовательности возрастают в геометрической прогрессии. Например, в случае  $\alpha = 0.5$  получается последовательность  $0.5/T, 0.25/T, 0.125/T, \dots, 2^{-i}/(2T)$ , а в случае  $\alpha = 2$  — последовательность  $-1/T, -2/T, -4/T, \dots, -2^i/T$ .

При  $\alpha = 2$  значения последовательности растут настолько быстро, что вскоре исчерпывают емкость любого арифметического устройства с фиксированной точкой и приводят к переполнению. Отметим в заключение, что это и есть пример неустойчивости цифрового фильтра.

### 4.3. ФИЛЬТРЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Начнем с фильтра второго порядка

$$y(i) = b_0 x(i) - a_1 y(i-1) - a_2 y(i-2).$$

Это не самый общий случай; в последнем могут присутствовать нули, т. е. в уравнении для фильтра появились бы слагаемые  $b_1 x(i-1)$  и  $b_2 x(i-2)$ .

Необходимо запомнить следующие важные выводы, касающиеся фильтров второго порядка. Эти результаты будут доказаны чуть ниже.

1. В наибольшей степени определяют характер фильтра члены  $a_1$  и  $a_2$ . Для того чтобы фильтр был устойчивым, они должны попадать в относительно небольшую треугольную область на плоскости пар возможных значений коэффициентов  $(a_1, a_2)$ .

2. Этими же членами, т. е.  $a_1$  и  $a_2$ , определяются и полюсы фильтра. При этом возникают два случая: 1) полюсы действительны, 2) полюсы комплексны. Последний случай наиболее интересен.

Первым шагом в доказательстве этих утверждений будет вычисление передаточной функции для исходного уравнения. Используя теорему о сдвиге, получаем соотношение

$$Y(f) = b_0 X(f) - a_1 Y(f) \exp(-j2\pi fT) - a_2 Y(f) \exp(-j4\pi fT),$$

из которого определяется передаточная функция

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{b_0}{1 + a_1 \exp(-j2\pi fT) + a_2 \exp(-j4\pi fT)}.$$

Переходя к обозначению  $z = \exp(j2\pi fT)$ , перепишем знаменатель в виде

$$1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}.$$

Полюсами фильтра будут корни уравнения

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0,$$

полученного приравниванием нулю знаменателя и умножением обеих частей уравнения на  $z^2$ . Этими корнями будут значения  $z_1$  и  $z_2$ , определенные формулой

$$z_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}.$$

Возникают два случая.

*Первый случай.* Если  $a_1^2 - 4a_2 \geq 0$ , то корни будут разными действительными числами, за исключением случая  $a_1^2 - 4a_2 = 0$ , в котором эти действительные корни совпадают.

*Второй случай.* Если  $a_1^2 - 4a_2 < 0$ , то корнями будут два комплексно-сопряженных числа.

Границу этих двух случаев определяет уравнение для выражения под радикалом

$$a_1^2 - 4a_2 = 0.$$

Это уравнение параболы, изображенной на рис. 4.2.

**Действительные полюсы.** В первом случае исходное уравнение для фильтра можно переписать в виде

$$y(i) = b_0 x(i) + (c_1 + c_2) y(i-1) - c_1 c_2 y(i-2),$$

где

$$a_1 = -(c_1 + c_2), \quad a_2 = c_1 c_2.$$

Как будет видно чуть позже,  $c_1$  и  $c_2$  суть корни уравнения  $z^2 + a_1 z + a_2 = (z - c_1)(z - c_2)$ . Естественно, выбрать произвольно их нельзя. Имея значения  $a_1$  и  $a_2$ , числа  $c_1$  и  $c_2$  можно вычислить, записав  $c_1$  в виде  $a_2/c_2$  и подставив его в выражение для  $a_1$ :

$$a_1 = - \left( \frac{a_2}{c_2} + c_2 \right);$$

следовательно,  $c_2^2 + c_2 a_1 + a_2 = 0$  и

$$c_2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

и, значит,

$$c_1 = \frac{2a_2}{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}$$

Заметим, что оба коэффициента  $c_1$  и  $c_2$  будут действительными, если  $a_1^2 - 4a_2 > 0$ . Разумеется, поэтому и определялись

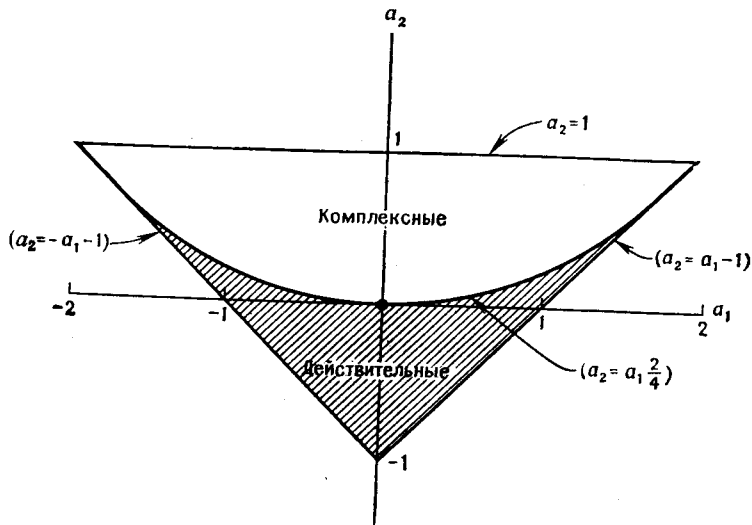


Рис. 4.2. Диаграмма устойчивости для фильтра второго порядка. Чтобы фильтр был устойчивым, необходимо, чтобы пары коэффициентов  $(a_1, a_2)$  попадали внутрь указанной области, имеющей форму треугольника.

коэффициенты  $c_1$  и  $c_2$ ; они соответствуют случаю с действительными полюсами.

В этом случае передаточная функция фильтра имеет вид

$$H(f) = \frac{b_0}{1 - (c_1 + c_2) \exp(-j2\pi fT) + c_1 c_2 \exp(-j4\pi fT)}$$

Знаменатель можно представить в виде произведения, поэтому

$$H(f) = \left( \frac{\sqrt{b_0}}{1 - c_1 \exp(-j2\pi fT)} \right) \left( \frac{\sqrt{b_0}}{1 - c_2 \exp(-j2\pi fT)} \right)$$

Теперь ясно, что в этом случае передаточная функция может быть записана в виде произведения

$$H(f) = H_1(f) H_2(f)$$

передаточных функций двух одновременно применяемых фильтров первого порядка

$$H_1(f) = \frac{\sqrt{b_0}}{1 - c_1 \exp(-j2\pi fT)} \quad \text{и} \quad H_2(f) = \frac{\sqrt{b_0}}{1 - c_2 \exp(-j2\pi fT)}$$

Иными словами, если  $u(i)$  — промежуточная функция при вычислении  $y(i)$ , т. е.

$$u(i) = \sqrt{b_0} x(i) + c_1 u(i-1), \quad y(i) = \sqrt{b_0} u(i) + c_2 y(i-1),$$

то

$$U(f) = H_1(f) X(f), \quad Y(f) = H_2(f) U(f),$$

где  $U(f)$  — преобразование Фурье функции  $u(i)$ . Следовательно,

$$Y(f) = H_2(f) [H_1(f) X(f)].$$

Заметим, что  $H_1(f)$  и  $H_2(f)$  можно поменять ролями; конечный результат при этом остается тем же.

Как следует из рассмотрения фильтров первого порядка, абсолютные значения обоих коэффициентов  $c_1$  и  $c_2$  должны быть ограничены единицей. В противном случае по крайней мере один из составляющих фильтров будет неустойчивым. Если абсолютное значение  $c_2$  меньше единицы, т. е.  $-1 < c_2 < 1$ , то

$$-1 < \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} < 1.$$

Умножая эту цепочку неравенств на 2 и прибавляя ко всем частям неравенств  $a_1$  (знаки неравенств при этих операциях на противоположные не изменятся), получим цепочку

$$a_1 - 2 < \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2} < a_1 + 2.$$

Возводя в квадраты обе части второго неравенства, получим неравенство

$$a_1^2 - 4a_2 < a_1^2 + 4a_1 + 4,$$

которое после упрощения принимает вид

$$a_2 > -a_1 - 1.$$

Производя подобные действия с первым неравенством, т. е. возводя в квадрат обе его части (при этом получится неравенство  $a_1^2 - 4a_1 + 4 > a_1^2 - 4a_2$ ) и упрощая результат, придем к неравенству

$$a_2 > a_1 - 1.$$

Эти результаты показывают, что значения  $a_1, a_2$ , удовлетворяющие неравенствам, должны быть расположены выше каждой

из прямых

$$a_2 = a_1 - 1, \quad a_2 = -a_1 - 1$$

на плоскости  $(a_1, a_2)$ . Как явствует из рис. 4.2, отрезки этих прямых служат нижними сторонами треугольника устойчивости.

**Комплексные полюсы.** Гораздо более интересен случай с комплексными полюсами. Определим фильтр уравнением

$$y(i) = b_0 x(i) + [2 \exp(-\alpha) \cos \beta] y(i-1) + [-\exp(-2\alpha)] y(i-2),$$

т. е. положим

$$a_1 = -2 \exp(-\alpha) \cos \beta, \quad a_2 = \exp(-2\alpha).$$

Для данных  $a_1$  и  $a_2$  параметры  $\alpha$  и  $\beta$  вычисляются по формулам

$$\alpha = -\frac{1}{2} \ln(a_2),$$

$$\beta = \arccos\left(-\left[\frac{a_1}{2 \exp(-\alpha)}\right]\right) = \arccos\left(-\left[\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right]\right).$$

Из этих формул получаются два ограничения на  $a_1$  и  $a_2$ : из уравнения для  $\alpha$  — ограничение  $0 < a_2$ , а из уравнения для  $\beta$  — ограничение

$$\left|-\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right| < 1.$$

Если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то корни будут действительными. Возводя в квадрат обе части последнего неравенства, получим условие  $a_1^2 < 4a_2$ , которому соответствует область над параболой  $a_1^2 = 4a_2$ .

Квадратное уравнение для полюсов

$$z^2 + a_1 z + a_2 = 0$$

в рассматриваемом случае имеет вид

$$z^2 - [2 \exp(-\alpha) \cos \beta] z + \exp(-2\alpha) = 0.$$

Поэтому корни вычисляются по формуле

$$z_{1,2} = \frac{2 \exp(-\alpha) \cos \beta \pm \sqrt{4 \exp(-2\alpha) \cos^2 \beta - 4 \exp(-2\alpha)}}{2}.$$

Вынося из-под знака квадратного корня  $4 \exp(-2\alpha)$  и упрощая полученное выражение, имеем

$$z_{1,2} = \exp(-\alpha) \left[ \cos \beta \pm \sqrt{\cos^2 \beta - 1} \right] = \exp(-\alpha) [\cos \beta \pm j \sin \beta] =$$

$$= \exp(-\alpha) \exp(\pm j\beta) = \exp(-\alpha \pm j\beta).$$

Наконец, подстановкой  $z = \exp(j2\pi f T)$  получаем

$$j2\pi f T = -\alpha \pm j\beta, \quad f_{1,2} = \frac{1}{2\pi T} [\pm \beta + j\alpha].$$

Если фильтр второго порядка имеет действительные полюсы, то они всегда будут расположены или на прямой  $f=0$ , или на прямой  $f=F$ . В последнем случае один из полюсов попадет и на прямую  $f=-F$ . В остальных случаях полюсы заполняют часть комплексной области над интервалом  $(-F, F)$ .

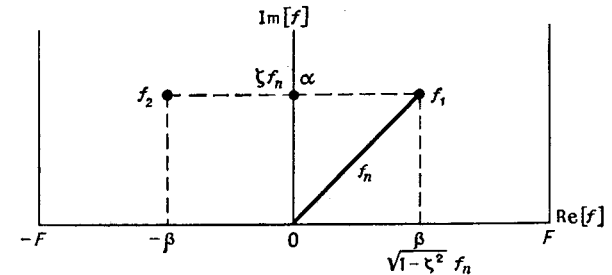


Рис. 4.3. Расположение полюсов фильтра второго порядка. Предполагается, что величина  $\alpha$  положительна.

Расположение полюсов показано на рис. 4.3. Если перейти к собственной частоте и коэффициенту затухания, то

$$\alpha = 2\pi \zeta f_n, \quad \beta = 2\pi \sqrt{1 - \zeta^2} f_n.$$

Теперь остается проверить выражение для знаменателя передаточной функции

$$D(f) = \{1 - \exp[-j2\pi T(f - f_1)]\} \{1 - \exp[-j2\pi T(f - f_2)]\}.$$

Заметим, что как только  $f$  примет значение  $f_1$  или  $f_2$ , один из множителей обратится в 0, поскольку соответствующая экспонента станет равной единице. Таким образом,

$$D(f_1) = D(f_2) = 0,$$

что и следовало ожидать.

Более того, если подставить выражения для  $f_1$  и  $f_2$  в формулу для  $D(f)$ , то получатся исходные коэффициенты. Действительно,

$$D(f) = \left\{ 1 - \exp \left[ -j2\pi T \left( f - \frac{-\beta + j\alpha}{2\pi T} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ 1 - \exp \left[ -j2\pi T \left( f - \frac{+\beta + j\alpha}{2\pi T} \right) \right] \right\} =$$

$$= [1 - \exp(-j2\pi f T) \exp(-j\beta - \alpha)] \times$$

$$\times [1 - \exp(-j2\pi f T) \exp(j\beta - \alpha)].$$

Раскрывая скобки, получим

$$\begin{aligned} D(f) &= 1 - \exp(-j2\pi fT) [\exp(-j\beta - \alpha) + \exp(j\beta - \alpha)] + \\ &+ \exp(-j4\pi fT) \exp(-j\beta - \alpha + j\beta - \alpha) = \\ &= 1 - \exp(-j2\pi fT) [2 \exp(-\alpha) \cos \beta] + \\ &+ [\exp(-2\alpha)] \exp(-j4\pi fT) = \\ &= 1 - 2 \exp(-\alpha) \cos \beta z^{-1} + \exp(-2\alpha) z^{-2}, \end{aligned}$$

т. е. получился тот знаменатель передаточной функции, который и должен быть.

**Импульсная функция отклика.** Для того чтобы получить последнюю границу треугольника устойчивости, изображенного на рис. 4.2, нужно найти единичный импульсный отклик фильтра второго порядка с комплексными полюсами (второй случай).

Предоставим читателю<sup>1)</sup> проверку того, что при входе

$$x(i) = \begin{cases} 1/T, & i=0, \\ 0 & \text{при остальных } i, \end{cases}$$

и при условии, что  $y(i) = 0$  для  $i < 0$ , выходом для  $x(i)$  фильтра

$$y(i) = b_0 x(i) + 2 \exp(-\alpha) \cos \beta y(i-1) - \exp(-2\alpha) y(i-2)$$

будет значение ( $i \geq 0$ )

$$y(i) = \frac{b_0}{T} \exp(-i\alpha) \left[ \frac{\cos \beta \cos(i\beta - \beta) + (1 - 2 \cos^2 \beta) \cos i\beta}{1 - \cos^2 \beta} \right].$$

Хотя эта запись и допускает дальнейшее упрощение, мы все же остановимся на ней, поскольку так немного проще вычислять несколько первых значений  $y(i)$ .

Обратим внимание на то, что части формулы, содержащие  $\alpha$  и  $\beta$ , разделились. Это поможет выяснить роль, которую играет каждая из этих величин. Заметим также, что  $\alpha$  входит в экспоненту, а  $\beta$  — в тригонометрическое выражение.

Тригонометрический множитель периодичен и ограничен сверху величиной  $2/(1 - \cos^2 \beta)$ . Поэтому с точки зрения устойчивости важна экспонента.

Экспоненциальный член определяет три случая: устойчивость при  $\alpha > 0$ , маргинальную устойчивость при  $\alpha = 0$  и неустойчивость при  $\alpha < 0$ .

При  $\alpha > 0$  величина  $\exp(-i\alpha)$  экспоненциально убывает, при  $\alpha = 0$  экспоненциальный член исчезает, при  $\alpha < 0$  величина  $\exp(-i\alpha)$  экспоненциально возрастает.

Граница устойчивости  $\alpha = 0$  дает третью сторону треугольника устойчивости, поскольку после подстановки в уравнение

<sup>1)</sup> См. упр. 4.6.

$a_2 = \exp(-2\alpha)$  значения  $\alpha = 0$  получается равенство  $a_2 = 1$ , определяющее верхнюю сторону треугольника с рис. 4.2.

**Фильтр второго порядка как осциллятор.** Фильтр второго порядка с комплексными полюсами при  $\alpha = 0$  может использоваться в качестве генератора синуса или косинуса. Соответствующее уравнение имеет вид

$$y(i) = 2(\cos \beta) y(i-1) - y(i-2), \quad i = 0, 1, \dots,$$

где начальные условия определяются таблицей

	Для синуса	Для косинуса
$y(-1)$	$-\sin \beta$	$\cos \beta$
$y(-2)$	$-\sin 2\beta$	$\cos 2\beta$

Как синус, так и косинус будет иметь частоту  $f = \frac{\beta}{2\pi T}$  Гц.

Рассмотрим в качестве примера случай с синусом:

$$y(0) = 2 \cos \beta (-\sin \beta) - \sin 2\beta = 0,$$

$$y(1) = 2 \cos \beta (0) - (-\sin \beta) = \sin \beta,$$

$$y(2) = 2 \cos \beta \sin \beta - (0) = \sin 2\beta,$$

$$\begin{aligned} y(3) &= 2 \cos \beta \sin 2\beta - \sin \beta = 4 \cos^2 \beta \sin \beta - \sin \beta = \\ &= 4(1 - \sin^2 \beta) \sin \beta - \sin \beta = 3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta = \sin 3\beta. \end{aligned}$$

Для общего случая доказательство получается по индукции. Предположим, что

$$y(i-1) = \sin(i-1)\beta, \quad y(i-2) = \sin(i-2)\beta.$$

Тогда

$$y(i) = 2 \cos \beta \sin(i-1)\beta - \sin(i-2)\beta.$$

Если равенство

$$\sin(i-2)\beta = \sin(i-1)\beta \cos \beta - \cos(i-1)\beta \sin \beta$$

подставить в выражение для  $y(i)$ , то последнее примет вид

$$\begin{aligned} y(i) &= 2 \cos \beta \sin(i-1)\beta - \sin(i-1)\beta \cos \beta + \cos(i-1)\beta \sin \beta = \\ &= \cos \beta \sin(i-1)\beta + \cos(i-1)\beta \sin \beta = \sin i\beta, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство по индукции. Доказательство в случае косинуса проводится аналогично.

**Точный фильтр низких частот второго порядка.** Фильтр с передаточной функцией

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\sin(\omega T/2)}{A} \right)^4},$$

где  $A = \sin(\pi BT)$ , называют фильтром низких частот Баттеруорта (Баттеруорт (1930)). Аналоговая форма этого фильтра рассмат-

ривалась в гл. 3. Там указывалось, что величины

$$|H(0)|^2 = \frac{1}{1+0} = 1,$$

$$|H(B)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\pi BT)}{\sin(\pi fT)}\right)^4} = \frac{1}{2}$$

помогают определить характеристики фильтра. Величина  $|H(f)|^2$  при таких  $f$ , что  $\pi BT < \pi fT < \pi$ , стремится к нулю. Величина  $(\sin(\pi fT)/\sin(\pi BT))^4$  больше 1, поэтому  $|H(f)|^2$  убывает с ростом  $\pi fT$  и достигает минимума, когда  $\pi fT = \pi/2$ .

Коэффициенты  $a_1$  и  $a_2$  этого фильтра можно определить несколькими способами. Будем их вычислять «в лоб». Сразу заметим, что это довольно сложно.

Передаточную функцию можно переписать в виде

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{A}\right)^4} = \frac{A^4}{A^4 + \sin^4(\omega T/2)} =$$

$$= \frac{A^4}{A^4 + \left(\frac{1 - \cos(\omega T)}{2}\right)^2} = \frac{4A^4}{4A^4 + (1 - 2\cos(\omega T) + \cos^2(\omega T))}$$

$$= \frac{4A^4}{\cos^2(\omega T) - 2\cos(\omega T) + (1 + 4A^4)}.$$

Без такого перехода от половинного угла прямое применение метода было бы невозможным. Чтобы сделать следующий шаг, заметим, что знаменатель преобразования Фурье разностного уравнения любого двухполюсного фильтра можно записать в виде  $(s + pz^{-1} + qz^{-2})$ . Величины  $s$ ,  $p$  и  $q$  определяют искомые коэффициенты. Найдем их. Квадрат модуля знаменателя передаточной функции должен быть равным

$$(s + pz^{-1} + qz^{-2})(s + pz + qz^2) =$$

$$= (s^2 + p^2 + q^2) + (pq + sp)(z + z^{-1}) + sq(z^2 + z^{-2}).$$

Поскольку  $\cos(\omega T) = (z + z^{-1})/2$ ,  $\cos^2(\omega T) = 1/4(z^2 + 2 + z^{-2})$ , знаменатель можно переписать в виде

$$\cos^2(\omega T) = 2\cos(\omega T) + (1 + 4A^4) =$$

$$= 1/4(z^2 + 2 + z^{-2}) - 2\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) + (1 + 4A^4) =$$

$$= 1/4\{z^2 + z^{-2} - 4(z + z^{-1}) + [4(1 + 4A^4) + 2]\}.$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых членах и отбрасы-

вая множитель  $1/4$ , получим три уравнения:

$$sq = 1,$$

$$pq + sp = -4,$$

$$s^2 + p^2 + q^2 = (6 + 16A^4) = C,$$

из которых нетрудно получить решения

$$a_1 = qp, \quad a_2 = q^2,$$

где

$$p = \sqrt{\frac{C+2 - \sqrt{(C+2)^2 - 64}}{2}},$$

$$q = \left(-\frac{4}{p} + \sqrt{\left(\frac{4}{p}\right)^2 - 4}\right) / 2$$

и  $C = 6 + 16A^4$ .

На рис. 4.4 приводится специальная программа для вычисления весов  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b_0$  этого фильтра. Обозначения в тексте сопоставляются переменным в программе согласно следующей таблице:

В тексте	B	T	a <sub>1</sub>	a <sub>2</sub>	b <sub>0</sub>	A	C+2	p	q
В программе	BW	T	A1	A2	B0	A	C	P	Q

На такой простой результат нами потрачено довольно много усилий. Можно, пожалуй, таким же способом решать задачу

```

1      SUBROUTINE LP2 (BW,T,A1,A2,B0)
2      DOUBLE PRECISION A,C,P,PP,Q,QQ
3      A = SIN (3.1415927*T*BW)
4      C = 8.0D0 + 16.0D0*(A**4)
5      PP = DSQRT (C*C - 64.0D0)
6      P = DSQRT ((C - PP)/2.0D0)
7      QQ = (4.0D0/P)**2 - 4.0D0
8      Q = -2.0D0/P + DSQRT(QQ)/2.0D0
9      A1 = P*Q
10     A2 = Q*Q
11     B0 = 1.0 + A1 + A2
12     RETURN
13     END

```

Рис. 4.4. Программа для получения весов низкочастотного фильтра второго порядка.

для фильтров Баттеруорта и более высоких порядков, но это едва ли необходимо. Как мы вскоре увидим, для реализации фильтров более высоких порядков есть значительно более простой способ.

#### 4.4 ФИЛЬТРЫ БОЛЕЕ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Под фильтром более высокого порядка подразумевается фильтр, выражающийся через три или более предыдущих члена. Напри-



мер, фильтр

$$y(i) = b_0 x(i) - a_1 y(i-1) - a_2 y(i-2) - a_3 y(i-3)$$

является фильтром третьего порядка.

В этом параграфе будут затронуты четыре вида реализаций фильтра: прямая, последовательная (или каскадная), параллельная и цепная. В тех приложениях, которые нами рассматриваются, наиболее важную роль играет последовательная форма реализации.

Фильтр  $M$ -го порядка прямого вида имеет разностное уравнение

$$y(i) = \sum_{k=0}^M b_k x(i-k) - \sum_{m=1}^M a_m y(i-m).$$

Если к этому уравнению, как и раньше, применить преобразование Фурье, то получится уравнение

$$Y(f) = X(f) \sum_{k=0}^M b_k \exp(-j2\pi f k T) - Y(f) \sum_{m=1}^M a_m \exp(-j2\pi f m T).$$

Передачная функция имеет вид

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k \exp(-j2\pi f k T)}{1 + \sum_{m=1}^M a_m \exp(-j2\pi f m T)}.$$

Числитель и знаменатель суть многочлены  $M$ -го порядка от  $z = \exp(j2\pi f T)$ . В частности,

$$N(f) = \sum_{k=0}^M b_k z^{-k}, \quad D(f) = 1 + \sum_{m=1}^M a_m z^{-m}.$$

В этой главе было показано, что уравнение  $D(f) = 0$  имеет корни  $f_1, \dots, f_M$ . Поэтому многочлен  $D(f)$  можно переписать в виде

$$D(f) = a_0 \prod_{i=1}^M \{1 - \exp[-j2\pi T(f - f_k)]\},$$

где  $a_0$  — постоянный множитель.

Корни распадаются на два типа.

**Чисто мнимые корни.** В этом случае корни  $f_k$  имеют вид  $j\alpha_k/(2\pi T)$  или  $j\alpha_k/(2\pi T) + F$ , где  $\alpha_k > 0$ . Соответствующие множители в знаменателе запишутся в виде

$$\left\{1 - \exp\left[-j2\pi T\left(f - \frac{j\alpha_k}{2\pi T}\right)\right]\right\} = [1 - \exp(-\alpha_k) z^{-1}].$$

Если корень имеет вид  $j\alpha_k + F$ , то результат  $[1 + \exp(-\alpha_k) z^{-1}]$  будет соответствовать фильтру высоких частот.

**Комплексные корни.** В этом случае корни встречаются парами. Если  $f_k = (j\alpha_k + \beta_k)/(2\pi T)$ , где  $\beta_k > 0$ , то найдется такое  $k'$ , что  $f_{k'} = (j\alpha_k - \beta_k)/(2\pi T)$ . Два соответствующих множителя в знаменателе принимают вид

$$\left\{1 - \exp\left[-j2\pi T\left(f - \frac{j\alpha_k + \beta_k}{2\pi T}\right)\right]\right\} \left\{1 - \exp\left[-j2\pi T\left(f - \frac{j\alpha_k - \beta_k}{2\pi T}\right)\right]\right\} = 1 - 2\exp(-\alpha_k) \cos \beta_k z^{-1} + \exp(-2\alpha_k) z^{-2}.$$

Учитывая полученные результаты, можно утверждать, что найдутся такие числа  $P$  и  $Q$  ( $Q$  — четное), что  $M = P + Q$  и

$$D(f) = \prod_{p=1}^P (1 - a_{1p} z^{-1}) \prod_{q=1}^{Q/2} (1 - a_{1q} z^{-1} - a_{2q} z^{-2}),$$

где  $a_{1p}$ ,  $a_{1q}$  и  $a_{2q}$  — действительные числа. Это означает, что многочлен  $D(f)$  всегда можно разложить в произведение множителей первой и второй степеней с действительными коэффициентами.

До сих пор мы пользовались только фактами из алгебры, вытекающими из некоторых элементарных теорем. Посмотрим теперь, как эти факты преломляются в теории фильтров. Допустим для простоты (без большой потери общности), что в числителе передачной функции стоит только одна константа, т. е.

$$H(f) = \frac{b_0}{D(f)}.$$

Определим функции  $H_r(f)$  формулой

$$H_r(f) = \begin{cases} \frac{b_0^{1/R}}{1 - a_{1p} z^{-1}}, \\ \frac{b_0^{1/R}}{1 - a_{1q} z^{-1} - a_{2q} z^{-2}}, \end{cases}$$

где  $R = P + Q/2$ ,  $r = q = 1, \dots, Q/2$ ,  $p = r - Q/2, \dots, R$ . Теперь передачная функция запишется в виде

$$H(f) = \prod_{r=1}^R H_r(f).$$

Нетрудно видеть, что функции  $H_r(f)$  суть передачные функции, соответствующие фильтрам первого и второго порядка. Таким образом, нами доказан следующий результат.

**Теорема.** *Всякий фильтр более высокого порядка можно реализовать последовательностью фильтров первого и второго порядка.*

Уравнением для  $r$ -го фильтра служит

$$u^{(r)}(i) = b_0' u^{(r-1)}(i) - a_{1,r} u^{(r)}(i-1) - a_{2,r} u^{(r)}(i-2),$$

где

$$b_0' = b_0^{1/R}, \quad u^{(0)}(i) = x(i), \quad u^{(R)}(i) = y(i).$$

Другими словами, входом  $r$ -го фильтра будет последовательность  $u^{(r-1)}(i)$ , а выходом  $u^{(r)}(i)$ . Заметим, что некоторые веса  $a_{2,r}$  фильтров могут быть равными нулю.

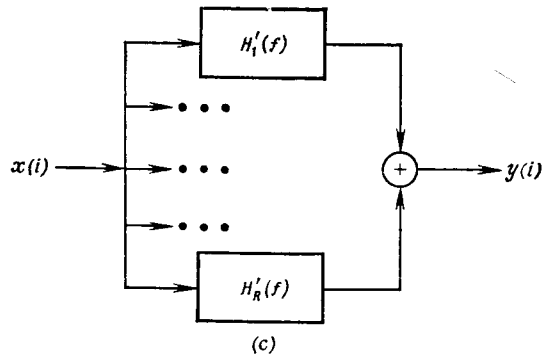
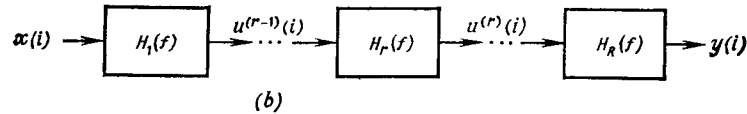
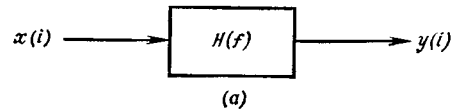


Рис. 4.5. Три способа реализации одного и того же фильтра.  $a$  — прямой;  $b$  — последовательный;  $c$  — параллельный.

Прямая и последовательная формы фильтра показаны соответственно на рис. 4.5,  $a$  и  $b$ . Последовательный фильтр часто называют *каскадным* фильтром.

В последовательном соединении всякие два фильтра коммутативны, и по крайней мере на ЭВМ с очень большим числом битов никаких различий при их перестановках не возникает. Число таких перестановок равно  $R!$ . Если же число битов

уменьшается, то, как будет показано в следующей главе, из-за шума, порождаемого самими фильтрами, порядок их расположения уже начинает приобретать значение, поскольку некоторые фильтры могут генерировать более сильный шум, чем другие, а некоторые наоборот, определенным образом ослаблять шум, создаваемый другими фильтрами.

Далее, оказывается, что прямой фильтр в определенных случаях может быть заменен фильтром параллельного типа, схема которого изображена на рис. 4.5,  $c$ . Отдельный блок такого фильтра определяется передаточной функцией

$$H_r'(f) = \frac{N_r(f)}{D_r(f)},$$

где  $D_r(f)$  — тот же многочлен, что и в последовательной схеме.

Общая передаточная функция этого фильтра имеет вид

$$H(f) = \sum_{r=1}^R H_r'(f) = \frac{N_1(f)}{D_1(f)} + \dots + \frac{N_R(f)}{D_R(f)}.$$

Эту функцию можно записать в виде дробно-рациональной функции, если сложить все члены:

$$H(f) = \frac{\sum_{r=1}^R N_r(f) \prod_{k=1}^R D_k(f)/D_r(f)}{\prod_{r=1}^R D_r(f)}.$$

В этом случае числитель может оказаться равным  $b_0$ . Сама проблема реализации параллельного фильтра и состоит в поиске таких функций  $N_r(f)$  в числителях, чтобы это имело место, т. е.

$$b_0 = \sum_{r=1}^R N_r(f) \prod_{k=1}^R \frac{D_k(f)}{D_r(f)}.$$

Используя частные производные, такое решение можно найти методами комплексного анализа, если все полюсы (т. е. корни общей функции  $D(f)$ ) будут попарно различны.

Из рассмотренных определений понятно, что можно строить массу промежуточных типов фильтров, частично являющихся последовательными, частично прямыми и частично параллельными. Пожалуй, нет никакого смысла останавливаться на этом подробнее.

В *цепном* фильтре все операции располагаются, грубо говоря, в виде цепи. Фрагмент такого фильтра изображен на рис. 4.6. Цепным фильтрам посвящены работы Грэя и Мэркела (1973), Митры и Шервуда (1973). Разумеется, форма таких фильтров

определяется неоднозначно. Существует немало способов для представления в виде цепного фильтра даже простого фильтра второго порядка, а с учетом фильтров более высоких порядков число способов, вообще, становится безмерным.

При таком большом типом разнообразии фильтров (включая четыре основных типа) возникает естественный вопрос о наилучшем выборе.

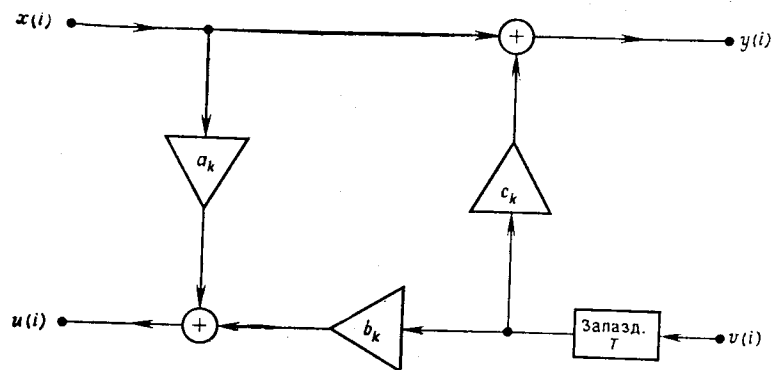


Рис. 4.6. Один участок цепного фильтра.

Ответ на этот вопрос зависит от многих факторов, в частности от характера обрабатываемой информации и оборудования, используемого при обработке. Однако если ограничиться сферой приложений, освещенных в этой книге, т. е. анализом тестовых данных на ЭВМ широкого назначения, производящих операции в режиме плавающей точки, то основу выбора можно свести к следующему.

1. Наилучшей формой фильтра во всех отношениях является последовательная.

2. С вычислительной точки зрения наихудшей является прямая форма фильтра, однако с точки зрения стоимости вычислений, производимых при фильтрации, она наилучшая.

3. Те фильтры, которые встречаются в этой книге, всегда можно представить в виде последовательного фильтра, имеющего не более одного входящего в него фильтра первого порядка.

4. При использовании цепной реализации физические фильтры для ЭВМ широкого назначения, пожалуй, непригодны.

5. Параллельная реализация не имеет никаких преимуществ, и поэтому не рекомендуется.

Короче говоря, если нет достаточных оснований для выбора других возможностей, то при работе на ЭВМ широкого назначения самым предпочтительным будет выбор последовательной формы фильтра.

Если же используется арифметика с фиксированной точкой, то положение коренным образом меняется.

1. Прямая форма редко оказывается пригодной, если полоса частот узкая.

2. Наименьшую ошибку дает параллельная форма (см., например, работу Джексона (1970)).

3. При последовательной форме большое значение для уменьшения общего шума, порождаемого фильтром, имеет порядок расположения составляющих его фильтров. Основные результаты по этому вопросу также можно найти у Джексона (1970).

4. Некоторые типы цепных реализаций дают, по-видимому, наилучшую возможность для получения наименьшего уровня собственного шума фильтра.

**Устойчивость.** Если ограничиться только последовательной формой реализации фильтра, то вопрос о расчете устойчивости будет довольно простым. Чтобы вникнуть в суть проблемы, вернемся к упомянутому в начале этой главы фильтру третьего порядка. Три коэффициента этого фильтра определяют трехмерное пространство. Множество коэффициентов устойчивых фильтров третьего порядка будет заключено в некотором тетраэдре этого пространства. Уже в этом случае границы области устойчивости определить не так просто. Еще более значительно возрастают трудности при попытке определить границы таких областей для прямых форм фильтров четвертого и пятого порядка. Основные результаты, решающие эти проблемы, были получены в работах Джури и Блэнчарда (1961) и Джури (1961).

Для последовательной формы такого же фильтра проблема оказывается совсем простой. Каждый составляющий его фильтр можно рассматривать отдельно от других. Весь фильтр целиком будет устойчивым, если каждый из составляющих его фильтров тоже будет устойчивым.

Если отнести сказанное к полюсам, то это будет означать, что все они должны лежать в той части верхней плоскости частот, которая изображена на рис. 4.3. *Замечание:* во многих технических книгах вместо  $f$  пользуются величиной  $j2\pi f$ . В этом случае график поворачивается на  $90^\circ$  против часовой стрелки и устойчивые полюсы переходят на левую полуплоскость. Кроме того, многие, если не почти все авторы, обращаясь в книгах к дискретной частоте, пользуются тем фактом, что устойчивые полюсы располагаются в единичном круге на  $z$ -плоскости.

Наш выбор  $f$ -плоскости в противовес  $j2\pi f$ - и  $z$ -плоскостям продиктован главной темой книги — изучением плотности спектра мощности. Такой выбор позволяет легче интерпретировать как характеристики фильтров, так и соответствующие спектральные плотности.

## 4.5. ИДЕАЛЬНЫЕ БАЗИСНЫЕ ФИЛЬТРЫ

По традиции под *базисными фильтрами* понимают фильтры, которые широко применяются при обработке данных и сигналов. К ним относят главным образом фильтры низких и высоких

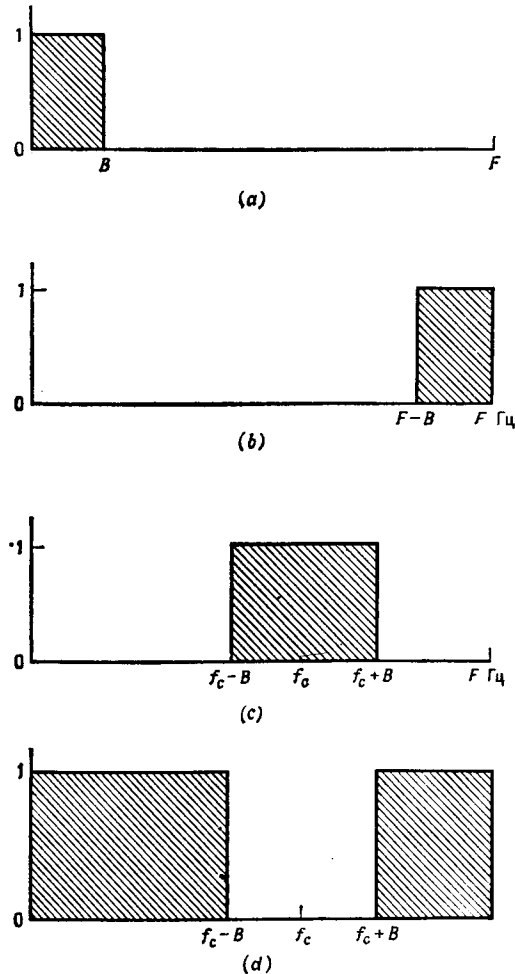


Рис. 4.7. Квадраты абсолютных значений передаточных функций. *a* — идеального низкочастотного фильтра; *b* — идеального фильтра высоких частот; *c* — идеального полоснопропускающего фильтра и *d* — идеального заграждающего фильтра. Штриховка показывает, какая часть данных пропускается фильтром,

частот, полоснопропускающие и заграждающие фильтры. Последние иногда называют также вырезающими фильтрами.

В идеале эти фильтры должны были бы иметь следующие характеристики.

1. Идеальный фильтр низких частот должен пропускать всю частотную информацию в диапазоне  $(0, B)$  Гц и подавлять всю информацию в диапазоне  $(B, F)$  Гц.

2. Идеальный фильтр высоких частот должен иметь обратные характеристики, т. е. пропускать частоты в диапазоне  $(F - B, F)$  Гц и поглощать их в диапазоне  $(0, F - B)$  Гц.

3. Полоснопропускающий фильтр должен пропускать частоты только в диапазоне от  $(f_c - B)$  до  $(f_c + B)$  Гц.

4. Идеальный заграждающий фильтр должен поглощать всю частотную информацию в диапазоне от  $(f_c - B)$  до  $(f_c + B)$  Гц, оставляя всю информацию вне этого диапазона без изменения.

Полосы пропускания фильтров низких и высоких частот имеют ширину  $B$  Гц, для полоснопропускающего и заграждающего фильтров эта ширина равна  $2B$  и  $(F - 2B)$  Гц соответственно. На рис. 4.7 изображены модули передаточных функций идеальных фильтров. На практике добиться таких точных откликов фильтров невозможно по двум причинам. Первая состоит в том, что получить идеальную форму фильтра можно только в пределе при стремящемся к бесконечности  $N$ . Поэтому фактически используются лишь аппроксимации идеальных фильтров. Вторая причина — ограниченное число данных, используемое на практике. Это равносильно тому, что истинная передаточная функция есть в действительности свертка теоретической передаточной функции с функцией  $(\sin x)/x$ , появление которой обусловлено переходом к конечной длине записи. И все-таки можно так реализовать фильтры и применять их, что для практических потребностей они будут столь же хороши, как и идеальные фильтры.

## Реализация фильтров, аппроксимирующих идеальные фильтры.

Для точной реализации перечисленных выше фильтров потребовалось бы бесконечное число членов. Поэтому идеальные формы приближают с помощью многочленов, как это и делается в электрических или электронных фильтрах. В случае электрического фильтра эти многочлены суть просто многочлены от  $f$ . В случае цифровых устройств эти многочлены являются тригонометрическими функциями  $f$ .

Например, показанный на рис. 4.7, *a* идеальный фильтр низких частот можно аппроксимировать для электрических устройств фильтром Баттеруорта

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + (f/B)^{2M}},$$

а для цифровых устройств — фильтром Баттеруорта

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\pi fT)}{\sin(\pi BT)}\right)^{2M}}$$

или

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}(\pi fT)}{\operatorname{tg}(\pi BT)}\right)^{2M}}$$

Во всех трех случаях

$$|H(f)|^2 = \begin{cases} 1 & \text{при } f=0, \\ 1/2 & \text{при } f=B, \\ <1/2 & \text{при } f>B, \end{cases}$$

Степень точности приближения увеличивается с ростом  $M$ , который сопровождается, естественно, ростом стоимости и самого фильтра, и процесса фильтрации.

Причина, по которой эти функции выбираются в качестве аппроксимации передаточной функции идеального фильтра низ-

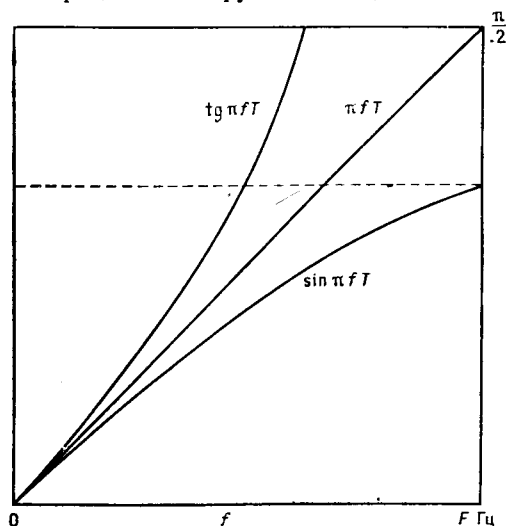


Рис. 4.8. Сравнение поведения функций  $\pi fT$ ,  $\operatorname{tg}(\pi fT)$  и  $\sin(\pi fT)$ .

ких частот, состоит в том, что функции  $\sin(\pi fT)$  и  $\operatorname{tg}(\pi fT)$  в интервале  $(0, F)$  изменения частоты  $f$  ведут себя почти так же, как  $\pi fT$  (см. рис. 4.8).

Теперь возникает задача определения весов  $a_m$  и  $b_k$  для прямой реализации фильтра (или для других эквивалентных реализаций) с передаточной функцией, аппроксимирующей передаточные функции идеальных фильтров.

#### 4.6. СИГУСНЫЙ ФИЛЬТР НИЗКИХ ЧАСТОТ БАТТЕРУОРТА

Синусный фильтр низких частот — не только самый простой из фильтров высоких порядков, но во многих приложениях и один из наиболее полезных. Поэтому остановимся на нем подробно. Попутно с изучением процедуры получения коэффициентов фильтров этого типа рассмотрим подпрограмму LPSB из приложения А, предназначенную для этой цели.

Квадрат модуля передаточной функции синусного фильтра Баттеруорта определен формулой

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sin(\pi fT)}{\sin(\pi BT)}\right)^{2M}}$$

Фильтр не имеет нулей, число его полюсов равно  $M$ .

В конце § 4.3 рассматривалась реализация этого фильтра при  $M=2$ . При этом отмечалось, что использованный там для поиска коэффициентов метод нельзя применить при  $M$ , большем 2.

В этом параграфе будет применен метод, основными составляющими которого являются следующие действия:

1. Определяются полюсы фильтра в виде решений уравнения

$$D(f) = 1 + (\sin(\pi fT)/\sin(\pi BT))^{2M} = 0.$$

2. Из  $2M$  корней этого уравнения  $M$  попадают в верхнюю, а другие  $M$  — в нижнюю полуплоскости. Все корни, попавшие в нижнюю полуплоскость, отвечают неустойчивым фильтрам; они возникли при умножении передаточной функции  $H(f)$  на сопряженную ей функцию  $H^*(f)$ . Так или иначе используются полюсы только из верхней полуплоскости, поскольку они определяют устойчивый фильтр.

3. На этом наиболее сложном этапе определяются решения  $\alpha_m$  и  $\beta_m$  уравнения

$$\sin\left(\frac{\beta_m + j\alpha_m}{2}\right) = a_m + jb_m,$$

которые будут найдены ниже. Решение этого уравнения требует привлечения комплексного арксинуса.

4. После нахождения полюсов  $(\alpha_m, \beta_m)$ ,  $m=1, \dots, M$ , их подставляют в квадратные трехчлены вида

$$1 - 2 \exp(-\alpha_m) \cos \beta_m z^{-1} + \exp(-2\alpha_m) z^{-2},$$

чтобы определить коэффициенты

$$a_{1m} = 2 \exp(-\alpha_m) \cos \beta_m, \quad a_{2m} = -\exp(-2\alpha_m),$$

где  $m=1, \dots, M/2$  и  $M$  — четное. В случае нечетного  $M$  вычисления для  $m=1, \dots, (M-1)/2$  производятся так же, а для  $m=(M+1)/2$  формула для многочлена меняется.



Для удобства, а также для последующего перехода к программе обозначим один корень буквой  $D$ , т. е.

$$D = \frac{-C + \sqrt{C^2 + 4b^2}}{2}$$

(необходим только вариант с плюсом). Поскольку

$$\operatorname{sh}^2 v = \left( \frac{e^v - e^{-v}}{2} \right)^2 = D,$$

извлекая квадратный корень из обеих частей, получим новое уравнение

$$e^v - e^{-v} = 2\sqrt{D}.$$

Если умножить его на  $e^v$ , то получится уравнение

$$e^{2v} - 2\sqrt{D}e^v - 1 = 0,$$

решив которое относительно  $e^v$ , получим корни

$$e^v = \frac{2\sqrt{D} \pm \sqrt{4D+4}}{2} = \sqrt{D} \pm \sqrt{D+1}.$$

Определим параметр  $E$  равенством

$$E = e^v = \sqrt{D} + \sqrt{D+1}.$$

Очевидно, что для действительных значений  $v$  нужно выбирать знак плюс. В этом случае  $v$  можно найти из уравнения

$$v = \ln E = \ln [\sqrt{D} + \sqrt{D+1}].$$

Поскольку  $\cos u \operatorname{sh} v = b$ , имеем соотношение

$$u = \arccos \left( \frac{b}{\operatorname{sh} v} \right).$$

Вспомянув, что  $\operatorname{sh}^2 v = D$ , получим решение

$$u = \arccos \left( \frac{b}{\sqrt{D}} \right).$$

**Фортран-программа для фильтра низких частот.** Рассмотренный выше метод для комплексного арксинуса можно применить в случае уравнения

$$\sin \left( \frac{\beta_m + j\alpha_m}{2} \right) = \sin(\pi BT) s_m,$$

которое решается относительно  $\alpha_m$  и  $\beta_m$ .

Величина  $b_m$  для каждого корня  $s_m$  вычисляется по формуле

$$b_m = \sin(\pi BT) \operatorname{Im} [s_m] = \sin(\pi BT) \sin \theta_m,$$

где угол  $\theta_m$  есть переменный параметр ANG, определенный выше (величину  $a_m$  вычислять не нужно). В программе величина  $\sin(\pi BT)$  заменяется параметром FACT, поэтому

$$B = \text{FACT} \cdot \sin(\text{ANG})$$

где параметр FACT вычисляется заранее по формуле

$$\text{FACT} = \sin(3.14159265 \cdot BW \cdot T)$$

(здесь BW — частота отсечки  $B$ , а  $T$  — выборочный интервал в секундах).

Полученное выше решение, выраженное через  $\alpha$  и  $\beta$ , примет вид

$$\frac{\beta + j\alpha}{2} = u + jv.$$

Очень важно, что в знаменателе стоит двойка. Остается определить на каждом шаге коэффициенты

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \exp(-\alpha) \cos \beta = -2 \exp(-2v) \cos 2u = \\ &= -2 \exp(-2 \ln E) \cos \left[ 2 \arccos \left( \frac{B}{\sqrt{D}} \right) \right] = -2E^{-2} \left( \frac{2B^2}{D} - 1 \right), \\ a_2 &= \exp(-2\alpha) = \exp(-2v) = E^{-4}. \end{aligned}$$

Соберем все необходимые для вычислений формулы:

$$\begin{aligned} A &= \text{FACT} \cdot \cos(\text{ANG}), \\ B &= \text{FACT} \cdot \sin(\text{ANG}), \\ C &= 1 - A^2 - B^2 = 1 - (\text{FACT})^2, \\ D &= \frac{-C + \sqrt{C^2 + 4B^2}}{2}, \\ E &= \sqrt{D} + \sqrt{D+1}, \\ a_1 &= -2E^{-2} \left( \frac{2B^2}{D} - 1 \right), \\ a_2 &= E^{-4}. \end{aligned}$$

Из них видно, что для реализации фильтра Баттеруорта параметр  $A$  не нужен. Все эти соотношения, записанные в виде программы на Фортране, представлены на рис. 4.10. По сравнению с той длинной процедурой, которая потребовалась для получения необходимых для вычисления формул, сама программа оказывается гораздо короче.

Сравните эту программу с аналогичной подпрограммой LPSB, приведенной в приложении А. Они совершенно одинаковы, за

исключением того, что в подпрограмме LPSB задана двойная точность.

На рис. А.11 в приложении А приведен тест для случая  $M=5$ . Скорость выборки равна 200 выб/с, поэтому  $T=0.005$ , а  $F=100$ . Частота отсечки выбирается равной 5 Гц. Она состав-

```

M1 = M/2
FACT = SIN(3.14159265*BW*T)
DØ 5 = I-1 M1
FN = I-1
B = FACT*SIN(FN*SECTOR+WEDGE)
C = 1. - FACT*FACT
D = 0.5*(-C+SQRT(C*C+4*B*B))
E = SQRT(D+1.)+SQRT(D)
A1(I) = -2.*(E**2)*(2.*B*B/D-1.)
5 A2(I) = E**4

```

Рис. 4.10. Фортран-программа для получения весов фильтра.

ляет 5% частоты  $F$ . Оказывается, что исчисление в процентах удобнее непосредственного задания величины  $B$ . Например, величины  $B$  и  $S$ , приведенные ниже в таблице, приводят к одним и тем же весам фильтров:

$B$	$S$	$F$	%
0.5	20	10	5
1	40	20	5
5	200	100	5
100	4 000	2 000	5
500	20 000	10 000	5

Причина этого кроется в том, что  $B$  здесь выбирается всегда равным 5% от  $F$ , т.е. их соотношение остается все время постоянным.

При  $M=5$  в фильтр входят три составляющие: две из них с двойными комплексными полюсами, а оставшаяся — с одним.

Постоянный множитель  $b_0$  для всех трех составляющих остается одинаковым. Посмотрим, как это получается. Запишем формулу для передаточной функции рассматриваемого фильтра в виде

$$H(f) = \prod_{p=1}^3 \frac{b_0}{1 + a_{1p} \exp(-j2\pi fT) + a_{2p} \exp(-j4\pi fT)}$$

Полоса пропускания полагается равной диапазону от 0 до  $f_c$  Гц. Естественно предположить, что коэффициент усиления в этой полосе равен единице. В частности, должно иметь место равенство  $H(0) = 1$ . Так как  $\exp(0) = 1$ , из формулы для передаточной

функции получим соотношение

$$1 = b_0^3 / \prod_{p=1}^3 (1 + a_{1p} + a_{2p}),$$

из которого следует, что для выбранных в тесте параметров имеет место соотношение

$$b_0 = \sqrt[3]{\prod_{p=1}^3 (1 + a_{1p} + a_{2p})} = \sqrt[3]{(1 + a_{11} + a_{21})(1 + a_{12} + a_{22})(1 + a_{13})} = 0.041955.$$

График коэффициента усиления передаточной функции фильтра в децибелах приведен на рис. А.11, б. Выделим следующие значения:

$f$	$10 \log_{10}  H(f) ^2$	$ H(f) ^2$
0	0.0000	1.0
5	-3.0103	0.5
100	-110.5357	$1/1.1313 \cdot 10^{11}$

Точку половинной мощности иногда называют „3-х децибеловой“ точкой, поскольку в ней коэффициент усиления уменьшается по сравнению со значением в полосе пропускания примерно на 3 дБ.

#### 4.7. СИНУСНЫЙ ФИЛЬТР ВЫСОКИХ ЧАСТОТ БАТТЕРУОРТА

Фильтр высоких частот можно получить почти таким же способом, каким получают фильтр низких частот. В этом случае необходимо реализовать передаточную функцию

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\sin(\pi fT + \pi/2)}{\sin(\pi BT)} \right)^{2M}}$$

Критические значения для этой функции сведены в таблицу

$f$	$H(f)^2$
0	$< \frac{1}{2}$
$F-B$	$\frac{1}{2}$
$F$	1

Таким образом, в диапазоне частот от 0 до  $(F-B)$  Гц вся или почти вся информация гасится, а в диапазоне частот от  $(F-B)$  до  $F$  Гц она проходит сравнительно беспрепятственно.

Кроме дополнительного угла  $\pi/2$ , эта передаточная функция ничем иным от передаточной функции фильтра низких частот



не отличается. Поэтому для получения фильтра высоких частот потребуются только небольшие изменения в предыдущем алгоритме. В частности, изменяется основная формула для углов:

$$\frac{\beta + j\alpha + \pi}{2} = u + jv,$$

т. е.  $\beta = 2u + \pi$ ,  $\alpha = 2v$ . При этом угол  $\alpha$  остался прежним. Веса  $a_{2p}$  получаются точно так же, поскольку их вычисление требует знания только величин  $\alpha_p$ . Для вычисления же весов  $a_{1p}$  формулы нужно изменить:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \exp(-\alpha) \cos \beta = -2 \exp(-\alpha) \cos\left(2u + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -2 \exp(-\alpha) (\cos 2u \cos \pi - \sin 2u \sin \pi) = 2 \exp(-\alpha) \cos 2u. \end{aligned}$$

Единственное отличие от случая фильтра низких частот сводится к перемене знака у весов  $a_{1p}$  на противоположный. Другими словами, зная веса для фильтра низких частот с точкой отсечки  $B$  Гц, можно определить веса для фильтра высоких частот с точкой отсечки  $(F - B)$  Гц, просто меняя знаки у коэффициентов  $a_{1p}$ . Заметим, что ширина полосы пропускания в обоих случаях одна и та же.

Оказывается, что постоянный множитель  $b_0$  также остается прежним. Предлагаем читателю самостоятельно выяснить причину этого явления.

#### 4.8. ПОЛОСНОПРОПУСКАЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ

Полоснопропускающий фильтр предназначен для пропускания информации в полосе частот ширины  $B$  с центром в точке  $f_c$ .

Такой фильтр можно реализовать несколькими способами. Наверное, самый простой из них — тот, который изображен на рис. 4.11. Из него видно, что полосная фильтрация проводится при помощи двух фильтров низких частот, и последовательность  $x(i)$  обрабатывается в двух ветвях схемы одновременно. В верхней происходит умножение  $x(i)$  на  $\sin(2\pi f_c i T)$ , низкочастотная фильтрация и повторное умножение на  $\sin(2\pi f_c i T)$ . В нижней ветви происходит то же самое, но умножение производится на  $\cos(2\pi f_c i T)$ . В итоге на выходе получается функция

$$y(i) = \sin(2\pi f_c i T) \{h(i) * [x(i) \sin(2\pi f_c i T)]\} + \cos(2\pi f_c i T) \{h(i) * [x(i) \cos(2\pi f_c i T)]\},$$

где  $h(i)$  — единичная импульсная функция отклика, одинаковая для обоих фильтров. Если  $h(i)$  есть дельта-функция, т. е.

$$h(i) = \begin{cases} 1/T, & i = 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

то полное действие фильтра состоит в получении значений

$$\begin{aligned} y(i) &= \sin(2\pi f_c i T) [x(i) \sin(2\pi f_c i T)] + \\ &+ \cos(2\pi f_c i T) [x(i) \cos(2\pi f_c i T)] = \\ &= x(i) (\sin^2(2\pi f_c i T) + \cos^2(2\pi f_c i T)) = x(i). \end{aligned}$$

Таким образом, в диапазонах пропускания обоих фильтров действие полного фильтра сводится к действию одного из них.

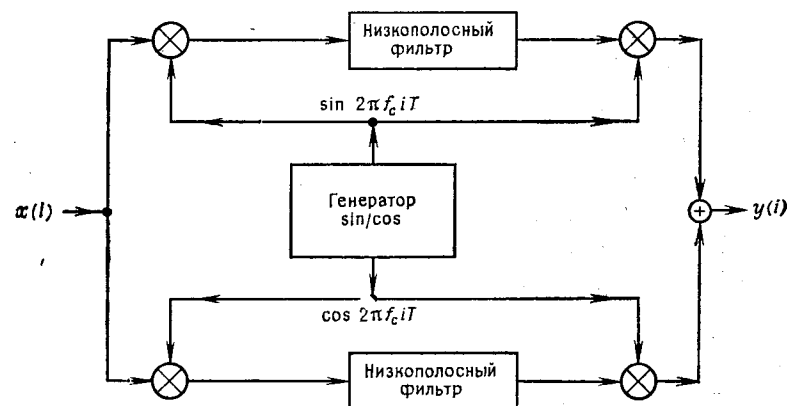


Рис. 4.11. Полоснопропускающий фильтр, реализованный посредством двух низкочастотных фильтров и генератора sin/cos.

В истинном смысле происходящего помогает разобраться переход в определении к комплексной записи:

$$y(i) = \exp(-j2\pi f_c i T) \{h(i) * [x(i) \exp(j2\pi f_c i T)]\}.$$

Внутренняя экспонента умножается на  $x(i)$  во временной области. Как было показано в гл. 1, этому соответствует сдвиг преобразования  $X(f)$  в области частот. В частности, преобразованием Фурье функции  $x(i) \exp(j2\pi f_c i T)$  служит

$$\begin{aligned} T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp(j2\pi f_c i T) \exp(-j2\pi f i T) &= \\ &= T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp[-j2\pi (f - f_c) i T] = X(f - f_c). \end{aligned}$$

Таким образом, информация, располагавшаяся в частоте  $f_c$  или около нее, смещается в 0 Гц. Эту информацию два фильтра низких частот пропускают, а выходящую за пределы нужного диапазона частот удаляют. Наконец, умножение на  $\exp(-j2\pi f_c i T)$  возвращает полученную информацию в первоначальное положение.

Чтобы полоса пропускания получилась равной  $B$  Гц, точки половинной мощности обоих низкочастотных фильтров следует положить равными  $B/2$  Гц.

Синус и косинус можно получать несколькими способами. Для ЭВМ, имеющих слова больших размеров, может оказаться вполне достаточной рекурсивная процедура, рассмотренная в § 4.3. Но более надежной процедурой служит другая. В ней сначала получают последовательность углов  $\lambda(i) = 2\pi f_c i T$ , последовательно прибавляя  $2\pi f_c T$  к предыдущему углу:  $\lambda(i) = \lambda(i-1) + 2\pi f_c T$ ; каждый раз, когда угол  $\lambda(i)$  превосходит  $2\pi$ , из него вычитается  $2\pi$  (т. е. значения углов берутся по модулю  $2\pi$ ); соответствующий углу  $\lambda(i)$  индекс в таблице с 2048 точками для одного периода синусоиды определяется по формуле  $\lambda(i) 2048/(2\pi)$ . На практике, как правило, ограничиваются только первой четвертью периода синусоиды (т. е. 513 точками в нашем примере), а по величине  $\lambda(i) 2048/(2\pi)$  определяют ту четверть синусоиды, в которую угол  $\lambda(i)$  попадает фактически.

Лучше всего, пожалуй, предложенный алгоритм подходит в тех случаях, когда коэффициенты заданы аппаратно, как это бывает, например, в микропроцессоре, и для определения весов фильтра программных возможностей нет. Поэтому, чтобы получить полоснопропускающие фильтры, нередко оказывается достаточным этого алгоритма и нескольких наборов весов для фильтров низких частот.

Что же касается программной реализации фильтра такого типа, то ее можно получить почти так же как и фильтр низких частот. Передаточная функция в этом случае выглядит иначе:

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\cos(2\pi f T) - C}{S} \right)^M},$$

где

$$C = \cos(2\pi f_c T) \cos(\pi B T), \quad S = \sin(2\pi f_c T) \sin(\pi B T).$$

Читатель без труда проверит, что

$$\left| H\left(f_c - \frac{B}{2}\right) \right|^2 = \left| H\left(f_c + \frac{B}{2}\right) \right|^2 = \frac{1}{2},$$

и что максимум передаточной функции достигается в частоте  $f_m$ , определяемой равенством

$$\cos(2\pi f_m T) = \cos(2\pi f_c T) \cos(\pi B T).$$

Для малых значений  $B$  это равенство эквивалентно соотношению  $f_m \approx f_c$ . Поэтому полоса пропускания простирается от  $(f_c - B/2)$  до  $(f_c + B/2)$  Гц.

Отметим также, что в передаточной функции вместо  $\sin(\pi f T)$  появился  $\cos(2\pi f T)$  и, что еще более важно, появился множи-

тель 2 для угла. Кроме того, в показателе степени вместо  $2M$  теперь используется просто  $M$ , которое, как оказывается, для фильтров низких частот и для вырезающих фильтров должно быть четным.

Предложенный в предыдущем параграфе алгоритм можно приспособить с некоторыми изменениями и для получения полоснопропускающих фильтров. Сначала знаменатель  $|H(f)|^2$  полагается равным нулю и находятся полюсы. Для удобства заменим косинус синусом с дополнительным углом:

$$1 + \left( \frac{\sin(2\pi f T + \pi/2) - C}{S} \right)^M = 0.$$

Это уравнение можно переписать в виде  $s^M + 1 = 0$ , где

$$s = \frac{\sin(2\pi f T + \pi/2) - C}{S}.$$

У этого уравнения есть  $M$  решений. Хотя из них используется только половина, т. е.  $M/2$  решений, в самой реализации фильтра будут использованы пары полюсов, определенные каждым из  $M/2$  решений.

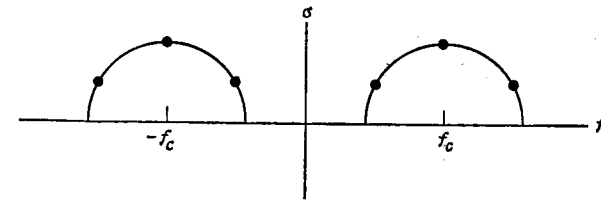


Рис. 4.12. Расположение полюсов шестиполюсного полоснопропускающего фильтра.

Как это происходит, показано на рис. 4.12, где изображены полюсы для шестиполюсного фильтра ( $M = 6$ ). Уравнение  $s^6 + 1 = 0$  имеет 6 решений, но из них используется только три; появление других трех, отраженных относительно оси  $\sigma$ , обусловлено членами  $C$  и  $S$ .

Итак, получаем основное уравнение

$$\sin \left[ \left( \beta_m + \frac{\pi}{2} \right) + j\alpha_m \right] = S s_m + C = a_m + j b_m.$$

Оно имеет точно такой же вид, как и в случае фильтра низких частот. Отличие состоит лишь в том, что в этом уравнении фигурирует угол  $\pi/2$  и что  $a_m$  и  $b_m$  стали теперь другими. В программе на Фортране эти изменения учитываются следующим образом.

1. Вычисляются  $C$  и  $S$ . При этом в программе их лучше назвать  $CC$  и  $SS$ , поскольку  $C$  уже в программе использовалось:

```
ANG2=2.*3.14159265*FC*T
CC=COS(ANG2)*COS(FACT)
SS=SIN(ANG2)*SIN(FACT)
```

Переменная  $FC$  соответствует  $f_c$ . Переменная  $FACT$  остается без изменений.

2. Угол  $SECTOR$  умножается на 2. Теперь он вычисляется в помощью оператора

```
SECTOR=2.*3.14159265/FLOAT(M)
```

3. Вычисление переменных  $A$ ,  $B$  и  $C$  изменяется следующим образом:

```
ANG=FN*SECTOR+WEDGE
A=SS*COS(ANG)+CC
B=SS*SIN(ANG)
C=1.-A*A-B*B
```

4. Вычисление переменных  $G$  и  $H$  (из программы  $LPSB$ ) нужно изменить следующим образом:

```
G=2.*SQRT(1.-B*B/D)/E
IF(A.LT.O)G=-G
H=-1./(E**2)
```

На рис. 4.13 показана программа  $LPSB$  с внесенными уточнениями. Для нее выбрано более подходящее в этом случае название  $BNPS$ <sup>1)</sup>.

Изменение 4, приведенное только что, нуждается в некоторых пояснениях. Вспомним, что

$$a_{1m} = -2 \exp(-\alpha_m) \cos \beta_m \quad a_{2m} = \exp(-2\alpha_m).$$

Вместо формулы

$$\frac{\beta_m + j\alpha_m}{2} = u_m + jv_m$$

в этом случае используется формула

$$\beta_m + \frac{\pi}{2} + j\alpha_m = u_m + jv_m.$$

<sup>1)</sup> От английского *bandpass*. — Прим. перев.

```
SUBROUTINE BNPS (MM,T,BW,FC,A1,A2,BZERO)
DIMENSION A1(1),A2(1),B0(1),B1(1),B2(1)
1,FREQ(1),ABZ(1),PHS(1)
DOUBLE PRECISION A,B,C,D,E,G,H,GN,FACT,WEDGE,SECTOR,ANG
1,CC,SS,ANG2
DATA B0 /1./,B1 /0./, B2 /0./
FACT=2.*3.14159265*T*BW
ANG2=2.*3.14159265*FC
CC=DCOS(ANG2)*DCOS(FACT)
CCC=CC
FREQ(1)=ATAN2(SQRT(1.-CCC*CCC),CCC)/6.2831853
SS=DSIN(ANG2)*DSIN(FACT)
M=MM
M1=M/2
A=M
HTRAN=0.
SECTOR=2.D0*3.14159265D0/A
WEDGE=SECTOR/2.D0
DO 5 I=1,M1
FN=I-1
ANG=FN*SECTOR+WEDGE
A=SS*DCOS(ANG)+CC
B=SS*DSIN(ANG)
C=1.D0-(A**2+B**2)
D=0.5*(-C+DSQRT(C*C+4.D0*B**2))
E=DSQRT(D+1.D0)+DSQRT(D)
G=2.D0*DSQRT(1.D0-B*B/D)/E
IF (A.LT.0.D0) G=-G
H=-1.D0/(E**2)
A1(I)=-G
A2(I)=-H
CALL TTRAN (A1(I),A2(I),B0,B1,B2,2,1,1.,FREQ,ABZ,PHS)
HTRAN=HTRAN+ABZ(I)
5 CONTINUE
BZERO=10.**(-HTRAN/(20.*FLOAT(M1)))
RETURN
END
```

Рис. 4.13. Программа вычисления весов синусного полоснопропускающего фильтра.  $FC$  — центральная частота фильтра, величина  $BW$  равна половине ширины полосы пропускания. Обратите внимание на то, что вычисления в программе имеют двойную точность.

Поэтому, опуская индекс  $m$ , получаем

$$\beta = u - \frac{\pi}{2}, \quad \alpha = v.$$

Следовательно, формулы для коэффициентов изменятся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \exp(-\alpha) \cos \beta = -2 \exp(-v) \cos \left( u - \frac{\pi}{2} \right) = \\ &= 2 \exp(-\ln E) \sin u = 2E^{-1} \sin \left[ \arccos \left( \frac{B}{\sqrt{D}} \right) \right] = \\ &= \pm 2E^{-1} \sqrt{1 - \cos^2 \left[ \arccos \left( \frac{B}{\sqrt{D}} \right) \right]} = \pm 2E^{-1} \sqrt{1 - \frac{B^2}{D}}, \\ a_2 &= \exp(-2\alpha) = E^{-2}. \end{aligned}$$

В программе BNPS есть и другие небольшие отличия. Или в самой частоте  $f_c$ , или около нее, а именно в точке  $f_m = \arccos(C)/(2\pi T)$  передаточная функция достигает максимума. Для передаточной функции каждой составной двухполосной части фильтра в программе BNPS с помощью подпрограммы TTRAN отдельно вычисляется значение в децибелах при  $f_m$ ; затем эти значения суммируются для определения общего постоянного множителя  $b_0$ .

#### 4.9. ЗАГРАЖДАЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ

В этом параграфе будет рассмотрен заграждающий фильтр особого типа. В силу этого результаты носят частный характер и не всегда точно описывают свойства других фильтров заграждающего типа.

Фильтр заграждающего типа — близкий родственник полоснопропускающему фильтру. Как позже выяснится, полюсы обоих фильтров совпадают. Но между всеми предшествующими фильтрами и заграждающим фильтром имеется существенное различие: помимо полюсов заграждающий фильтр имеет нули.

Получить передаточную функцию заграждающего фильтра нетрудно. Для этого следует из единицы вычесть выражение для передаточной функции полоснопропускающего фильтра:

$$|H(f)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{\cos(2\pi fT) - C}{S}\right)^M}.$$

Если это вычитание провести, то получится передаточная функция

$$|H(f)|^2 = \left(\frac{\cos(2\pi fT) - C}{S}\right)^M / \left(1 + \left(\frac{\cos(2\pi fT) - C}{S}\right)^M\right).$$

Необходимо обратить внимание на следующее.

1. Эта передаточная функция имеет такой же знаменатель, что и передаточная функция полоснопропускающего фильтра. Следовательно, полюсы этих фильтров одинаковы.

2. Передаточная функция удовлетворяет условию  $|H(f)|^2 \geq 0$ . В противном случае ее рассматривать было бы неправомерно.

3. Точки половинной мощности для полосы заграждения точно совпадают с точками половинной мощности полоснопропускающего фильтра.

Передаточная функция полоснопропускающего фильтра и соответствующая ей передаточная функция заграждающего фильтра показаны на рис. 4.14.

Как уже отмечалось, заграждающий фильтр имеет нули. До сих пор все рассматривавшиеся фильтры допускали каскад-

ную реализацию, с частям которой отвечали уравнения вида

$$y(i) = b_0x(i) - a_1y(i-1) - a_2y(i-2).$$

Заграждающему фильтру отвечает разностное уравнение вида

$$y(i) = b_0x(i) + b_1x(i-1) + b_2x(i-2) - a_1y(i-1) - a_2y(i-2),$$

поэтому задача осложняется точным определением величин  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  для каждой части фильтра. Впрочем, сделать это нетрудно.

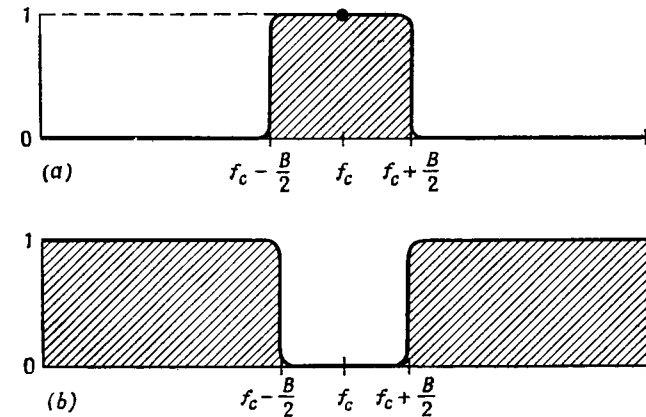


Рис. 4.14. Полоснопропускающий фильтр (а) и полученный из него полоснозаграждающий фильтр (б).

Так же, как и полюсы, нули получают, приравняв определяющую фильтр передаточную функцию нулю и найдя значения, удовлетворяющие полученному уравнению. В данном случае уравнение имеет вид

$$\left(\frac{\cos(2\pi fT) - C}{S}\right)^M = 0.$$

Найти его решения совсем просто. Все корни этого уравнения равны, и для всех нулей решение будет одним и тем же, а именно

$$\cos(2\pi f_m T) = C = \cos(2\pi f_c T) \cos(\pi BT),$$

т. е.  $2\pi f_m T = \pm \arccos C$ . Знаки плюс и минус появились из-за того, что  $\cos(-x) = \cos x$ . Поэтому решения для  $f_m$  могут отличаться знаками, хотя решения исходного уравнения и одинаковы.

На следующем шаге определяются значения  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$ . Для одного нуля (на каждую часть каскадной реализации приходится по два нуля) имеем равенство

$$1 - bz_m^{-1} = 0,$$

поэтому

$$b = z_m = \exp(j2\pi T f_m) = \exp(\pm j \arccos C).$$

Поскольку для одной части каскадной реализации частота  $f_m$  может иметь два знака, общие коэффициенты получаются из соотношений

$$\begin{aligned} (1 - bz^{-1})(1 - b^*z^{-1}) &= \\ &= [1 - \exp(j \arccos C) z^{-1}][1 - \exp(-j \arccos C) z^{-1}] = \\ &= 1 - [\exp(j \arccos C) + \exp(-j \arccos C)] z^{-1} + \\ &\quad + [\exp(j \arccos C) (-j \arccos C)] z^{-2} = \\ &= 1 - 2 \cos[\arccos C] z^{-1} + \exp(0) z^{-2} = \\ &= 1 - 2Cz^{-1} + z^{-2}. \end{aligned}$$

Из полученного выражения с точностью до постоянного множителя получаются величины  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$ :

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -2C, \quad b_2 = 1.$$

Этот результат справедлив для каждой части фильтра второго порядка. Естественно, эти величины при нормировке претерпевают изменения. При нормировке сначала вычисляется значение передаточной функции фильтра с полученными выше коэффициентами в точке  $f=0$  или  $1/(2T)$ . Предположим, что это значение равно  $|H'(0)|^2$ , где штрих указывает на то, что фильтр ненормирован. Затем требуют, чтобы для нормированного фильтра имело место равенство  $|H(0)|^2 = 1$ . Этого можно добиться, полагая

$$|H(f)|^2 = \left[ \frac{1}{|H'(0)|^2} \right] |H'(f)|^2,$$

т. е. умножая передаточную функцию ненормированного фильтра на постоянную  $1/|H'(0)|^2$ , которая обеспечивает выполнение равенства  $|H(0)|^2 = 1$ . В итоге коэффициентами для каждой каскадной части будут служить

$$b_0 = 1 \frac{1}{|H'(0)|^{2/M}}, \quad b_1 = \frac{-2C}{|H'(0)|^{2/M}}, \quad b_2 = \frac{1}{|H'(0)|^{2/M}}.$$

Значение  $|H'(0)|^2$  нетрудно вычислить, применив подпрограмму TTRAN, включенную в приложение А. При этом следует величины  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  положить равными 1,  $-2C$  и 1. Кроме того, для получения заграждающего фильтра не требуется написания особой программы: чтобы получить рекурсивные части фильтра<sup>1)</sup>, можно воспользоваться программой получения полоснопропу-

<sup>1)</sup> Рекурсивная часть уравнения фильтрации — входящая в него линейная комбинация значений выходов, нерекурсивная часть — линейная комбинация входов. — Прим. перев.

скающих фильтров, а для определения весов нерекурсивных членов нужно непосредственно обратиться к приведенным выше формулам.

#### 4.10. ТАНГЕНСНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Заменяв в синусных фильтрах синус на тангенс, можно получить совершенно новое семейство фильтров. Например, при такой замене передаточная функция синусного фильтра низких частот Баттеруорта будет иметь вид

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\operatorname{tg}(\pi f T)}{\operatorname{tg}(\pi B T)} \right)^{2M}}.$$

Вычисление значений этой функции в точках 0,  $B$  и  $F$  дает следующие значения:

$$|H(0)|^2 = 1, \quad |H(B)|^2 = \frac{1}{2}, \quad |H(F)|^2 = 0.$$

Если эту передаточную функцию изобразить в виде графика, то внешне он будет очень напоминать график для синусного фильтра Баттеруорта с теми же значениями  $B$  и  $M$ . В деталях графики будут различаться. Если перейти к графикам для функций в децибелах, то можно увидеть, что тангенсный фильтр в полосе заграждения имеет лучшие характеристики: передаточная функция окажется в ней значительно ниже передаточной функции синусного фильтра.

Такое улучшение характеристики сопряжено с ростом стоимости. Дело в том, что все тангенсные фильтры имеют нули. Поэтому вычисления становятся более дорогими. Подробнее на этом мы остановимся ниже.

Тангенсные фильтры можно реализовать несколькими способами. Рассмотрим здесь два из них: метод определения нулей и полюсов и метод двустороннего  $z$ -преобразования. Сначала обратимся к определению полюсов; оказывается, что нули найти очень просто.

В случае фильтра низких частот Баттеруорта для отыскания полюсов необходимо решить уравнение

$$1 + \left( \frac{\operatorname{tg}(\pi f T)}{\operatorname{tg}(\pi B T)} \right)^{2M} = 0.$$

Обозначим для него символами  $s_1, \dots, s_{M/2}$  корни из единицы на верхней полуплоскости, а искомые решения обозначим  $\beta_m + j\alpha_m$ . Таким образом, нужно решить уравнение

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\beta_m + j\alpha_m}{2} \right) = \operatorname{tg}(\pi B T) s_m.$$

Это можно сделать, непосредственно применив полученные ранее результаты для комплексного арксинуса. При этом понадобятся незначительные изменения. Поскольку  $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ , предыдущее выражение можно записать в виде

$$\frac{\sin((\beta_m + j\alpha_m)/2)}{\cos((\beta_m + j\alpha_m)/2)} = \operatorname{tg}(\pi BT) s_m.$$

От косинуса можно избавиться, возведя обе части в квадрат и заменив после этого  $\cos^2 x$  на  $1 - \sin^2 x$ . Теперь остается только решить уравнение относительно синуса.

Значительно более простой метод двустороннего  $z$ -преобразования предложен Кайзером (1963). В этом методе используется тот факт, что

$$\operatorname{tg}(\pi fT) = \frac{1}{j} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}.$$

Свое название двустороннее  $z$ -преобразование получило от конформного отображения

$$y = \frac{1}{j} \frac{1 - 1/x}{1 + 1/x} = \frac{1}{j} \frac{x - 1}{x + 1}.$$

Его называют *дробно-линейным*<sup>1)</sup> *отображением* или *преобразованием*. Поскольку вместо  $z^{-1/2}$ , как это было в случае с синусом, в выражении для тангенса стоит  $z^{-1}$ , получить формулы для коэффициентов гораздо проще. Действительно, полагая

$$\operatorname{tg}(\pi f_m T) = \frac{1}{j} \frac{1 - z_m^{-1}}{1 + z_m^{-1}} = \operatorname{tg}(\pi BT) s_m = a_m + jb_m,$$

т. е.

$$\frac{1}{j} \frac{1 - z_m^{-1}}{1 + z_m^{-1}} = a_m + jb_m,$$

получаем для  $z_m^{-1}$  выражение

$$z_m^{-1} = \frac{(1 + b_m) - ja_m}{(1 - b_m) + ja_m}.$$

Поскольку должно выполняться соотношение

$$(1 - z_m z^{-1})(1 - z_m^* z^{-1}) = 1 + a_{1m} z^{-1} + a_{2m} z^{-2}$$

<sup>1)</sup> В англоязычной литературе это преобразование называют билинейным. — Прим. перев.

для коэффициентов  $a_{1m}$  и  $a_{2m}$  получим формулы

$$\begin{aligned} a_{1m} &= -z_m - z_m^* - \frac{(1 - b_m) + ja_m}{(1 + b_m) - ja_m} \frac{(1 - b_m) - ja_m}{(1 + b_m) + ja_m} = \\ &= -2 \frac{(1 - b_m^2) - a_m^2}{(1 + b_m)^2 + a_m^2}, \\ a_{2m} &= z_m z_m^* = \frac{(1 - b_m)^2 + a_m^2}{(1 + b_m)^2 + a_m^2}. \end{aligned}$$

Запишем эти действия в виде алгоритма.

1. Задать число полюсов фильтра  $M$  и частоту отсечки  $B$ .
2. Вычислить числа  $a_m$  и  $b_m$ :

```
ANG=3.14159265*B*T
FACT=SIN(ANG)/COS(ANG)
M1=M-M/2
SECTOR=3.14159265/FLOAT(M)
WEDGE=SECTOR/2.
DO 5 I=1, M1
FN=I-1
ANG=FN*SECTOR+WEDGE
AM=FACT*SIN(ANG)
BM=FACT*COS(ANG)
```

3. Вычислить знаменатель:

```
AMS=AM*AM
DEN=(1.+BM)**2+AMS
```

4. Вычислить  $a_{1m}$ :

```
A1(I)=-2.*((1.-BM*BM)-AMS)/DEN
```

5. Вычислить  $a_{2m}$ :

```
A2(I)=((1.-BM)**2+AMS)/DEN
```

6. CONTINUE.

Целиком эта программа представлена на рис. 4.15 в виде подпрограммы LPTB. Последовательность команд обращения к этой подпрограмме такая же, как для LPSB. Осталось обсудить еще два пункта программы: отыскание нулей и нормирующий множитель.

Для того чтобы получить нули, числитель и знаменатель исходной передаточной функции

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\operatorname{tg}(\pi fT)}{\operatorname{tg}(\pi BT)} \right)^2 M}$$

следует умножить на  $\cos^{2M}(\pi fT)$ :

$$|H(f)|^2 = \frac{\cos^{2M}(\pi fT)}{\cos^{2M}(\pi fT) + \frac{\sin^{2M}(\pi fT)}{\operatorname{tg}^{2M}(\pi fT)}}$$

Поэтому нулями будут решения уравнения  $\cos^{2M}(\pi fT) = 0$ ,

которые равны  $f = \pm F$ .

```

SUBROUTINE LPTB (MM,T,B,A1,A2,BZERO)
DIMENSION A1(1),A2(1)
DOUBLE PRECISION ANG,FACT,SECTOR,WEDGE,FN,AM,BM,AMS,DEN
M=MM
ANG=3.14159265*B*T
FACT=DSIN(ANG)/DCOS(ANG)
M1=M-M/2
F=1.
FN=M
SECTOR=3.14159265D0/FN
WEDGE=SECTOR/2.D0
DO 5 I=1,M1
FN=I-1
ANG=FN*SECTOR+WEDGE
AM=FACT*DSIN(ANG)
BM=FACT*DCOS(ANG)
AMS=AM*AM
DEN=(1.D0+BM)**2+AMS
A1(I)=-2.D0*((1.D0-BM*BM)-AMS)/DEN
A2(I)=((1.D0-BM)**2+AMS)/DEN
F=F*(1.+A1(I)+A2(I))/4.
5 CONTINUE
BZERO=F**(1./FLOAT(M1))
RETURN
END

```

Рис. 4.15. Подпрограмма LPTB для получения низкочастотных тангенсных фильтров Баттеруорта. Величина  $M (=MM)$  должна быть четной.

Так же, как и в случае синусного заграждающего фильтра, для одиночной составной части фильтра

$$b = z_m = \exp(j2\pi T f_m) = \exp(\pm j2\pi T F) = \exp(\pm j\pi) = -1.$$

Для остальных частей каскадной реализации имеем

$$(1 - bz^{-1})(1 - b^*z^{-1}) = (1 - z^{-1})(1 + z^{-1}) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2},$$

т. е.  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  пропорциональны 1, 2 и 1 соответственно.

Нормировка проводится тем же способом, что и раньше.

**Тангенсный фильтр высоких частот.** Передаточная функция тангенсного фильтра высоких частот имеет вид

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{ctg}(\pi fT)}{\operatorname{tg}(\pi BT)}\right)^{2M}}.$$

Получим ее значения в точках 0,  $(F - B)$  и  $F$ :

$$|H(0)|^2 = 0,$$

$$|H(F - B)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\operatorname{tg}(\pi BT)}{\operatorname{tg}(\pi BT)}\right)^{2M}} = \frac{1}{2},$$

$$|H(F)|^2 = 1.$$

Интересно сравнить упрощенные записи передаточных функций фильтров низких и высоких частот. В случае низких частот передаточная функция имеет вид

$$\frac{(\sin(\pi BT) \cos(\pi fT))^{2M}}{(\sin(\pi BT) \cos(\pi fT))^{2M} + (\cos(\pi BT) \sin(\pi fT))^{2M}},$$

а в случае высоких

$$\frac{(-\cos(\pi BT) \sin(\pi fT))^{2M}}{(\sin(\pi BT) \cos(\pi fT))^{2M} + (-\cos(\pi BT) \sin(\pi fT))^{2M}}.$$

С точностью до знака полюсы этих фильтров совпадают. Из этого следует важный вывод: *за исключением разницы в знаках, коэффициенты рекурсивных фильтров низких и высоких частот одинаковы.* Теперь рассмотрим передаточные функции при  $B = F/2$ . При этом значении точки отсечки передаточные функции примут значения

$$\frac{(\sin(\pi/4) \cos(\pi fT))^{2M}}{(\sin(\pi/4) \cos(\pi fT))^{2M} + (\cos(\pi/4) \sin(\pi fT))^{2M}} = \frac{(\cos(\pi fT))^{2M}}{(\cos(\pi fT))^{2M} + \sin(\pi fT)^{2M}}$$

для фильтра низких частот и

$$\begin{aligned} & \frac{(-\cos(\pi/4) \sin(\pi fT))^{2M}}{(\sin(\pi/4) \cos(\pi fT))^{2M} + (-\cos(\pi/4) \sin(\pi fT))^{2M}} = \\ & = \frac{(\sin(\pi fT))^{2M}}{(\cos(\pi fT))^{2M} + (-\sin(\pi fT))^{2M}} \end{aligned}$$

для фильтра высоких частот. В этом частном случае полюсы будут решениями уравнения

$$\cos(\pi fT) = s_m \sin(\pi fT),$$

где  $s_m$  — корень из единицы. Важная особенность, связанная с этим случаем, состоит в том, что  $a_{1m} = 0$  для всех  $m$ . Это непосредственно следует из того, что  $a_{1m} > 0$  при  $B < F/2$  и  $a_{1m} < 0$  при  $B > F/2$ . Поэтому коэффициенты  $a_{1m}$  должны быть равными нулю при  $B = F/2$ .

Правило выбора знаков коэффициентов тангенсных фильтров низких и высоких частот можно сформулировать следующим образом. Предположим сначала, что  $a_{1m}$  и  $a_{2m}$  ( $m = 1, \dots, M/2$ ) — коэффициенты для фильтра низких частот в случае  $B < F/2$ .

Тогда коэффициенты  $a_{2m}$  для фильтра высоких частот остаются теми же, а коэффициенты  $a_{1m}$  будут определяться таблицей

Случай низких частот		Случай высоких частот	
$B < F/2$	$B > F/2$	$(F-B) > \frac{F}{2}$	$(F-B) < \frac{F}{2}$
$a_{1m}$	$-a_{1m}$	$-a_{1m}$	$a_{1m}$

В обоих случаях веса ненормированных нерекурсивных фильтров определяются по таблице

Случай низких частот		Случай высоких частот	
$b_{0m}$	1	$b_{0m}$	1
$b_{1m}$	2	$b_{1m}$	-2
$b_{2m}$	1	$b_{2m}$	1

Последнее свойство, указывающее на двойственность этих двух фильтров, заключается в том, что передаточную функцию одного из них можно получить, вычитая из единицы передаточную функцию другого. Интересно отметить, что причину этой двойственности нетрудно обнаружить, обращаясь к используемому конформному отображению

$$\operatorname{tg}(\pi f_m T) = \frac{1}{j} \frac{1 - z_m^{-1}}{1 + z_m^{-1}}$$

**Полоснопропускающие и заграждающие тангенсные фильтры.** В качестве примера полоснопропускающего фильтра рассмотрим фильтр с передаточной функцией

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{1 + \left( \frac{\cos(2\pi f T) - D}{E \sin(2\pi f T)} \right)^M}$$

где

$$D = \frac{\cos(2\pi f_c T)}{\cos(\pi B T)}, \quad E = \operatorname{tg}(\pi B T)$$

и  $M$  — четное число.

Эта функция имеет следующие характеристики:

$f$	$ H(f) ^2$	$10 \log_{10}  H(f) ^2$
0	0	$-\infty$
$f_c - B/2$	$\frac{1}{2}$	-3.
$f_{\max}$	1	0
$f_c + B/2$	$\frac{1}{2}$	-3.
$F$	0	$-\infty$

Она принимает максимальное значение в частоте  $f_{\max} = \arccos D$ . Уравнение для полюсов сводится к соотношению

$$E \sin(2\pi f_m T) = s_m (\cos(2\pi f_m T) - D),$$

где, как и в случае синусного фильтра Баттеруорта,  $s_m$  — корень из единицы. Обе части этого уравнения можно возвести в квадрат и решить его относительно  $\cos(2\pi f_m T)$ :

$$\cos(2\pi f_m T) = \frac{D \pm E s_m \sqrt{1 + E^2 s_m^2 - D^2}}{1 + E^2 s_m^2}$$

Напомним, что величины  $s_m$  комплексные. Поэтому до непосредственного перехода к решению уравнения необходимо сделать некоторые упрощения.

После упрощений уравнение принимает вид

$$\cos(2\pi f_m T) = a_m + j b_m.$$

Теперь можно обратиться к процедуре, которая использовалась для синусного фильтра Баттеруорта.

Заграждающий тангенсный фильтр получается так же, как и его синусный аналог. Для этого из единицы вычтем передаточную функцию полоснопропускающего тангенсного фильтра:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{1 + \left( \frac{\cos(2\pi f T) - D}{E \sin(2\pi f T)} \right)^M} &= \\ &= \left[ 1 + \left( \frac{\cos(2\pi f T) - D}{E \sin(2\pi f T)} \right)^M - 1 \right] \left[ 1 + \left( \frac{\cos(2\pi f T) - D}{E \sin(2\pi f T)} \right)^M \right]^{-1} = \\ &= \frac{(\cos(2\pi f T) - D)^M}{(E \sin(2\pi f T))^M + (\cos(2\pi f T) - D)^M}. \end{aligned}$$

Полюсы здесь остаются теми же, что и в полоснопропускающем случае. Перейдем к вычислению нулей. Ими служат решения уравнения

$$(\cos(2\pi f T) - D)^M = 0,$$

которое преобразуется к виду ( $m = 1, \dots, M$ )

$$\cos(2\pi f_m T) = D.$$

После некоторых стандартных операций получаются коэффициенты для нерекурсивных членов (с точностью до постоянного множителя):

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -2E, \quad b_2 = 1.$$

#### 4.11. ДРУГИЕ РЕКУРСИВНЫЕ ФИЛЬТРЫ

Кроме базисных фильтров Баттеруорта можно реализовать и фильтры других типов, а именно фильтр Чебышева типа 1 (пульсация в полосе пропускания), фильтр Чебышева типа 2 (пульсация в полосе заграждения), фильтр эллиптического типа (пульсация и в полосе пропускания, и в полосе заграждения)



и фильтры Бесселева и Гауссова типов. Для каждого такого типа можно получить синусный и тангенсный варианты и выбрать один из четырех фильтров: низких частот, высоких частот, полоснопропускающий или заграждающий.

Аналоговые формы фильтров этих типов рассмотрены в работах Гийемана (1957) и Стоурера (1957). Соответствующие цифровые формы можно получить несколькими способами. В большинстве случаев эти авторы пользуются теми же методами, которые применялись для синусных фильтров, т. е. сначала находятся полюсы и нули, а затем с помощью комплексных отображений — синуса и косинуса — определяются коэффициенты.

В частности, ими были получены реализации для фильтров Чебышева и эллиптического типа. Сложность программ реализации фильтров Баттеруорта, Чебышева типа 1, Чебышева типа 2, эллиптического от фильтра к фильтру возрастает. Получить представление об этой сложности помогает таблица, в которой для каждого из четырех типов фильтров приведено число предложений Фортрана (включая комментарии), необходимое для реализации фильтров.

Тип фильтра	Число предложений
Баттеруорта	32
Чебышева (тип 1)	100
Чебышева (тип 2)	245
Эллиптический	238

Здесь не учтены еще 400 дополнительных предложений для синуса, тангенса и их вариантов, необходимых для получения фильтров низких и высоких частот, полоснопропускающих и заграждающих фильтров.

#### 4.12. НЕРЕКУРСИВНЫЕ (ИКО) ФИЛЬТРЫ

Нерекурсивные фильтры (или, иначе, импульсные фильтры с конечной областью отклика — ИКО) были изучены Ормсби (1961). Предложенные им процедуры, которые ныне вытеснены более поздними конструкциями ИБО- (импульсные с бесконечной областью отклика) и ИКО-фильтров, долгое время применялись в промышленности и фактически до сих пор используются некоторыми предприятиями. Главной его заслугой было улучшение характеристик фильтров низких частот. В то время в качестве базовой конструкции применялся симметричный фильтр, для которого

$$y(i) = \sum_{k=-M}^M b_k x(i-k),$$

где

$$b_{-k} = b_k \quad \text{и} \quad b_k = \frac{\sin(2\pi BkT)}{\pi k}.$$

Симметричный фильтр такого типа имеет нулевой фазовый угол. С точки зрения электроники этот фильтр, разумеется, нереализуем, а в цифровом плане он реализуется только в ситуациях с «реальным временем» при помощи задержки. Теперь, по прошествии времени, понятно, что тот путь, который он предложил, отлично реализуется на ЭВМ.

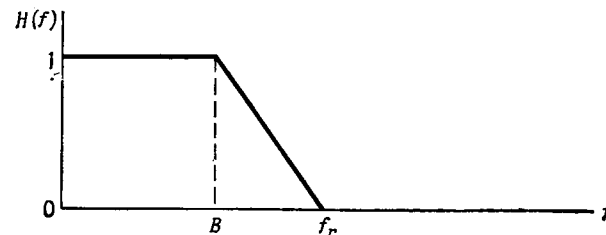


Рис. 4.16. Улучшенный фильтр Ормсби.

Ормсби заметил, что  $|b_k| \leq 2BT/k$ , и, следовательно, величина весов убывает слишком медленно. Поэтому в некоторых случаях для того, чтобы достичь хорошей фильтрации, значение  $M$  должно быть очень большим.

Значения весов получались с помощью обратного преобразования Фурье прямоугольного импульса

$$b_k = T \int_{-B}^B \exp\{j2\pi f k T\} df.$$

Множитель  $T$  перед интегралом обеспечивает нужную размерность. Его можно учесть также и после вычислений весов.

Фильтр существенно улучшила предложенная Ормсби замена прямоугольного импульса трапецевидным (рис. 4.16). При этом из-за дополнительного треугольника, начало которого совпадает с точкой  $B$  (частотой отсечки), а конец — с точкой  $f_r$  (частотой отреза), веса убывают уже не как  $1/k$ , а как  $1/k^2$ , т. е. гораздо быстрее, чем в случае фильтра низких частот с прямоугольной передаточной функцией. Сейчас эти веса уже не используются, поскольку их вытеснили другие, предложенные позднее.

После Ормсби изучение ИКО-фильтров продвинулось далеко вперед. Пожалуй, наиболее значительным вкладом в этом вопросе являются работы Паркса и Мак-Клеллана (1972) и Мак-Клеллана, Паркса и Рабинера (1973). Для получения импульсных фильтров с конечной областью отклика широко используются программа

Паркса — Мак-Клеллана, распечатка которой приведена в их статье, и модификация алгоритма Ремеза. Мы применяли эти методы получения фильтров и склоняемся к тому мнению, что они в крайней степени полезны. Сейчас эти методы широко применяются в промышленности. В области ИКО-фильтров самым плодотворным автором является, пожалуй, Рабинер; см. работу Рабинера и Гоулда (1978), в которой достаточно подробно представлены его результаты.

Рабинер выделяет три основных метода получения весов ИКО-фильтров: 1) использование во временной области прямоугольного окна, 2) частотное ограничение, 3) разнообразные приемы, минимизирующие ошибки при некотором критерии. Последний из этих методов затрагивается в следующем параграфе.

Вместо пересказа работы Рабинера детально изложим один метод, не рассматривавшийся до сих пор в литературе. В нем используется окно, предложенное Поттером (1971). Авторам метод сообщили Бикфорд и Глейз, когда они оба работали в Time/Data Corporation (Санта-Клара, Калифорния 95051).

Процедура получения весов в этом случае выглядит следующим образом. Сначала для промежутка  $(-M, M)$  вычисляются веса прямоугольного импульса. (На самом деле вычисления производятся только для  $k = 0, \dots, M$ , для остальных  $k$  они излишни.) Затем полученные веса умножаются на функцию, определяющую окно. Эта функция улучшает характеристику фильтра за счет выхода за пределы полосы пропускания. Для этой цели можно использовать почти все окна, которые применяются при вычислениях плотности спектра мощности. Очень часто в этом случае выбираются окна Хэннинга и Хэмминга (см. гл. 8).

В упомянутой работе Поттера рассмотрено много примеров различных окон. Для реализации фильтра подходит предложенное им окно P310. Оно имеет вид

$$w_k = \frac{c_k}{\omega} \left[ d_0 + 2 \sum_{p=-3}^3 d_p \cos \frac{\pi p k}{M} \right],$$

где

$$c_k = \begin{cases} 1/2 & \text{при } k = \pm M, \\ 1 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$$d_0 = 1, \quad d_{-1} = d_1 = 0.684988, \\ d_{-2} = d_2 = 0.202701, \quad d_{-3} = d_3 = 0.0177127$$

и

$$\omega = d_0 + 2 \sum_{p=-3}^3 d_p = 2.8108034.$$

На рис. 4.17 представлена программа для получения весов этого фильтра. Последовательность команд вызова программы сводится к предложению

### CALL LPSPBG(M, B, T, BK)

где  $M$  — размах фильтра; всего используется  $2M + 1$  весов (в силу симметрии необходимо получить всего  $M + 1$  весов);  $B$  — точка отсечки фильтра в герцах;  $T$  — выборочный интервал в секундах;  $BK$  — веса фильтра; соответствующий массив должен иметь размерность  $M + 1$  или больше. Нормируем  $d$  коэффициентов (в программе  $D0, D(1), D(2)$  и  $D(3)$ ) делением на 2.8108034.

```

SUBROUTINE LPSPBG (MM,B,T,BK)
  DIMENSION BK(1),D(3)
  DATA D0/0.35577019/,D(1)/0.2436983/,D(2)/0.07211497/,
  *D(3)/0.00630165/,PI/3.14159265/
  C   ПРОГРАММА ВЫЧИСЛЯЕТ ВЕСА НИЗКОПОЛОСНОГО ИКО-ФИЛЬТРА
  C   МЕТОД, ПРЕДЛОЖЕННЫЙ ПОТТЕРОМ, БИКФОРДОМ И ГЛЕЙЗОМ
  C   ВСЕГО ИМЕЕТСЯ 2M+1 ВЕСОВ... В LPSPBG ВЫЧИСЛЯЕТСЯ M+1
  C   T ЕСТЬ ИНТЕРВАЛ ВЫБОРКИ В СЕКУНДАХ
  C   B ЕСТЬ ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ В ГЦ
  C   РЕЗУЛЬТАТЫ ЗАПОМИНАЮТСЯ В BK
  M=MM
  C   СНАЧАЛА ПОЛУЧАЮТ ВЕСА ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ЧАСТИ
  FACT=2.*B*T
  BK(1)=FACT
  FACT=FACT*PI
  DO 5 I=1,M
  FI=I
  5   BK(I+1)=SIN(FACT*FI)/(PI*FI)
  C   ТРАПЕЦИЕВИДНОЕ СГЛАЖИВАНИЕ В КОНЦЕ
  BK(M+1)=BK(M+1)/2.
  C   ТЕПЕРЬ ПРИМЕНЯЕТСЯ ОКНО ПОТТЕРА P310
  SUMG=BK(1)
  DO 15 I=1,M
  SUM=DO
  FACT=PI*FLOAT(I)/FLOAT(M)
  DO 10 K=1,3
  10  SUM=SUM+2.*D(K)*COS(FACT*FLOAT(K))
  BK(I+1)=BK(I+1)*SUM
  15  SUMG=SUMG+2.*BK(I+1)
  M1=M+1
  DO 20 I=1,M1
  20  BK(I)=BK(I)/SUMG
  RETURN
  END

```

Рис. 4.17. Подпрограмма LPSPBG для получения весов низкочастотного ИКО-фильтра.

На рис. 4.18 показан результат применения окна Поттера P310 в случае прямоугольного фильтра низких частот. В этом примере  $T = 1$  ( $F = 0.5$ ),  $B = 0.1245$ ,  $M = 128$  (общий размах фильтра — 257 точек). Как видно из рисунка, в результате применения окна нижний уровень фильтра уменьшается в среднем примерно на 40 дБ; ширина полосы при этом возрастает очень незначительно. Это существенно лучше результатов, которые получаются при использовании так называемого окна Кайзера, рассмотренного Рабинером и Гоулдом (1978).

Эту программу нетрудно приспособить для фильтров высоких частот, заграждающих и полоснопропускающих фильтров. По сути дела, никаких изменений в программе производить не нужно: 1) для фильтра высоких частот с полосой пропускания от  $B$  до  $F$

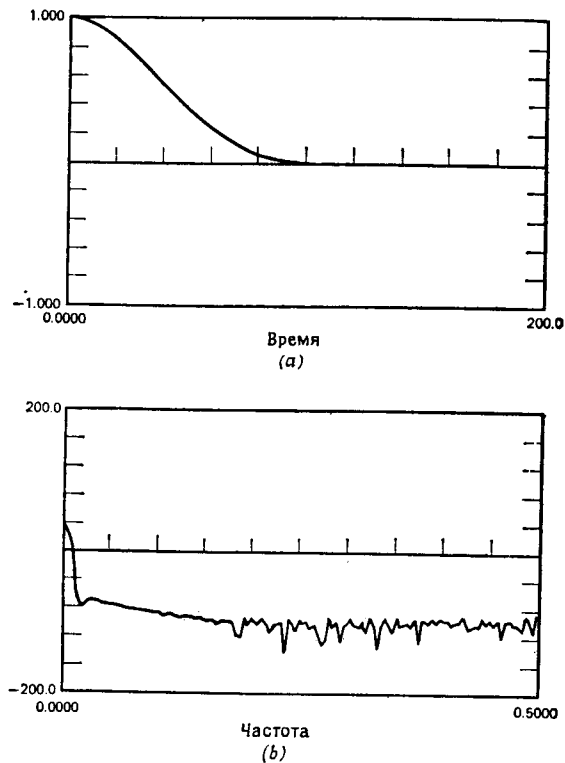
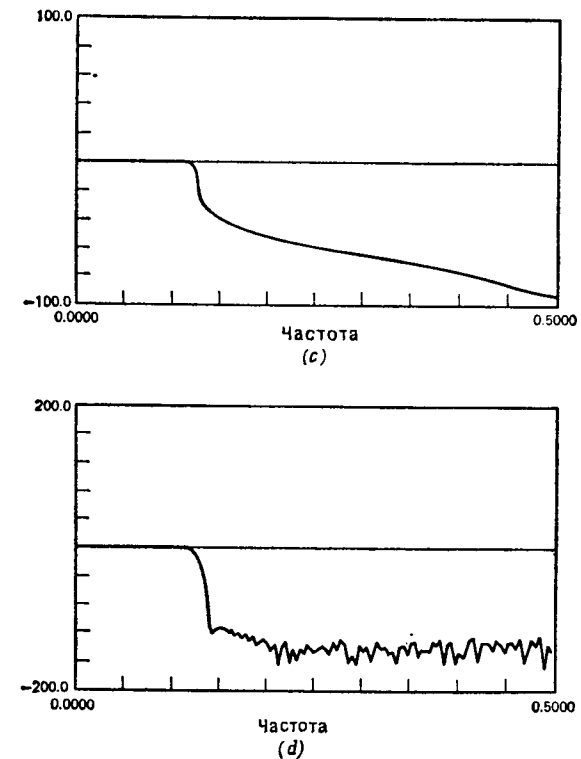


Рис. 4.18. Окно Поттера R310 и низкочастотный фильтр до и после применения окна.  $a$  — окно Поттера R310 во временной области;  $b$  — окно Поттера R310 в области частот;  $c$  — низкочастотный ИКО-фильтр до применения окна;  $d$  — тот же

необходимо получить фильтр низких частот с полосой  $0-B$ , а затем вычесть центральный вес из единицы, а у остальных изменить знаки на противоположные, т. е.  $b'_0 = 1 - b_0$ ,  $b'_k = -b_k$ ,  $k \neq 0$  (штрихованным весам соответствует случай высоких частот); 2) для полоснопропускающего фильтра с полосой пропускания от  $f_1$  до  $f_2$  Гц нужно получить два фильтра низких частот с полосами  $0-f_1$  и  $0-f_2$  соответственно, а затем получить веса, придерживаясь правила: (вес для фильтра высоких частот) = (вес для фильтра низких частот до  $f_2$ ) - (вес для фильтра низких частот до  $f_1$ ); 3) для заграждающего фильтра, не пропускающего информацию в интервале  $(f_1, f_2)$ , получить те же два

фильтра низких частот, что и в случае 2, и определить веса по правилу: (вес для заграждающего фильтра) =  $1 - (\text{вес для фильтра низких частот до } f_2) + (\text{вес для фильтра низких частот до } f_1)$ .



фильтр после применения окна Поттера. Обратите внимание на изменение масштаба. Здесь  $T=1$ ,  $B=0.1245$ ,  $M=128$  (для общего числа точек, равного 257).

#### 4.13. ПРИЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ ФИЛЬТРОВ

В литературе описывается немало процедур, предназначенных для расчета цифровых фильтров. В них используются алгоритмы Флетчера — Пауэлла (Жюльен и Сид-Ахмед (1973)) и минимаксные процедуры или процедуры Чебышева (Хольц (1973)). Наиболее важными в этом вопросе являются уже упомянутые выше работы Паркса и Мак-Клеллана и их программы для ЭВМ. Используемый там метод включает в себя алгоритм Флетчера — Пауэлла (Флетчер и Пауэлл (1963)). Для этого алгоритма составлена программа на Фортране, которая имеется в различных источниках (IBM, 1968).

Предположим что ситуация выглядит следующим образом.

1. В виде таблицы неотрицательных чисел заданы значения  $|H(f_i)|^2$  и  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ .
2. По формуле  $\lambda_i = 2\pi f_i T$  определены значения  $\lambda_i$ .
3. Фильтр должен быть рекурсивным и иметь  $M$  составляющих.
4. Аппроксимацией функции  $|H(f_i)|^2$  служит функция  $|\hat{H}(f_i)|^2$ . Передаточную функцию каждой составляющей фильтра будем аппроксимировать отношением многочленов

$$\frac{\sin^4(\lambda_i/2) + 2p_m^2 \sin^2(\lambda_i/2) + (p_m^4 + q_m^4)}{\sin^4(\lambda_i/2) + 2r_m^2 \sin^2(\lambda_i/2) + (r_m^4 + s_m^4)}.$$

Выбор таких формул диктуется необходимостью гарантировать выполнение неравенства  $|\hat{H}(f_i)|^2 \geq 0$  для любых  $i$  вне зависимости от знаков  $p_m$  и  $q_m$ . Кроме того, эти формулы гарантируют устойчивость фильтра.

Таким образом, передаточная функция фильтра имеет вид ( $i = 1, \dots, N$ )

$$|\hat{H}(f_i)|^2 = A \prod_{m=1}^M \frac{\sin^4(\lambda_i/2) + 2p_m^2 \sin^2(\lambda_i/2) + (p_m^4 + q_m^4)}{\sin^4(\lambda_i/2) + 2r_m^2 \sin^2(\lambda_i/2) + (r_m^4 + s_m^4)}.$$

Параметр  $A$  означает общий постоянный множитель.

Перечислим операции, предусмотренные в алгоритме.

1. Для величин  $p_m, q_m, r_m, s_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ) задаются начальные значения.

2. Для  $m = 1, \dots, M$  и  $i = 1, \dots, N$  вычисляются величины

$$g_{im} = \sin^4 \frac{\lambda_i}{2} + 2p_m^2 \sin^2 \frac{\lambda_i}{2} + (p_m^4 + q_m^4),$$

$$h_{im} = \sin^4 \frac{\lambda_i}{2} + 2r_m^2 \sin^2 \frac{\lambda_i}{2} + (r_m^4 + s_m^4).$$

Предварительно должны вычисляться и запоминаться значения  $\sin^2(\lambda_i/2)$  и  $\sin^4(\lambda_i/2)$ .

3. Вычисляются значения

$$P_i = \prod_{m=1}^M \frac{g_{im}}{h_{im}}, \quad i = 1, \dots, N.$$

4. Вычисляется  $A^*$  (оценка для  $A$ ):

$$A^* = \left( \sum_{i=1}^N |\hat{H}(f_i)|^2 \right) / \left( \sum_{i=1}^N P_i |\hat{H}(f_i)|^2 \right).$$

5. Для  $i = 1, \dots, N$  вычисляются ошибки

$$E_i = A^* P_i - |H(f_i)|^2 = |\hat{H}(f_i)|^2 - |H(f_i)|^2.$$

6. Вычисляется среднеквадратичная ошибка

$$Q = N^{-1} \sum_{i=1}^N E_i^2.$$

7. По формулам для частных производных  $Q$  по  $\varphi$

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N E_i \frac{\partial |\hat{H}(f_i)|^2}{\partial \varphi}$$

и формулам для частных производных  $|\hat{H}(f_i)|^2$  по  $p_m, q_m, r_m$  и  $s_m$  ( $i = 1, \dots, N, m = 1, \dots, M$ )

$$\frac{\partial |\hat{H}(f_i)|^2}{\partial p_m} = \frac{4A^* P_i}{g_{im}} \left( p_m \sin^2 \frac{\lambda_i}{2} + p_m^3 \right),$$

$$\frac{\partial |\hat{H}(f_i)|^2}{\partial q_m} = \frac{4A^* P_i}{g_{im}} q_m^3,$$

$$\frac{\partial |\hat{H}(f_i)|^2}{\partial r_m} = -\frac{4A^* P_i}{h_{im}} \left( r_m \sin^2 \frac{\lambda_i}{2} + r_m^3 \right),$$

$$\frac{\partial |\hat{H}(f_i)|^2}{\partial s_m} = -\frac{4A^* P_i s_m^3}{h_{im}}$$

вычисляются  $\partial Q / \partial p_m, \partial Q / \partial q_m, \partial Q / \partial r_m$  и  $\partial Q / \partial s_m$ , где  $m = 1, \dots, M$ .

8. К полученным данным применяется алгоритм Флетчера — Пауэлла, который вырабатывает новые значения  $p_m, q_m, r_m$  и  $s_m$  ( $m = 1, \dots, M$ ).

9. С этого пункта возвращаются на второй шаг, если значения не подходят, или приступают к дальнейшим действиям, если полученные результаты приемлемы.

10. После этого находят полюсы и нули. Для  $m$ -й составляющей фильтра нули определяют из уравнения

$$\sin^4 \frac{\lambda_m}{2} + 2p_m^2 \sin^2 \frac{\lambda_m}{2} + (p_m^4 + q_m^4) = 0,$$

которое решают как квадратное уравнение относительно  $\sin^2 \frac{\lambda_m}{2}$ :

$$\sin^2 \frac{\lambda_m}{2} = \frac{-2p_m^2 \pm \sqrt{4p_m^4 - 4p_m^4 - 4q_m^4}}{2} = -p_m^2 \pm jq_m^2.$$

В итоге получают решения

$$f_{zm} = \frac{1}{\pi T} \arcsin \left( -p_m^2 \pm jq_m^2 \right)^{1/2}.$$

Аналогичное уравнение для полюсов приводит к решениям

$$f_{pm} = \frac{1}{\pi T} \arcsin \left( -r_m^2 \pm js_m^2 \right)^{1/2}.$$

Из них используются только  $M$  нулей и полюсов, которые соответствуют устойчивому фильтру.

11. Для вычисления коэффициентов  $a_{1m}$ ,  $a_{2m}$ ,  $b_{1m}$  и  $b_{2m}$  можно воспользоваться соответствующей частью видоизмененной программы получения синусного фильтра низких частот Баттеруорта (здесь  $b_{0m} = 1$  для всех  $m$ ). Последним вычисляется общий постоянный множитель для всех нерекурсивных членов. Например, если потребовать, чтобы

$$|H(f_0)|^2 = A,$$

то все  $b$  членов умножаются на множитель  $c$ , определяемый формулой

$$c = \left( A / \left| \prod_{m=1}^M \frac{1 + b_{1m}e^{-j2\pi f_0 T} + b_{2m}e^{-j4\pi f_0 T}}{1 + a_{1m}e^{-j2\pi f_0 T} + a_{2m}e^{-j4\pi f_0 T}} \right| \right)^{1/M}.$$

Этот алгоритм нетрудно приспособить для вычисления весов или нерекурсивных, или полностью рекурсивных фильтров, исключая или  $r_m$  и  $s_m$ , или  $p_m$  и  $q_m$  соответственно.

### Упражнения

4.1. Покажите, что передаточная функция

$$|H(f)|^2 = \frac{1}{\omega_n^4 [(1 - (f/f_n)^2)^2 + (2\zeta f/f_n)^2]}$$

имеет максимум в частоте  $f_p = f_n (1 - 2\zeta^2)^{1/2}$ .

4.2. Получите передаточную функцию фильтра

$$y_i = 1/4 x_{i-1} + 1/2 x_i + 1/4 x_{i+1}.$$

Ответ:  $H(f) = \cos^2(\pi f T)$ .

4.3. Получите передаточную функцию фильтра

$$y_i = \frac{1}{2N} \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} x \left( i + n - \frac{N}{2} \right),$$

где  $N$  — четное и

$$\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)! n!}.$$

Ответ:  $H(f) = \cos^N(\pi f T)$ .

4.4. Приведите выражение для параметра  $\alpha$  фильтра низких частот первого порядка с точкой половинной мощности, равной  $B$  Гц, т. е.

$$|H(B)|^2 = 1/2 \quad \text{и} \quad |H(0)|^2 = 1.$$

Ответ:  $\alpha = 2A^2 + 1 - 2A\sqrt{A^2 + 1}$ , где  $A = \sin(\pi TB)$ .

4.5. Как было показано, фильтр второго порядка с действительными полюсами может быть представлен в виде двух фильтров первого порядка. Покажите, что то же самое справедливо и для фильтра второго порядка с комплексными полюсами, полагая, что коэффициенты фильтра могут быть комплексными. Приведите выражение для коэффициентов через  $\alpha$  и  $\beta$ .

4.6. Проверьте, что выражение, приведенное для единичной импульсной функции отклика фильтра второго порядка с комплексными полюсами, правильно.

а) Используя разностное уравнение фильтра и полученное для  $y(i)$  выражение, получите по пять первых значений ( $i = 0, \dots, 4$ ). Сравните полученные результаты.

б) Покажите, что решение удовлетворяет разностному уравнению.

**Задачи для решения на ЭВМ.** В некоторых задачах потребуется использование подпрограмм LPSB и TTRAN из приложения А. Для выведения результатов на дисплей полезно обращаться к подпрограмме PRPLOT.

4.7. Составьте программу для вычисления параметра  $\alpha$  в случае фильтра низких частот первого порядка с характеристиками, перечисленными в упр. 4.4. Программа должна предусматривать следующие операции.

а) Вычисление параметра  $\alpha$  для  $T = 0.005$  и  $B = 3.125, 6.25, 12.5, 25, 20$  и 100 Гц.

б) Вычисление  $y(i)$  для  $x(i) = 1, 0, 0, \dots$ , где  $i = 0, \dots, 25$ .

с) Вычисление и построение графиков коэффициента усиления и фазы передаточной функции при  $f = 0, 2, 4, \dots, F$  Гц.

4.8. Составьте программу для вычисления коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$  и  $b_0$  в общем случае комплексного фильтра второго порядка. Зафиксируйте в программе значение  $T = 0.005$  и определите коэффициенты для пар  $(f_n, \zeta)$  в следующем порядке.

а) Зафиксируйте значение  $f_n$  равным 50 Гц, а  $\zeta$  последовательно присваивайте значения 0.5, 0.25, 0.1, 0.05, 0.01, 0.001.

б) Зафиксируйте значение  $\zeta$  равным 0.05, а  $f_n$  последовательно присваивайте значения 25, 10, 5, 2.5 Гц.

с) В перечисленных случаях вычислите такие значения коэффициента  $b_0$ , чтобы в пиковой частоте коэффициент усиления фильтра был равен единице.

д) Для пар (50, 0.05) и (50, 0.01) получите отклик фильтра (численно и графически) на последовательность  $x(i) = 1, 0, 0, 0$ . Согласуется ли полученная последовательность с теоретической?

е) Для первых четырех пар  $(f_n, \zeta)$ , перечисленных в п. а), вычислите коэффициент усиления и фазу передаточной функции. Получите соответствующие графики. Прокомментируйте результаты с точки зрения ширины полосы пропускания.

4.9. Проведите трансляцию программы LP2 (рис. 4.4.) и составьте управляющую программу, которая производит следующие операции.

а) Вычисление по коэффициентам  $A1$  и  $A2$  ( $a_1$  и  $a_2$ ) значений  $f_n$  и  $\zeta$  при  $T = 0.005$  и  $BW = 32, 16, 8, 4, 2, 1$  Гц. Прокомментируйте результаты.

б) Получение и построения графиков коэффициента усиления и фазы передаточной функции для  $f = 0, 1, \dots, F$  Гц. Прокомментируйте результаты.

с) Вычисление отклика фильтра на последовательность  $x(i) = 1, 0, 0, \dots, i = 0, \dots, 25$ . Прокомментируйте результаты.

4.10. Проведите трансляцию программы LPSB и составьте управляющую программу, которая производит следующие операции:

а) Дублирование (для проверки правильности работы программы) результатов, приведенных в табл. 5.3 для шестиполосного фильтра, или результатов, полученных в предыдущем упражнении для двухполосного фильтра.

б) Вычисление с помощью подпрограммы TTRAN коэффициента усиления и фазы передаточной функции шестиполосного фильтра при  $T = 0.005$  и  $B = 32, 16, 8, 4, 2, 1$  Гц. Прокомментируйте результаты.

с) Определение полюсов для каждой из 18 пар коэффициентов, полученных в п. б). Изобразите положение полюсов на комплексной плоскости и прокомментируйте результаты.

4.11. Описанным в § 4.7 способом переделайте для фильтра высоких частот Баттеруорта программу LPSB. Выполните с этой программой для фильтра

высоких частот упр. 4.10, используя значения  $B=68, 84, 92, 96, 98$  и  $99$  Гц. Сравните новые результаты с теми, которые были получены в упр. 4.10, и прокомментируйте возникшую картину.

4.12. Проведите трансляцию программы с рис. 4.13 для получения полоснопропускающего фильтра, имеющего шесть рекурсивных коэффициентов, полагая  $T=0.005$ . Получите (численно и графически) значения коэффициента усиления и фазы в точках  $f=0, 1, \dots, F$  Гц, полагая

а)  $f_c=50$  Гц и  $B=1, 2, 5, 10, 25$  Гц;

б)  $B=2$  Гц и  $f_c=2, 4, 10$  и  $20$  Гц.

Прокомментируйте результаты.

4.13. Переделайте программу, использованную в упр. 4.12, для случая заграждающего фильтра и сделайте те же вычисления.

4.14. Проведите трансляцию программы LPTB с рис. 4.15 для вычисления коэффициентов фильтров низких частот Баттеруорта. Повторите упр. 4.10, используя вместо программы LPSB программу LPTB. Сравните результаты этих двух упражнений и прокомментируйте их.

4.15. а) Напишите программу вычисления коэффициента усиления и фазы передаточной функции симметричного ИКО-фильтра.

б) Напишите программу для вычисления весов фильтра низких частот, в которой

$$b_k = \frac{\sin(2\pi BkT)}{\pi k}, \quad k=0, \dots, M.$$

с) Используя программы из пп. а) и б), составьте программу, которая строит графики коэффициента усиления, полагая  $T=0.005$ ,  $B=32, 16, 8, 4, 2, 1$  Гц и  $M=8, 16, 32, 64$ . Прокомментируйте результаты. Сравните их также с результатами, полученными в упр. 4.10.

4.16. Программу LPSPBG с рис. 4.17, реализующую алгоритм Поттера, Бикфорда и Глейза, примените в упр. 4.10 и сравните результаты, которые получатся в обоих случаях.

## Глава 5

### ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

#### 5.1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе затронут круг вопросов, связанных с использованием на практике методов цифровой фильтрации. Среди них будут рассмотрены шум и искажение, неустойчивость, различные виды программной записи алгоритмов фильтрации, сглаживание данных и децимация.

Выбор конкретного фильтра невозможно подчинить какому-либо общему правилу. Дело в том, что как необходимый тип фильтра (например, полоснопропускающий или низких частот), так и те условия, в которых должна проводиться фильтрация, в различных приложениях существенно отличаются.

С другой стороны, во многих приложениях требуется только низкочастотная фильтрация. В этом случае в качестве своего рода отправной точки выбора может служить шестиполосный фильтр низких частот Баттеруорта. Иначе говоря, правомерна такая постановка вопроса: «Нужно ли в данном приложении отказываться от шестиполосного фильтра Баттеруорта?» Нередко, если оптимальный выбор неосуществим, наиболее подходящим оказывается именно этот тип фильтра.

#### 5.2. ШУМ И ИСКАЖЕНИЕ

Во многих вычислительных операциях, производимых ЭВМ, возникает шум. При использовании арифметики с фиксированной точкой это преимущественно бывает в результате умножения. После перемножения меньшая значащая половина произведения стирается, а большая значащая половина (усеченная или округленная) запоминается. В данном случае величину шума определяет разница между истинным ответом и числом, которое получилось после усечения или округления. Уровень такого шума колеблется в пределах примерно половины последнего значащего бита.

При использовании арифметики с плавающей точкой ошибками такого рода дело не ограничивается. Здесь возникают новые погрешности, обусловленные антипереполнением при сложении. Когда складываются два числа с плавающей точкой, одно из которых значительно больше другого, все меньшее число или его часть могут быть потеряны.