

обратного БПФ. Приведите график для получившейся временной последовательности.

6.15. Получите формулу (6.21) из определения (6.20).

Ответ: поскольку $f_k = k/(16T)$, для суммы

$$\sum a_k \cos(2\pi i T f_k + \varphi_k)$$

имеем

$$\sum a_k \cos\left(2\pi i T \frac{k}{16T} + \varphi_k\right) = \sum a_k \cos\left(2\pi k \frac{i}{16} + \varphi_k\right) = \sum a_k \cos\left(\frac{2\pi k}{16} i + \varphi_k\right).$$

6.16. Повторите графики, изображенные на рис. 6.29, используя результаты упр. 6.14.

6.17. Объясните, как получаются равенства (6.22).

Ответ: а) в силу того, что преобразование Фурье линейно, справедливы равенства $E[L(x)] = LE(x) = 0$;

б) интеграл квадрата преобразования Фурье должен быть равным σ_x^2 , поскольку

$$\Delta f = b = \frac{1}{NT}, \quad E|X^2| \frac{1}{NT} = \sigma_x^2$$

и

$$E \frac{X_R^2}{NT} + E \frac{X_I^2}{NT} = \sigma_x^2;$$

так как $EX_R^2 = EX_I^2$, то $2E[X_R^2/NT] = \sigma_x^2$, что и требовалось доказать.

6.18. Докажите, что модуль $|S(f) + a \exp[-i2\pi ft]|$ содержит синусоидальную составляющую.

Ответ:

$$\begin{aligned} |S(f) + a e^{-i\omega t}|^2 &= |S(f)|^2 + a^2 + 2\operatorname{Re}[aS(f) e^{-i\omega t}] = \\ &= |S(f)|^2 + a^2 + 2a \{\operatorname{Re}[S(f) \cos(\omega t)] + \operatorname{Im}[S(f) \sin(\omega t)]\}. \end{aligned}$$

Глава 7

КОВАРИАЦИЯ И СВЕРТКА

7.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ

Содержание этой главы составляют вопросы, связанные с ковариационными функциями и сверткой. Несмотря на то что во многих приложениях ковариация и свертка играют различные роли, мы рассмотрим их вместе, поскольку в вычислительном плане получение их мало чем отличается.

Хотя в анализе временных рядов термины «корреляционная функция» и «ковариационная функция» зачастую выступают как синонимы, в этой главе мы будем их разграничивать и пользоваться более устоявшимся в статистике термином ковариация, оставляя за корреляцией понятие нормированной величины со значениями в отрезке $[-1, 1]$. Далее будем придерживаться статистической терминологии.

Ковариационные (корреляционные) функции находят широкое применение в анализе вибраций и ударов, в задачах, связанных с передачей информации, радарным обнаружением, системами управления, а также в анализе данных океанографических исследований, словом, во всех областях, где уместно применение соотношений спектрального анализа, использующих преобразования Фурье. Если в задаче для анализа используются спектр мощности и кросс-спектр, то соответствующие корреляционные функции в принципе также могут применяться, поскольку они тесно связаны со своими преобразованиями Фурье. На практике могут существовать веские причины для выбора той или иной возможности. Например, время относительного смещения для двух сигналов можно определять по фазе кросс-спектра, но нередко более целесообразным в этом случае оказывается применение (кросс-) ковариационной функции. Уточнение «кросс» для ковариации излишне, однако мы часто прибегаем к этому, чтобы не путать ее с автоковариацией.

Можно говорить и о столь же широком применении функции свертки. Следует, впрочем, отметить, что большую часть таких применений можно отнести к цифровой фильтрации, поскольку свертка временной последовательности с импульсной функцией отклика линейного фильтра дает отклик (выход) фильтра. Поэтому функция свертки полезна при решении таких задач, как сглаживание (низкополосная фильтрация) данных и генерирование

случайного процесса с заданной формой спектра при моделировании и выделении сигналов (подгоночный фильтр). Ряд таких применений будет продемонстрирован в § 7.9.

Ковариация. Ковариационная функция имеет двойное применение. Во-первых, с ее помощью определяется степень «сходства» двух временных последовательностей при различных значениях сдвига по времени (кросс-ковариация). Во-вторых, она используется для определения степени корреляции временной функции с самой собой в зависимости от величины времени задержки (автоковариация). В качестве оценки кросс-ковариации для последовательностей $x(i)$ и $y(i)$ ($i=0, 1, \dots, N-1$) используется величина

$$s_{xy}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{p=0}^{N-i-1} x(p) y(p+i),$$

где $i = -m, \dots, -1, 0, 1, \dots, m$. При этом всегда предполагается, что до вычисления оценки из значений последовательностей вычитаются соответствующие выборочные средние. Индекс i называют «запаздыванием», а величину m — «максимальным запаздыванием». Если T — интервал, с которым производится выборка, то величина $\tau_{\max} = mT$ будет соответствующим максимальным запаздыванием (или, иначе, задержкой) по времени. На практике, как правило, редко используются значения задержки, превышающие 10% всей длины записи. Если $y(i) = x(i)$, то $s_{xx}(i)$ называют автоковариационной функцией и, в силу ее симметричности относительно 0, вычисляют лишь для положительных значений запаздывания. Приведем несколько элементарных фактов, относящихся к ковариационной функции. Справедливы равенства

$$s_{xy}(-i) = s_{yx}(i), \quad s_{xx}(-i) = s_{xx}(i), \quad s_{xx}(0) = s_x.$$

Функция

$$s_{xy}(i) + s_{xy}(-i) = A_{xy}(i) \quad (7.1)$$

является четной, а функция $s_{xy}(i) - s_{xy}(-i) = B_{xy}(i)$ — нечетной. Для случайных данных $s_{xx}(i) \rightarrow 0$ и $s_{xy}(i) \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$.

Напомним, что для корреляций выполняется неравенство

$$|\rho_{xy}(i)| = \left| \frac{\sigma_{xy}(i)}{\sigma_x \sigma_y} \right| \leq 1, \quad (7.2)$$

где $\sigma_{xy}(i)$ есть «истинная» ковариационная функция. Важно отметить, что для ограниченной длины наблюдаемого ряда выборочная корреляция

$$r_{xy}(i) = \frac{s_{xy}(i)}{s_x s_y}$$

не обязательно ограничена единицей, как этого можно было бы ожидать из (7.2). Особенно вероятно нарушение такого ограничения при $i > N/10$. Другим несколько измененным определением выборочной кросс-корреляционной функции служит следующее:

$$s'_{xy}(i) = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x(p) y(p+i). \quad (7.3)$$

Эта оценка кросс-ковариации $s'_{xy}(i)$ имеет несколько меньшую, чем $s_{xy}(i)$, дисперсию (согласно Парзену (1961)) и всегда удовлетворяет неравенству (7.2). Вместе с тем это смещенная оценка, причем смещение может достигать неприемлемо больших значений при умеренно больших величинах задержки i . Вследствие несмещенности оценка $s_{xy}(i)$ более предпочтительна, так как при разумных значениях i ее дисперсия ненамного больше, чем у (7.3). Как будет показано ниже, это очень важно для детерминированных данных (см. § 7.9).

Получение корреляционных функций стало экономичным с вычислительной точки зрения после открытия БПФ. Из дискретного варианта теоремы Винера — Хинчина вытекает, что

$$S_{xy}(k) = T \sum_{i=0}^{N-1} s_{xy}(i) \exp\left(-j \frac{2\pi i k}{N}\right), \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

$$s_{xy}(i) = b \sum_{k=0}^{N-1} S_{xy}(k) \exp\left(j \frac{2\pi i k}{N}\right), \quad i=0, 1, \dots, N-1.$$

Следовательно, кросс-ковариацию (автоковариацию) можно определить по кросс-спектру (спектру мощности), вычисленному приближенно. Этот вопрос будет затронут в § 7.4.

Почти во всех приложениях кросс-ковариационной функции определяется время относительной задержки. Это связано с тем, что для одинаковых последовательностей $y(i)$ и $x(i)$, сдвинутых друг относительно друга на \hat{i} единиц, оценка $s_{xy}(i)$ достигает максимума при значении \hat{i} , равном величине сдвига. Оказывается, что в некоторых случаях лучшие оценки для времени относительной задержки дает функция свертки. Позже мы еще вернемся к этому вопросу.

Допустим, что последовательность $y(i)$ есть запаздывающая версия последовательности $x(i)$ плюс посторонний шум, т. е.

$$y(i) = x(i+k) + n(i).$$

Тогда ковариационная функция имеет вид

$$s_{xy}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{p=0}^{N-1-i} [x(p) x(p+k+i) + x(p) n(p+i)] =$$

$$= s_{xx}(k+i) + s_{xn}(i).$$

Поскольку среднее оценки $s_{xn}(i)$ равно 0, кросс-ковариация есть сдвинутая по времени автоковариация, которая искажена кросс-ковариацией последовательности $x(i)$ и шума $n(i)$. Эта кросс-ковариация при больших N стремится к нулю. Поэтому, исследуя $s_{xy}(i)$ на максимум, можно получить значение запаздывания по времени, соответствующее величине задержки. В § 7.9 мы увидим, какие практические задачи возникают в этом случае.

Помимо задач определения задержки кросс-корреляционные (или ковариационные) функции находят применение в задачах установления эквивалентности временных последовательностей. Максимум значений нормированной кросс-корреляционной функции дает количественный показатель, отражающий степень «сходства» двух рядов данных. При этом для двух одинаковых временных функций, сдвинутых друг относительно друга, максимальное значение $\rho_{xy}(i)$ равно единице. Для функций, совершенно независимых друг от друга (некоррелированных), значение $\rho_{xy}(i)$ равно 0. Величина $s_e = \sqrt{1 - \rho_{xy}^2(i)_{\max}}$ служит мерой «согласия» между $x(i)$ и $y(i)$ и представляет собой среднеквадратичную величину разности, которую обычно называют «стандартной ошибкой» или «стандартной ошибкой оценки».

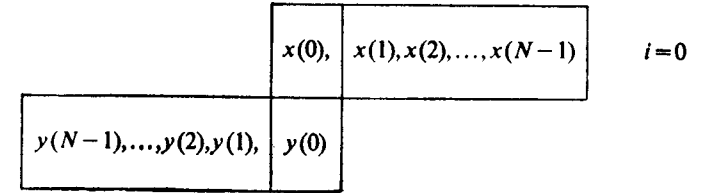
Автоковариационные функции и их преобразование Фурье, т. е. спектры мощности, тесно связаны и несут в принципе одну и ту же информацию. От плотности спектра мощности, допускающей, как правило, простую интерпретацию в инженерных приложениях, иногда, стремясь получить более наглядное графическое изображение результатов, переходят к автокорреляции. Например, к автокорреляционной функции обращаются, когда нужно определить коэффициенты для уравнения прогнозирования (т. е. для экстраполяции будущих значений временных последовательностей по их прошлым значениям).

Свертка. Формула для дискретной быстрой свертки¹⁾ отличается от формулы для ковариации очень немногим. Все различия сводятся лишь к отсутствию усреднения и изменению знака в одном временном индексе:

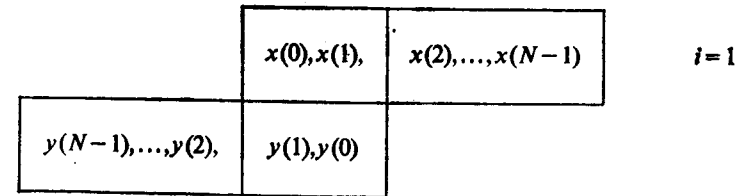
$$c_{xy}^t(i) = \begin{cases} T \sum_{p=0}^i x(p)y(i-p), & i=0, 1, \dots, N-1, \\ T \sum_{p=1}^{N-l-1} x(p+l)y(N-p), & i=l+N, l=0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (7.4)$$

¹⁾ Мы ввели этот термин (transient), чтобы подчеркнуть различие с круговой сверткой. Это понадобится в § 7.5.

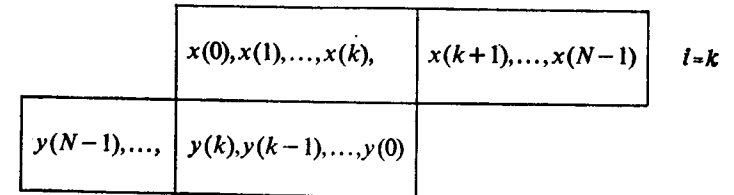
Проиллюстрируем эту формулу диаграммами



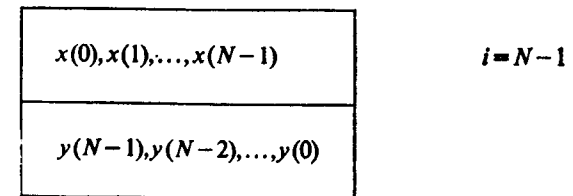
$$c_{xy}^t(0) = x(0)y(0)$$



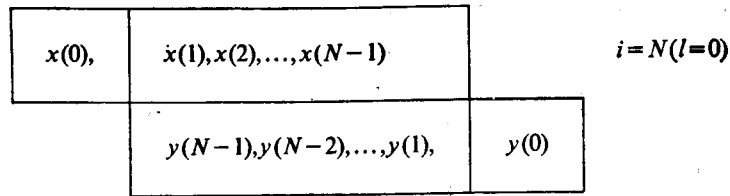
$$c_{xy}^t(1) = x(0)y(1) + x(1)y(0)$$



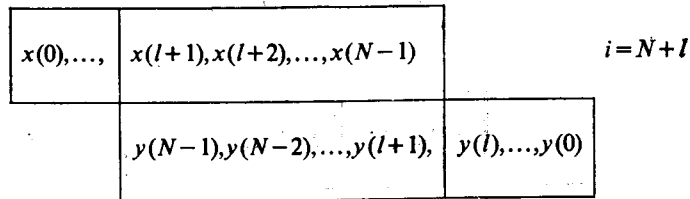
$$c_{xy}^t(k) = x(0)y(k) + x(1)y(k-1) + \dots + x(k)y(0)$$



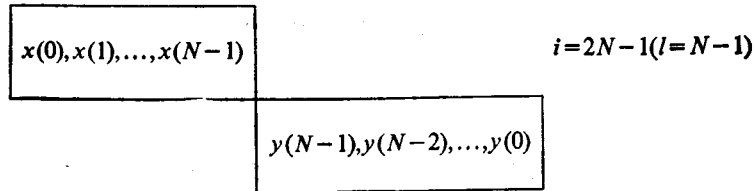
$$c_{xy}^t(N-1) = x(0)y(N-1) + x(1)y(N-2) + \dots + x(N-1)y(0)$$



$$c'_{xy}(N) = x(1)y(N-1) + x(2)y(N-2) + \dots + x(N-1)y(1)$$



$$c'_{xy}(N+l) = x(l+1)y(N-1) + x(l+2)y(N-2) + \dots + x(N-1)y(l+1)$$



$$c'_{xy}(2N-1) = 0$$

На свертку можно смотреть как на перестановку значений функции y в обратном порядке с последующим вычислением кросс-ковариации.

Наличие индекса l в формуле для *быстрой* свертки отражает тот факт, что появление быстрого преобразования Фурье очень ускорило вычисление дискретной свертки. Метод ее вычисления основан на *теореме о свертке* (входящей в теорию преобразования Фурье) и сводится к вычислению быстрого обратного преобразования Фурье произведения быстрых преобразований Фурье исходных последовательностей.

Для анализа данных временных рядов свертка имеет фундаментальное значение. Это связано в первую очередь с тем, что любая линейная система полностью характеризуется своей импульсной функцией отклика (см. гл. 1). Более того, отклик линейной системы при любом входе определяется сверткой с импульсной функ-

цией отклика. Поскольку цифровые фильтры представляют собой линейные системы, цифровую фильтрацию можно осуществлять при помощи свертки. В гл. 4 уже затрагивался вопрос о реализации нерекурсивных (ИКО) фильтров с помощью свертки.

Любую операцию сглаживания данных можно представлять как низкочастотную фильтрацию и осуществлять ее при помощи свертки. Скользящее усреднение, часто применяемое для сглаживания, задается формулой

$$\bar{x}(i) = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^M x(i-j), \quad i = M, M+1, \dots, N-M-1. \quad (7.5)$$

(Замечание: значения выражения (7.5) в первых M и последних M точках иногда определяются в предположении, что значения данных, лежащих вне отрезка $[0, N-1]$, равны 0.)

Отметим, что величину $\bar{x}(i)$ можно рассматривать как свертку последовательности $x(i)$ с константой $a(i) = (2M+1)^{-1}$ для всех i . Придерживаясь такого подхода, можно дать следующее обобщение операции скользящего усреднения:

$$\bar{x}(i) = T \sum_{j=-M}^M a(j) x(i-j), \quad (7.6)$$

где

$$T \sum_{j=-M}^M a(j) = 1.$$

В § 8.8 для операции, заданной формулой (7.5), будет получена частотная функция отклика; это позволит оценить недостатки такого усреднения.

Соотношение (7.6) приводит к свертке специального вида. Ее называют *симметричной сверткой* и определяют формулами

$$\begin{aligned} c_{ax}(i) &= T \sum_{j=-M}^M a(j) x(i-j) = \\ &= T a(0) x(i) + T \sum_{j=1}^M a(j) [x(i-j) + x(i+j)], \end{aligned} \quad (7.7)$$

где $i = 0, 1, \dots, N-1$ и

$$a(j) = a(-j), \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Значения данных, попадающих при суммировании по формуле (7.7) за пределы отрезка $[0, N-1]$, полагаются равными нулю. Это позволяет расширить область определения симметричной свертки на точки $i = -M, -(M-1), \dots$. Поэтому в качестве области определения можно взять множество

$$i = -M, -(M-1), \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1, N, N+1, \dots, N+M-1.$$

Вообще, если в свертке участвуют N_1 -точечная и N_2 -точечная функции, то результат свертки определяется на отрезке с $N_1 + N_2$ точками.

В гл. 8 нам встретится еще одно применение свертки. Оказывается, свертка в области частот позволяет получить такие модификации преобразований Фурье, которые ослабляют эффект утечки. Вообще говоря, свертка прочно вплетена в ткань большинства задач анализа цифровых временных рядов. Следует, впрочем, отметить, что свертка как объект интерпретации редко представляет самостоятельный интерес и, как правило, отдельно не вычисляется.

7.2. РАЗЛИЧИЯ МЕЖДУ КОВАРИАЦИЕЙ И СВЕРТКОЙ

Вычисление ковариации включает операцию усреднения, поскольку ковариация представляет собой среднее кросс-произведение. Операция свертки усреднения не требует. Так как дискретные варианты ковариации и свертки должны быть аналогами соответствующих интегралов, следует позаботиться о тех постоянных множителях, которые будут играть ту же роль, что и dt в интегралах. Для ковариации этот вопрос, в силу усреднения, решается автоматически, поскольку $T/(NT) = 1/N$. Что же касается дискретной свертки, то в ее уравнение приходится специально вводить T — величину интервала, с которым производится выборка.

Хотя оба кросс-произведения для свертки и ковариации выглядят почти одинаково, они имеют одно коренное отличие. Временной индекс со знаком минус для $y(i)$ в верхней строке формулы (7.4) соответствует перестановке значений в обратном порядке.

Таким образом, если при подходящем масштабном множителе переставить значения $y(i)$ в обратном порядке и вычислить ковариационную функцию двух временных последовательностей, то получится свертка этих временных последовательностей. Введем обозначение $y'(i) = y(-i)$ и запишем соответствующие уравнения:

$$s_{xy'}(i) = \begin{cases} \frac{1}{N-i} \sum_{p=0}^{N-1} x(p) y'(i+p), & \text{положительные запаздывания} \\ & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \frac{1}{N-i} c_{xy}^i(i), & i = N-1, N-2, \dots, 0, \end{cases}$$

$$s_{y'x}(i) = \begin{cases} \frac{1}{N-i} \sum_{p=0}^{N-1} y'(p) x(i+p), & \text{отрицательные запаздывания} \\ & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ \frac{1}{N-i} c_{xy}^i(i), & i = N, N+1, \dots, 2N-1. \end{cases}$$

Заметим, что получено выражение быстрой свертки, состоящее из двух частей, причем первое множество значений имеет обратный порядок, а второе — прямой. Кроме того, в отрицательные запаздывания не включен нуль, чтобы не повторялось значение свертки, расположенное в середине. Позднее, в § 7.5 будет показано, как упрощаются соответствующие выражения при переходе к круговой свертке с добавлением нулей.

7.3. ДЛИННЫЕ РЯДЫ И ОСНОВНАЯ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЦЕДУРА ДЛЯ КОВАРИАЦИИ

Уравнение ковариации обычно записывают отдельно для положительных и отрицательных запаздываний:

$$s_{xy}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{p=0}^{N-1} x(p) y(p+i), \quad s_{yx}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{p=0}^{N-1} y(p) x(p+i),$$

где $i = 0, 1, \dots, m$. Отметим, что нулевое запаздывание во второе уравнение можно не включать.

Выражение для ковариации хорошо приспособлено для расчетов при больших значениях N . Общий объем памяти, нужный для вычисления свертки, составляет $4(m+1)$ ячеек для исходных данных и $2(m+1)$ ячеек для накопления кросс-произведений. Резервируем четыре блока памяти по $m+1$ ячеек в каждом. Последовательность действий при вычислениях будет следующей.

1. Считывание $m+1$ начальных значений данных каждой из последовательностей $x(i)$ и $y(i)$ в два первых блока.
2. Накопление (т. е. суммирование) $m+1$ кросс-произведений для запаздывания 0, $m+1-1$ для запаздывания 1, ..., и, наконец, 1 для запаздывания m .
3. Считывание следующих $m+1$ значений данных в два оставшихся блока.
4. Накопление $m+1$ кросс-произведений для всех значений запаздывания.
5. Считывание следующих $m+1$ значений данных в первую пару блоков.
6. Накопление $m+1$ кросс-произведений для всех значений запаздывания.

7. Повторение шагов 3—6 до тех пор, пока не будет считан последний блок.

8. Накопление одного кросс-произведения для запаздывания 0, двух для запаздывания 1, ..., и, наконец, $m+1$ для запаздывания m .

9. Деление накопленных сумм кросс-произведений на $N-i$. Этим вычисления завершаются.

Однобитовое квантование или метод срезания экстремальных значений. Определим по стандартному гауссовскому процессу $x(t)$ с нулевым средним процесс

$$y(t) = \operatorname{sgn} x(t) = \begin{cases} 1, & x(t) \geq 0, \\ -1, & x(t) < 0. \end{cases}$$

Коэффициент корреляции $\rho_y(\tau)$ процесса $y(t)$, полученного срезанием экстремальных значений исходного процесса, связан с коэффициентом корреляции $\rho_x(\tau)$ процесса $x(t)$ соотношением

$$\rho_x(\tau) = \sin \left[\frac{\pi}{2} \rho_y(\tau) \right], \quad (7.8)$$

где $\rho_x(\tau)$ и $\rho_y(\tau)$ определяются отношениями

$$\rho_x(\tau) = \frac{s_x(\tau)}{s_x(0)}, \quad \rho_y(\tau) = \frac{s_y(\tau)}{s_y(0)}.$$

Вывод соотношения (7.8) можно найти в работе Уэйнреба (1963); теоретическим вопросам оценивания спектра посвящена работа Хинича (1967). Впрочем, начало исследований по этим вопросам следует отнести, согласно Кендаллу и Стюарту (1973), к 1898 г. Очевидно, однобитовое квантование сильно упрощает необходимые при умножениях операции и сводит их к присвоению единице знаков плюс и минус. Такое упрощение вычислений нередко приносит существенную выгоду.

С применением метода срезания для вычисления корреляций связаны определенные проблемы. Одной из таких проблем является, например, сохранение неизменной статистической точности. Чтобы обеспечить постоянную точность, приходится ускорение вычислений компенсировать за счет роста длины ряда. Как показал Уэйнреб (1963), срезанию сопутствует рост дисперсии оценки корреляционной функции примерно в 2.5 раза ($\approx \pi^2/4$). Эта дисперсия пропорциональна P , поэтому чтобы дисперсия оставалась постоянной, нужно увеличить длину ряда в два с половиной раза по сравнению с тем случаем, когда используется вся информация, содержащаяся в данных. В работе Хинича (1967) получено обобщение этого результата, позволяющее применить его для вычислений спектра. Как показывают теоретические результаты Хинича, наихудшим является случай широкополосных

данных (некоррелированных данных). Для узкополосных данных наблюдается меньший рост дисперсии. В типичных случаях упомянутый множитель роста уменьшается с 2.5 до 1.1. Это вполне объяснимо, так как узкополосные данные имеют большое сходство с синусоидой. Крайний случай—синусоида—дает при вычислении ковариации нулевую статистическую изменчивость.

Вообще говоря, столь незначительный рост длины рядов при срезании демонстрирует хорошо известный специалистам по те-

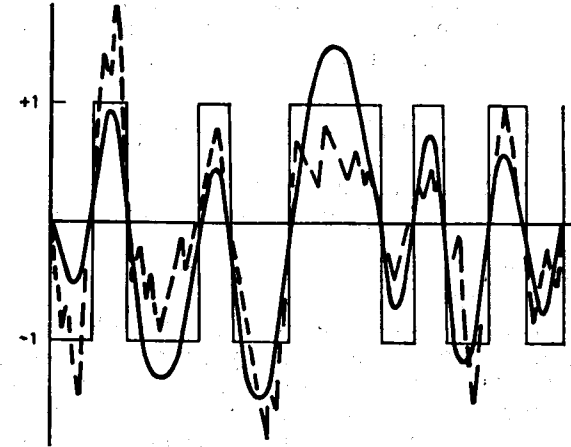


Рис. 7.1. Два временных ряда, имеющих одну и ту же версию, полученную методом срезания экстремальных значений.

ории случайных процессов факт: пересечения случайным процессом нулевого уровня несут огромное количество информации. Подчеркнем, что метод жесткого срезания применяется в трех случаях—гауссовского процесса, синусоиды и синусоиды, искаженной гауссовским шумом; для них справедливо соотношение (7.8). Заметим, что две функции (например, синусоида и ломаная), одинаково проходящие через нули, будут давать одну и ту же корреляционную функцию срезки (рис. 7.1). Поэтому, обращаясь к методу срезки для данных разных типов, следует проявлять определенную осторожность.

Методом жесткого срезания, как это вытекает из соотношения (7.8), можно получить непосредственно только нормированные корреляционные функции, поэтому для определения соответствующих масштабных множителей необходимо вычислять отдельно среднеквадратичное значение. Кроме того, при этом методе полностью исчезает возможность выявления нелинейных эффектов, из-за которых формы функций плотности вероятностей перестают отвечать гауссовскому случаю.

Сумма квадратов и метод четверти квадратов. В работе Шмида (1965) предложен технический прием, основанный на представлении произведения в виде суммы квадратов. В применении к нашим целям его способ дает возможность записывать кросс-произведения в виде линейной комбинации квадратов сомножителей

$$xy = \frac{1}{2} [(x+y)^2 - x^2 - y^2]. \quad (7.9)$$

Это соотношение очень похоже на достаточно широко известный метод «четверти квадратов», применяемый при построении аналоговых умножителей (Келли и др. (1966)). Работа этих устройств основана на соотношении

$$xy = \frac{1}{4} [(x+y)^2 - (x-y)^2]. \quad (7.10)$$

Приведенные соотношения используются в упр. 7.1 и 7.2, где с их помощью для ковариационных функций получена иная запись.

Использование таких соотношений имеет то преимущество, что у нас появляется возможность вычислять произведения с помощью таблицы, хранящейся в памяти ЭВМ. Таблица для квадратов двух множеств данных требует гораздо меньшего объема памяти, чем таблица для кросс-произведений того же числа данных. Если, например, при 10-битовом квантовании для таблицы всевозможных кросс-произведений потребовалось бы 2^{20} ячеек, то таблица для квадратов и сумм данных потребовала бы всего 2^{11} ячеек; разумеется, второй вариант более предпочтителен.

7.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОВАРИАЦИИ И СВЕРТКИ ПРИ ПОМОЩИ БПФ

Функции ковариации и свертки можно вычислять по функции плотности кросс-спектра. Такой подход основан на соотношениях Винера—Хинчина. Поскольку для вычисления спектра необходимо определить преобразование Фурье временной последовательности, обратившись к БПФ, можно получить корреляционные функции. Оказывается, такой обходной путь приводит к цели в 5—100 раз быстрее в зависимости от того, какова максимальная величина запаздывания. Получить значения ковариационной функции для N запаздываний можно почти так же быстро, как и для числа запаздываний m , значительно меньшего N . Сэнд (1965) весьма подробно рассмотрел особенности этой процедуры.

Основной метод. Суть основного метода вычисления автоковариации сводится к следующему.

1. Сначала вычисляется преобразование $X(k)$ для временного ряда $x(i)$ ($i, k=0, 1, \dots, N-1$).

2. После этого вычисляется «предварительный» спектр $\hat{S}_x(k) = (1/P) |X(k)|^2$.

3. Наконец, определяется автоковариационная функция

$$s_x(i) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{S}_x(k)],$$

где \mathcal{F}^{-1} —быстрое обратное преобразование Фурье.

С этой процедурой связан целый ряд вопросов. Часть из них будет рассмотрена в настоящем параграфе. Подробное описание

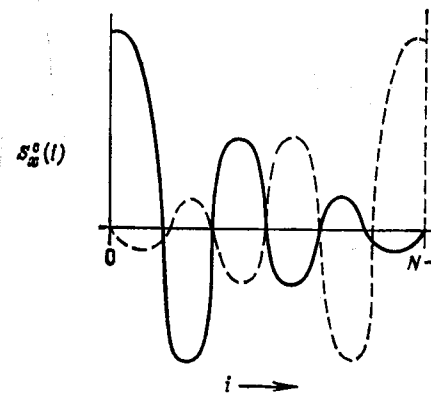


Рис. 7.2. Две части ковариационной функции, полученные без добавления нулей.

отдельных эффектов отложим до следующего параграфа. Все, что будет говориться о ковариационных функциях, в полной мере относится к тесно связанным с ними функциям свертки.

Начнем с наименее очевидной особенности предложенной процедуры. Как показал Сэнд (1965), обычно на 3-м шаге процедуры получается не ковариационная функция, а «круговая» автоковариационная функция $s_x^c(i)$, определяемая соотношением

$$s_x^c(i) = \frac{N-i}{N} s_x(i) + \frac{i}{N} s_x(N-i); \quad (7.11)$$

слагаемые правой части (без множителей) изображены на рис. 7.2.

Если к исходному ряду предварительно добавлять нули, то части круговой свертки будут расходиться. При добавлении N нулей они займут положение, показанное на рис. 7.3.

Последовательность действий процедуры нетрудно приспособить для вычисления некруговой ковариационной функции. Если исходная последовательность данных имеет число членов, равное степени 2, т. е. $N=2^p$, то значения такой функции для всех N

запаздываний можно получить, добавляя N нулей. Если число членов исходной последовательности не равно степени 2, то дополнение ряда N_z нулями до первой степени 2 даст N_z неискаженных ковариаций для начальных запаздываний. В случае необходимости длину последовательности еще раз увеличивают, добавляя 2^p нулей. Приведем последовательность действий вы-

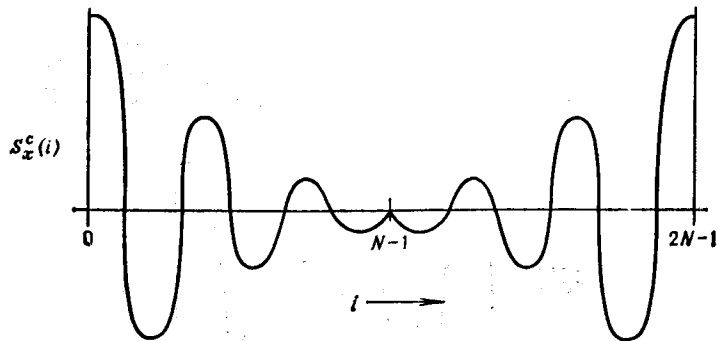


Рис. 7.3. Влияние добавления N нулей на круговую ковариационную функцию.

числения ковариационной функции, учитывающую рассмотренный эффект.

1. Исходный временной ряд $x'(i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, дополняется N нулями. Новую последовательность будем обозначать $x(i)$, $i=0, 1, \dots, 2N-1$.

2. Вычисляется $2N$ -точечное БПФ $X(k)$, $k=0, 1, \dots, 2N-1$.

3. Для $k=0, 1, \dots, 2N-1$ вычисляется «предварительный» спектр $\hat{S}_x(k) = (T/N) |X(k)|^2$.

4. Вычисляется быстрое обратное преобразование Фурье спектра $\hat{S}_x(k)$; чтобы получить правильные значения ковариации, первые N величин умножаются на $N/(N-i)$:

$$s_x(i) = \frac{N}{N-i} \mathcal{F}^{-1} [S_x(k)],$$

где $i=0, 1, \dots, N-1$.

Для ковариационных функций общего вида вычисления проводятся так же, как и для автоковариации. В этом случае аналогом соотношения (7.11) служит формула

$$s_{xy}^c(i) = \frac{N-i}{N} s_{xy}(i) + \frac{i}{N} s_{xy}(i).$$

Подробное изложение метода для вычисления ковариации и свертки. При вычислении ковариационной функции и функции свертки используется произведение двух преобразований Фурье.

Поэтому в отличие от основного метода БПФ вычисляется для двух рядов. Вычислительная процедура состоит из следующих шагов.

1. Ряд $x(i)$ запоминается в массиве, отведенном для действительных частей, а ряд $y(i)$ — для мнимых, т. е. $z(i) = x(i) + jy(i)$, где $i=0, 1, \dots, N-1$.

2. Вычисляется N -точечное быстрое преобразование Фурье ряда $z(i)$ (преобразование обозначим $Z^e(k)$):

$$Z^e(k) = \text{БПФ} [z(i)], \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

3. Величины $z(i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, считаются и умножаются на $W_{2N}^{i/2}$.

4. Вычисляется N -точечное БПФ последовательности $z(i)W_{2N}^{i/2}$ (обозначим это преобразование $Z^o(k)$):

$$Z^o(k) = \text{БПФ} [z(i)W_{2N}^{i/2}], \quad k=0, 1, \dots, N-1.$$

5. Полное $2N$ -точечное БПФ получается по формулам

$$Z(2k) = Z^e(k), \quad Z(2k+1) = Z^o(k),$$

где $k=0, 1, \dots, N-1$.

6. Для ковариационной функции вычисляется «предварительный» кросс-спектр ($k=0, 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} \tilde{S}_{xy}(k) &= \frac{1}{P} X^*(k) Y(k) = \\ &= \frac{1}{P} \left[\frac{Z(k) + Z^*(2N-k)}{2} \right]^* \left[\frac{Z(k) - Z^*(2N-k)}{2j} \right]. \end{aligned}$$

Для функции свертки вычисляется произведение двух преобразований Фурье ($k=0, 1, \dots, N$)

$$\begin{aligned} C_{xy}(k) &= X(k) Y(k) = \\ &= \left[\frac{Z(k) + Z^*(2N-k)}{2j} \right] \left[\frac{Z(k) - Z^*(2N-k)}{2j} \right]. \end{aligned}$$

7. Первая половина значений кросс-спектра — функции, симметричной по Эрмиту, — определяется формулами

$$\tilde{S}_{xy}(2k) = S_{xy}^e(k), \quad \tilde{S}_{xy}(2k+1) = S_{xy}^o(k),$$

где $k=0, 1, \dots, (N/2)-1$.

8. Используя обратное преобразование, введенное в гл. 6, для N -точечной некруговой свертки или для ковариационной функции, вычисляют величины

$$S'_{xy}(k) = \tilde{S}_{xy}(k) + \tilde{S}_{xy}^*(N-k) + j[\tilde{S}_{xy}(k) - \tilde{S}_{xy}^*(N-k)] W_{2N}^{-k/2},$$

где $k=0, 1, \dots, N-1$. Для экономии памяти вычисления необходимо проводить одновременно для k и $(N-k)$.

9. Вычисляется N -точечное быстрое обратное преобразование Фурье последовательности $S'_{xy}(k)$:

$$s'_{xy}(i) = \text{БПФ}^{-1} [S'_{xy}(k)], \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

10. На этом последнем шаге определяется $2N$ -точечная некруговая свертка или некруговая ковариационная функция:

$$s_{xy}(2i) = \frac{N}{N-i} \text{Re} [s'_{xy}(i)], \quad s_{xy}(2i+1) = \frac{N}{N-i} \text{Im} [s'_{xy}(i)].$$

Отметим, что расположение комплексных чисел при использовании программы на Фортране позволяет при вычислении $s_{xy}(i)$ избегать какого-либо переупорядочения в памяти ЭВМ.

Только что предложенный метод требует объема памяти, необходимого для запоминания входной последовательности. Этот метод можно упростить, дополняя последовательность данных нулями и используя прямое и обратное преобразования двойной длины. Однако это потребует больших затрат времени и памяти.

При добавлении в последовательности нулей можно расположить данные в ином порядке. Например, располагая данные в начале каждой последовательности, т. е.

$$x(0), x(1), \dots, x(N-1), 0(N), 0(N+1), \dots, 0(2N-1), \\ y(0), y(1), \dots, y(N-1), 0(N), 0(N+1), \dots, 0(2N-1),$$

для ковариации, вычисленной при помощи быстрых преобразований Фурье, получим последовательность

$$s_{xy}(0), s_{xy}(1), \dots, s_{xy}(N-1), s_{yx}(N), s_{yx}(N-1), \dots, s_{yx}(1).$$

Расположив те же данные так, чтобы последовательность x шла с начала, а последовательность y — с середины дополненной последовательности, т. е.

$$x(0), x(1), \dots, x(N-1), 0(N), 0(N+1), \dots, 0(2N+1), \\ 0(0), 0(1), \dots, 0(N-1), y(0), y(1), \dots, y(N-1),$$

получим для ковариации последовательность значений

$$s_{yx}(N), s_{yx}(N-1), \dots, s_{yx}(1), s_{xy}(0), s_{xy}(1), \dots, s_{xy}(N-1),$$

которая позволяет сразу получить ковариационные функции для i от $-N$ до $N-1$, поскольку $s_{yx}(i) = s_{xy}(-i)$.

Такого рода временные сдвиги можно получать циклической перестановкой в области частот, что достигается умножением $S_{xy}(k)$ на экспоненту

$$W_N^{kpN} = \exp \left[-j \frac{2\pi k}{N} (pN) \right] = \exp (-j2\pi kp),$$

где $p = i/N$ — доля общего числа запаздываний, для которых строится график. Если $p=1$ ($i=N$), то на графике сначала

откладываются значения $s_{xy}(i)$ для отрицательных запаздываний, а затем — значения для положительных запаздываний; величина $s_{xy}(0)$ при этом окажется в центре ($(N+1)$ -я точка). Если $p=0.1$, то сначала появятся $0.1N$ значений для отрицательных запаздываний, потом — все значения для положительных запаздываний, а за ними последуют оставшиеся $0.9N$ значений для отрицательных запаздываний. Величину $p=i/N$ следует выби-

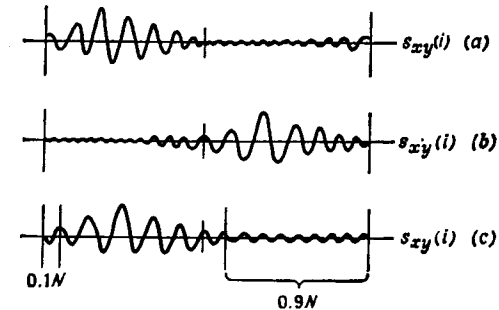


Рис. 7.4. Иллюстрация перестановки значений ковариационной функции для графического изображения. a — результаты в естественном порядке; b — после циклического сдвига на N точек (умножение $S_{xy}(k)$ на W_N^{-kN}); c — после циклического сдвига на $0.1N$ точек (умножение $S_{xy}(k)$ на $W_N^{-k*0.1N}$).

вать так чтобы она была целой. На рис. 7.4 и 7.5 показаны циклические перемещения значений ковариаций при $p=1$ и $p=0.1$.

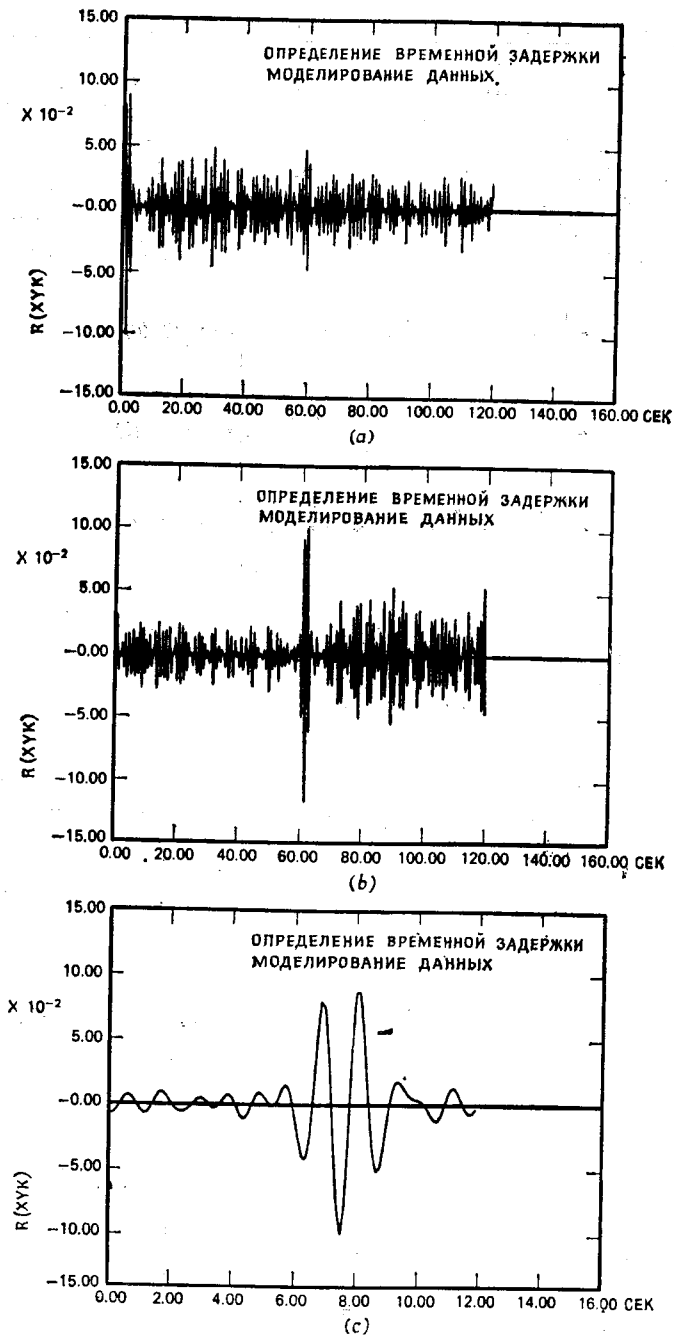
Вкратце способ получения свертки и ковариации при помощи преобразования Фурье можно сформулировать следующим образом.

Для свертки вычисления проводятся по формулам

$$c_{xy}(i) = T \sum_{p=0}^{N-1} x(p) y(p-i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ c_{xy}(i) = \text{БПФ}^{-1} [C_{xy}(k) = X(k) Y(k)],$$

а для ковариации — по формулам

$$s_{xy}(i) = \frac{1}{N-i} \sum_{p=0}^{N-i-1} x(p) y(p+i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \\ s_{xy}(i) = \begin{cases} \frac{N}{N-i} \text{БПФ}^{-1} \left[S_{xy}(k) = \frac{1}{p} X^*(k) Y(k) \right], & i = 0, 1, \dots, N-1, \\ \frac{N}{i-N} \text{БПФ}^{-1} \left[S_{xy}(k) = \frac{1}{p} X^*(k) Y(k) \right], & i = N+1, \dots, \\ & \dots, 2N-1. \end{cases}$$



7.5. Иллюстрация циклических сдвигов свертки. *a* — последовательность в естественном порядке; *b* — циклический сдвиг на N точек; *c* — циклический сдвиг на $0,1 N$ точек (первые $0,2 N$ точек графика).

В обоих случаях предполагается, что в конце временных последовательностей добавлены нули; это должно защищать от круговых эффектов, не позволяющих получать верные значения для быстрой ковариационной функции и свертки.

7.5. ЭФФЕКТЫ ПОДМЕНЫ И НАЛОЖЕНИЯ

В настоящее время, когда достигнуто полное понимание механизма возникновения кругового эффекта при вычислении свертки посредством БПФ, интересно вернуться к тому времени, когда с этим эффектом столкнулись впервые — при использовании аналоговых корреляционных анализаторов поворотного-барабанных типов. С их помощью получалась свертка вида

$$c_{xy}(i) = \sum_{p=0}^{N-1} x(p) y[(i-p) \bmod N], \quad i=0, 1, \dots, N-1, \quad (7.12)$$

где запись $(i-p) \bmod N$ означает, что значение индекса $(i-p)$ берется по модулю N (т. е. представляет собой остаток деления $(i-p)$ на N). Свертка (7.12) включает в себя быструю свертку $c_{xy}^l(i)$; оставшуюся часть суммы назовем круговой частью свертки (7.12) и обозначим $c_{xy}^c(i)$ ¹. Теперь свертку (7.12) можно записать в виде

$$c_{xy}(i) = c_{xy}^l(i) + c_{xy}^c(i), \quad i=0, 1, \dots, N-1, \quad (7.13)$$

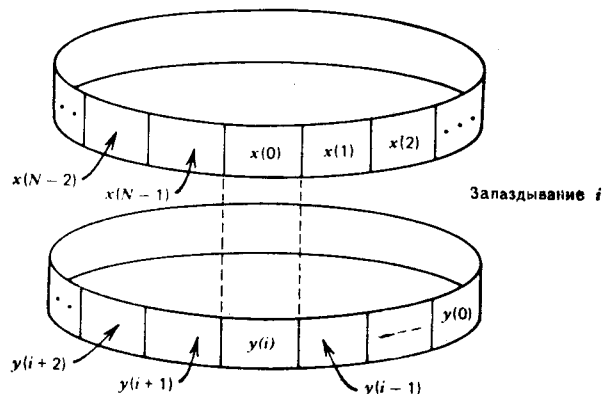
т. е.

$$c_{xy}(i) = \sum_{p=0}^i x(p) y(i-p) + \sum_{p=0}^{N-i-2} x(p+i+1) y(N-p-1),$$

где $i=0, 1, \dots, N-1$.

Поясним, почему свертку $c_{xy}^c(i)$ называют круговой. Мысленно можно представлять себе, что данные, по которым вычисляется свертка (7.12), расположены на барабанах. С подобной ситуацией мы уже встречались в гл. 1. Расположение данных на барабанах

¹ Заметим, что $c_{xy}^c(i) = c_{xy}^l(N+i)$; это видно из формулы (7.4) при $T=1$. — Прим. перев.



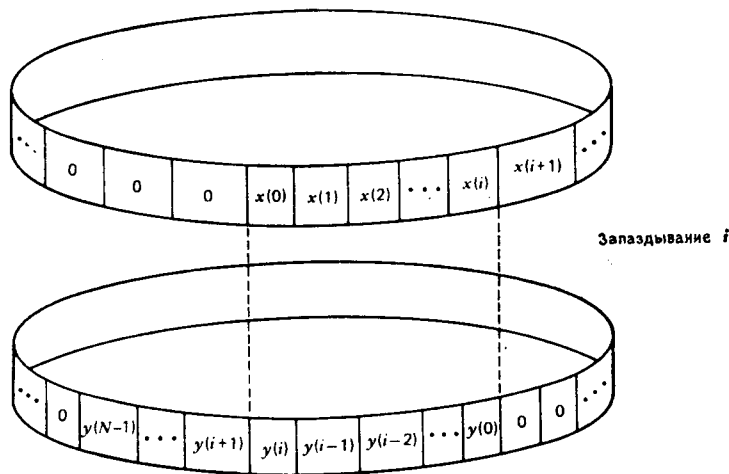
нагляднее показывает, как сумма (7.13) разбивается на сегменты

$$x(0)y(i) + x(1)y(i-1) + \dots + x(i)y(0)$$

и

$$x(i+1)y(N-1) + \dots + x(N-1)y(i+1).$$

От кругового эффекта можно избавиться, определяя две новые временные последовательности. Эти последовательности в отличие от исходных дополняются N нулями каждая. Свертка (7.12) для таких $2N$ -точечных последовательностей будет иметь в разложении (7.13) нулевую круговую часть. Проиллюстрируем этот эффект диаграммой



Как отмечалось в гл. 6, для функций в области частот добавление нулей эквивалентно интерполяции рядами Фурье (гар-

монической интерполяции). Поэтому при попытке определить свертку через функции в частотной области, значения которых предварительно должным образом не интерполируются, будет возникать круговой эффект и появятся искажения результатов. Мы еще коснемся вкратце этого вопроса.

Переходя к вопросу о соотношении свертки и корреляции, сделаем два замечания, касающихся временного индекса. Предположим, что ряды имеют нечетное число членов, равное $2M + 1$, где M — четное число, и нулевому значению временного индекса соответствуют значения рядов, расположенные посередине; таким образом, ряды $x(i)$ и $y(i)$ определены для $i = -M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M$. После перестановки членов ряда $y(i)$ в обратном порядке положительные и отрицательные запаздывания для корреляции обретают следующий смысл:

$$x(-M), \dots, x(-1), x(0), x(1), \dots, x(M)$$

$$y(M), \dots, y(1), y(0), y(-1), \dots, y(-M)$$

- ⊕ $x(-M)y(M) + \dots + x(-1)y(1) + x(0)y(0) + x(1)y(-1) + \dots + x(M)y(-M)$ Зап. 0
- ⊕ $x(-M+1)y(M) + \dots + x(-1)y(2) + x(0)y(1) + x(1)y(0) + \dots + x(M)y(-M+1)$ Зап. 1
- ⊖ $x(-M)y(M-1) + \dots + x(-1)y(0) + x(0)y(-1) + x(1)y(-2) + \dots + x(M-1)y(-M)$
- ⊕ $x(-M+k)y(M) + \dots + x(-1)y(k+1) + x(0)y(k) + x(1)y(k-1) + \dots + x(M)y(-M+k)$ Зап. k
- ⊖ $x(-M)y(M-k) + \dots + x(-1)y(-k+1) + x(0)y(-k) + x(1)y(-k-1) + \dots + x(M-k)y(-M)$

Таким образом, получаются значения свертки (после умножения на T)

$$c_{xy}^t(i) = T \sum_{p=-M+i}^M x(p)y(i-p), \quad i = 0, 1, \dots, 2M,$$

$$c_{xy}^t(i) = T \sum_{p=-M}^{M+i} x(p)y(i-p), \quad i = -1, -2, \dots, -2M.$$

Наоборот, если рассматривать свертку как ковариацию ряда $x(i)$ с обращенной во времени версией ряда $y(i)$, то для рядов $x(i)$ и $y(i)$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, получим соотношения

$$y(N-i) = z(i),$$

$$Ns_{xz}^t(i) = \sum_{p=0}^{N-i-1} x(p)z(p+i), \quad i = -N, \dots, -1, 0, 1, \dots, N-1,$$

$$s_{xz}^t(i) = s_{xz}^t(i) + s_{xz}^t(N-i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (7.14)$$

В этом случае отрицательным запаздываниям для ковариации соответствуют положительные запаздывания для свертки. Как следует из формулы (7.14), для круговой свертки получаются

два слагаемых, причем первым N значениям свертки соответствуют обращенные во времени положительные запаздывания для ковариации. Если соотношение (7.14) записать для свертки, то получится сумма

$$c_{xy}(i-1) = c'_{xy}(N-i-1) + c''_{xy}(i-1), \quad i=1, 2, \dots, N,$$

где

$$\begin{aligned} c'_{xy}(N-i-1) &= Ns'_{xz}(i), \quad i=1, \dots, N-1, \\ c''_{xy}(i-1) &= Ns'_{xz}(N-i), \quad i=1, 2, \dots, N, \end{aligned}$$

причем для $i=N$

$$c'_{xy}(-1) = Ns'_{xz}(N) = 0.$$

Итак, кросс-корреляция $x(i)$ с обращенной во времени версией $y(i)$ дает свертку $c_{xy}(i)$, сдвинутую на одну позицию.

Наложение как подмена. При определении значений свертки (или ковариации) получается временная последовательность, содержащая $2N$ точек; эта последовательность получается из N -точечной временной последовательности. Из теоремы о выборке для функций в области частот вытекает, что подмены можно избежать, если интервал, с которым производится выборка, равен

$$b' = \frac{1}{2NT}.$$

Однако преобразования Фурье $x(i)$ и $y(i)$ дают вдвое большее значение

$$b = 2b' = \frac{1}{NT}.$$

Поэтому при вычислении для функции свертки обратного преобразования Фурье произведения

$$C_{xy}(k) = X(k)Y(k)$$

возникнет явление подмены. Этот эффект аналогичен подмене частот, рассмотренной раньше; роль частот во временной области играют суммы интервалов времени длины T . Можно показать, что ошибка, связанная с подменой во временной области, оказывается точно такой же, как ошибка, обусловленная наложением.

В этом случае имеется один выход — получить преобразования $X(k)$ и $Y(k)$ в точках, разделенных вдвое меньшим интервалом b' . Поэтому нужно либо получить недостающие значения преобразований Фурье интерполяцией, либо, что эквивалентно, до вычисления преобразований дополнить нулями последовательности $x(i)$ и $y(i)$. Отметим, что значения функции $C_{xy}(k)$ интер-

полировать в данном случае нельзя, поскольку

$$(X \widetilde{Y})(k) \neq \widetilde{X}(k) \widetilde{Y}(k),$$

где тильдой обозначены значения, полученные интерполяцией.

Фильтрация посредством свертки. Первый фильтр, с которым мы встретились в этой книге, имел вид свертки. В непрерывном случае отклик $y(t)$ линейной системы (фильтра) для всякого входа $x(t)$ определенного вида задается интегралом свертки

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau,$$

где $h(\tau)$ — импульсная функция отклика линейной системы с постоянными параметрами.

Конечным дискретным аналогом такого интеграла служит свертка

$$y^c(i) = T \sum_{p=0}^{N-1} x(p) h[(i-p) \bmod N], \quad i=0, 1, \dots, N-1,$$

которую мы называем «круговой». Как правило, предпочтение отдается другой свертке, а именно «быстрой» свертке, определенной соотношениями (7.4).

Одним из способов получения свертки (7.4) служит метод дополнения исходных последовательностей N нулями. При этом все $2N$ значений свертки $y^c(i)$ и $y(i)$ одинаковы. Такой подход требует, по существу, вдвое большего времени для вычислений. Кроме того, требуется вдвое больший объем памяти. Время вычислений и необходимый объем памяти можно сократить, применив специальные приемы, рассмотренные в гл. 6. Если имеется комплексная последовательность $z(i)$, $i=0, 1, \dots, N-1$, для которой мы хотим получить быстрое преобразование Фурье, соответствующее последовательности $x(i)$ длины $2N$ (дополненной), вся вторая половина которой суть нули, то

$$\begin{aligned} Z(2k) &= \text{БПФ} \{z(i)\}, \\ Z(2k+1) &= \text{БПФ} \{z(i) W_N^{i/2}\}, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Далее, как показано в гл. 6, последовательность $y(i)$, $i=0, 1, \dots, 2N-1$, можно получить N -точечным обратным БПФ последовательности

$$U(k) = [V(k) + V^*(N-k)] + j[V(k) - V^*(N-k)] W_N^{-k/2},$$

где $k=0, 1, \dots, N-1$, и

$$V(k) = X(k)H(k), \quad k=0, 1, \dots, N-1,$$

а преобразования $X(k)$ и $H(k)$ получены расщеплением преобразования $Z(k)$, определенного соотношением

$$Z(k) = \text{БПФ}[z(i) = x(i) + jh(i)], \quad k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Окончательный результат, т. е. последовательность $y(i)$, получается как чередование действительных частей $u(i)$, дающих члены последовательности с четными индексами, и мнимых частей $v(i)$, дающих члены с нечетными индексами. Иначе говоря,

$$\begin{aligned} y(2i) &= \text{Re БПФ}^{-1}[U(k)], \\ y(2i+1) &= \text{Im БПФ}^{-1}[U(k)], \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $y(i)$ можно получить при помощи трех (комплексных) N -точечных БПФ вместо двух $2N$ -точечных (комплексных) БПФ. Поскольку число арифметических операций (при $N = 2^p$) пропорционально величине $N \log_2 N$, то, как показывает отношение

$$\frac{3N \log_2 N}{2 \times 2N \log_2 2N} = \frac{3p}{4(p+1)},$$

время вычислений сокращается примерно на четверть; необходимый объем памяти сокращается вдвое.

В гл. 3. были рассмотрены методы реализации фильтров с импульсными функциями отклика, имевшими конечные носители. Для таких фильтров метод, в котором используются БПФ и теорема о свертке, обычно оказывается с вычислительной точки зрения довольно выгодным. Граница, определяющая выбор одного из методов (прямого или использующего БПФ), лежит между значениями числа точек носителя импульсной функции отклика, равными 50 и 100¹⁾. К такому заключению приводят следующие соображения.

Число операций, необходимое для прямого метода вычисления быстрой свертки по формулам (7.4), равно

$$N_d = 2(1 + 2 + 3 + \dots + N) = 2 \frac{N(N+1)}{2} = N(N+1).$$

Число операций, которое требуется в методе, использующем БПФ, равно (предполагается, что $N = 2^p$; на каждое БПФ уходит по $4Nr$ операций)

$$N_{\text{БПФ}} = \underbrace{2(4Nr)}_{\substack{\text{1 комплексное БПФ} \\ \text{плюс 1 дополни-} \\ \text{тельное БПФ для} \\ \text{интерполяции зна-} \\ \text{чений}}} + \underbrace{4Nr}_{\substack{\text{1 обратное БПФ} \\ \text{при вычислении} \\ \text{которого применя-} \\ \text{ется специальный} \\ \text{метод}}} = 12Nr.$$

¹⁾ Без предварительной децимации.

Здесь не учтены операции, необходимые при вычислении произведения преобразований, а также дополнительные операции, входящие в специальное обратное преобразование. Пренебрегая ими, получим отношение

$$\frac{N_d}{N_{\text{БПФ}}} = \frac{N(N+1)}{12Nr} = \frac{N+1}{12r}.$$

При $N = 2^7 = 128$ это отношение больше единицы, так как

$$\frac{N_d}{N_{\text{БПФ}}} = \frac{129}{84} > 1;$$

при $N = 2^6 = 64$ это отношение меньше единицы:

$$\frac{N_d}{N_{\text{БПФ}}} = \frac{65}{72} < 1.$$

Конкретное число необходимых для вычислений операций в определенной степени зависит от метода программирования, поэтому сделанный выше вывод о границах применимости методов вычислений требует определенных поправок. Кроме того, отдельные операции, которые требуются в методе, использующем БПФ, мы не учитывали. Тем не менее указанные границы служат хорошим ориентиром.

Для «короткой» импульсной функции отклика и временной последовательности, имеющей произвольно большую длину, можно применить метод, известный под названием «перекрывание при сложении». Можно показать (см. Стокхэм (1966)), что, разбивая последовательность $x(i)$ на сегменты длины, равной длине $h(i)$, и используя только что рассмотренный метод вычисления, можно получить точную свертку $x(i)$ и $h(i)$, запоминая каждый раз последнюю половину получающихся сегментов последовательности $y(i)$ и прибавляя их (поточечно) к первой половине следующего полученного сегмента $y(i)$. Эта процедура, схематически показанная на рис. 7.6, оказывается очень практичным и полезным методом фильтрации посредством свертки. Разумеется, было бы чрезвычайно неудобно ограничиваться только теми последовательностями, длина которых лимитируется объемом быстродействующего запоминающего устройства на сердечниках. Очевидно, что в методе «перекрывания при сложении» вычисление БПФ импульсной функции отклика нужно проводить только один раз. В результате отношение, характеризующее скорость вычислений, примет вид

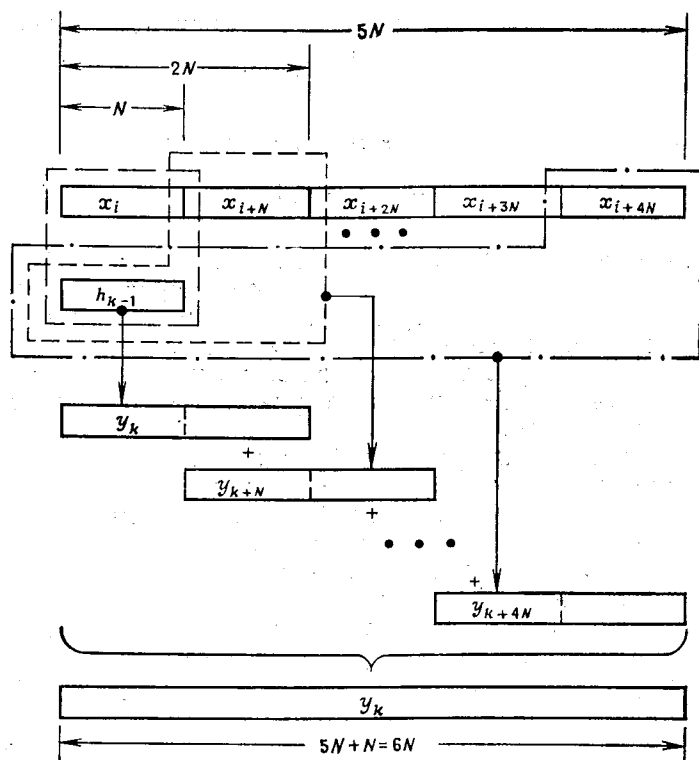
$$\frac{N_d}{N_{\text{БПФ}}} = \frac{N+1}{8r},$$

поскольку одно прямое БПФ теперь не нужно.

Для уже рассматривавшегося случая $N = 2^6 = 64$ это отношение станет равным

$$\frac{N_d}{N_{\text{БПФ}}} = \frac{65}{48},$$

поэтому нижняя граница для метода с БПФ уходит, пожалуй, даже левее значения 50.



7.6. Иллюстрация метода перекрытия при сложении для фильтрации посредством свертки на примере последовательности x , длина которой в шесть раз превосходит длину h .

7.6. КАК ВЫЧИСЛЯТЬ ФУНКЦИИ КОВАРИАЦИИ И СВЕРТКИ

Длина записи и число запаздываний для корреляционной функции. Привести какие-либо точные количественные оценки точности ковариационных функций для данных, включающих шум, чрезвычайно сложно. Ситуация здесь прямо противоположна той, которая возникает для функций плотности спектра; там нужные количественные оценки получают относительно

просто. Причина в том, что значения ковариационных функций во временной области сильно коррелированы (исключение составляет чистый белый шум), в то время как значения спектра мощности от точки к точке почти не коррелируют. Всякая попытка получить какие-то статистические результаты, относящиеся к ковариационной функции, неизбежно приводит к тому, что результат содержит истинную функцию ковариации, т. е. нужно а priori знать результат, который пытаются оценить.

Для отдельной точки корреляционной функции можно воспользоваться весьма полезным результатом, в котором фигурирует преобразование, известное в статистике как «Z-преобразование Фишера». Так называют преобразование, осуществляемое посредством функции, обратной гиперболическому тангенсу. Можно показать, что значения этого преобразования на величинах $\hat{r}(i)$, т. е.

$$\hat{z} = \text{arth}[\hat{r}(i)] = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \hat{r}(i)}{1 - \hat{r}(i)},$$

приближенно имеют нормальное распределение со средним

$$\mu_z = \text{arth}[\rho(i)]$$

и дисперсией

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{N-2-i}.$$

Следовательно, для отдельных значений корреляционных функций можно строить доверительные границы. К сожалению, для всего множества значений оцениваемой функции эти границы оказываются неверными.

В практических ситуациях рекомендуется избегать значений корреляционной функции для запаздываний $i \geq 0.5N$ (см. по этому поводу работу Акайка (1962)). Показать, что поведение корреляционной функции при больших запаздываниях неустойчиво, довольно нетрудно. Что же касается других запаздываний, то нужно следовать хорошему правилу — не вычислять значений корреляционных функций для запаздываний, превышающих 10% длины всего ряда, т. е. вычислять корреляционные функции для $i \leq 0.1N$. Поскольку в большинстве случаев корреляционные функции используются для определения времени относительного сдвига двух рядов, следует позаботиться о том, чтобы длина ряда была по крайней мере в 10 раз больше ожидаемого значения относительного сдвига.

7.7. ОБЛАСТЬ ИМПУЛЬСНОГО ОТКЛИКА И ПОЛОСА ЧАСТОТ ПРИ ФИЛЬТРАЦИИ ПОСРЕДСТВОМ СВЕРТКИ

Для фильтрации посредством свертки существуют два метода, в которых используется БПФ.

Первый метод. Временная последовательность $x(i)$ и импульсный отклик $h(i)$.

1. Вводится импульсный отклик $h(i)$. Если это необходимо, то область импульсного отклика, содержащую M_1 точек, расширяют за счет добавления нулей таким образом, чтобы новое число точек M стало равным степени 2, т. е. $M = 2^p$. Затем добавляют еще M нулей и вычисляют $2M$ -точечное БПФ. Поскольку $h(i)$ — последовательность действительных значений, результат однозначно определяется $M+1$ значениями преобразования (остальные значения будут комплексно-сопряженными). Введем для полученного преобразования обозначение $H(k)$.

2. Считываются M значений ряда $x(i)$. К ним добавляются еще M нулевых значений, после чего вычисляется $2M$ -точечное БПФ. Как и в п. 1, запоминаются только $M+1$ значений результата. Последовательность этих значений обозначим $X^l(k)$.

3. Вычисляется произведение $H(k)X^l(k) = Y^l(k)$.

4. После получения $M-1$ комплексно-сопряженных значений вычисляется обратное $2M$ -точечное БПФ для $Y^l(k)$. Эти значения образуют последовательность $y^l(i)$.

5. Полученная временная последовательность действительных величин $y^l(i)$ содержит $2M$ членов. Первые M из них становятся первыми M величинами выходной временной последовательности $y(i)$. Вторая половина значений, содержащая M значений, запоминается.

6. Повторяются шаги 2—4. Новую последовательность обозначим $y^l(i)$. Следующие M значений выхода $y(i)$ получают почленным сложением первых M значений новой последовательности $y^l(i)$ с M значениями последовательности $y^{l-1}(i)$, находящейся в памяти. Вторая половина значений новой последовательности $y^l(i)$ запоминается.

7. Шестой шаг повторяется до тех пор, пока на вход не поступит последняя часть входной последовательности $x(i)$. Если число членов в последней части меньше M , то длину последовательности увеличивают до M , считая недостающие значения нулями. Повторяются шаги 2—4; в результате получается завершающая часть последовательности $y^l(i)$. Первые M значений этой последовательности почленно складываются со значениями $y^{l-1}(i)$, находящимися в памяти. Остальные M значений последовательности непосредственно подаются на выход; этим завершаются вычисления.

Отметим, что число точек области импульсного отклика, равное M_1 , накладывает известные ограничения на действие фильтра. Именно, ширина эффективной полосы частот фильтра, которую обозначим B_e , ограничена снизу:

$$B_e \geq \frac{1}{M_1 T}$$

На практике величина B_e может оказаться значительно больше; вычислительная полоса b равна

$$b = \frac{1}{M_1 T}$$

Второй метод. Временная последовательность $x(i)$ и частотный отклик $H(k)$.

Метод, который используется в этом случае, полностью аналогичен методу, рассмотренному в первом случае. Исключение составляет только первый шаг, поскольку $H(k)$ задается непосредственно. (Если значения $H(k)$ заданы через коэффициент усиления и фазу, то предварительно их выражают через действительную и мнимую части. Если фазы отсутствуют, то их полагают равными нулю.)

Остановимся на некоторых требованиях, предъявляемых к последовательности $H(k)$.

1. Эта последовательность должна содержать $M+1$ значений. Если число значений M_1 меньше M , то последовательность дополняется нулями таким образом, чтобы число ее членов оказалось равным $M+1$ (где M — наименьшая степень 2, превосходящая M_1).

2. Преобразование отрезков последовательности $x(i)$, содержащих M значений ($P = MT$), дополняется нулями, поэтому интервал в области частот оказывается равным

$$b = \frac{1}{2P} = \frac{1}{2MT} = \frac{S}{2M} = \frac{F}{M}$$

где S — скорость выборки, а F — частота Найквиста.

3. Всякая последовательность $H(k)$, предназначенная для фильтрации, должна быть определена в частотах, разделенных интервалом длины $b = F/M = S/(2M)$.

4. Более того, всякая используемая для этой цели последовательность $H(k)$, $k=0, 1, \dots, M$, должна представлять собой дискретное преобразование; значения этого преобразования, имеющие нечетные индексы, совпадают с теми интерполированными значениями, которые получаются при вычислении преобразования для M -точечной последовательности значений данных, дополненной M нулями. Сопоставьте это преобразование с обычным M -точечным преобразованием действительной последо-

вательности M значений, дающим последовательность M величин, $M/2 - 1$ из которых повторяют значения, уже имеющиеся в преобразовании. Таким образом, в обычном случае частоты разделяются интервалом длины $b = F/(M/2) = 2F/M = S/M$.

Обращаясь к фильтрации посредством свертки с функцией, определенной в частотной области, основное внимание следует уделять последнему п. 4. Интерполированные значения можно получать при помощи процедуры «обратной децимации», рассмотренной в § 5 гл. 5. Эти значения можно получить и иначе: сначала вычислить обратное преобразование Фурье, затем дополнить полученную последовательность нулями и вычислить преобразование Фурье для новой последовательности. Если не обеспечивать требований 2—4 (т. е. не подгонять к нужному значению разрешение b), то при фильтрации возникнут сильные ошибки и искажения.

7.8. НОРМИРОВКА И УДАЛЕНИЕ СРЕДНЕГО ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ КОВАРИАЦИЙ

При вычислении ковариаций нормировка может осуществляться так, что она послужит причиной явных парадоксов. Для нормировки можно пользоваться значениями соответствующих выборочных автокорреляционных функций для нулевых смещений, поскольку

$$s_x(0) = s_x^2, \quad s_y(0) = s_y^2.$$

В этом случае корреляционную функцию можно записать в виде

$$r_{xy}(i) = \frac{s_{xy}(i)}{\sqrt{s_x(0)s_y(0)}}, \quad i = 0, 1, \dots, m.$$

Представим, что по недосмотру для временных последовательностей не было проведено удаление средних. В этом случае для нулевых запаздываний автоковариационных функций будут получены значения

$$s_x(0) = s_x^2 + \bar{x}^2, \quad s_y(0) = s_y^2 + \bar{y}^2,$$

которые внесут при нормировке ошибку.

Рассмотрим, какие эффекты связаны с удалением среднего и нормировкой. Допустим, что

$$x(i) = \Delta x(i) + \bar{x}, \quad y(i) = \Delta y(i) + \bar{y}.$$

Тогда ковариационную функцию можно записать в виде

$$\begin{aligned} s_{xy}(i) &= \frac{1}{N-i} \left[\sum_{p=0}^{N-i-1} \Delta x(p) \Delta y(p+i) + \bar{y} \sum_{p=0}^{N-i-1} \Delta x(p) + \right. \\ &\quad \left. + \bar{x} \sum_{p=0}^{N-i-1} \Delta y(p+i) + (N-i) \bar{x} \bar{y} \right] = \\ &= \hat{\text{cov}}(x, y) + \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \overline{\Delta x}_i + \bar{y} \overline{\Delta y}_i, \end{aligned}$$

где $\overline{\Delta x}_i$ и $\overline{\Delta y}_i$ обозначают выборочные средние первых и последних $N-i$ значений соответствующих временных последовательностей с удаленными средними. После нормировки получим корреляционную функцию

$$\begin{aligned} r_{xy}(i) &= \frac{s_{xy}(i)}{\sqrt{s_{xx}(0)s_{yy}(0)}} = \frac{\hat{\text{cov}}(x, y) + \bar{x} \bar{y} + \bar{x} \overline{\Delta x}_i + \bar{y} \overline{\Delta y}_i}{\sqrt{(s_x^2 + \bar{x}^2)(s_y^2 + \bar{y}^2)}} = \\ &= \frac{\hat{\text{cov}}(x, y)}{s_x s_y} \frac{1}{A} + \frac{\bar{x} \bar{y}}{s_x s_y} \frac{1}{A} + K, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{\hat{\text{cov}}(x, y)}{s_x s_y} = r_{xy}(i) A - \frac{\bar{x} \bar{y}}{s_x s_y} = KA.$$

Величина A всегда меньше единицы, следовательно, данные с удаленным средним дают меньшее значение корреляции. Если средние имеют одинаковые знаки, то корреляция данных с удаленным средним окажется еще меньше. Но если средние имеют разные знаки, то смещение может пойти в другом направлении. Вообще говоря, кросс-корреляция временных последовательностей, из значений которых не удалены средние, может достигать произвольно больших величин. Однако если знаки выборочных средних противоположны, то это оказывается несправедливым утверждением.

При нормировке с помощью дисперсий, вычисленных на меньшем числе данных, о характере поведения кросс-корреляции никаких определенных выводов сделать нельзя. Выборочные дисперсии, вычисленные на укороченных отрезках последовательности данных, могут оказаться и больше, и меньше значения автокорреляционной функции при нулевом запаздывании.

7.9. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОВАРИАЦИИ И СВЕРТКИ

Определение временных задержек. В приложениях наиболее удобна такая нормировка кросс-корреляционных функций, при которой их значения по абсолютной величине не превосходят

единицы. Почти все приложения кросс-корреляционных функций тем или иным образом сводятся к определению временных задержек. Что же касается автокорреляционных функций, то когда мы имеем дело с приложениями, более удобными оказываются их аналоги для области частот — функции плотности спектра мощности.

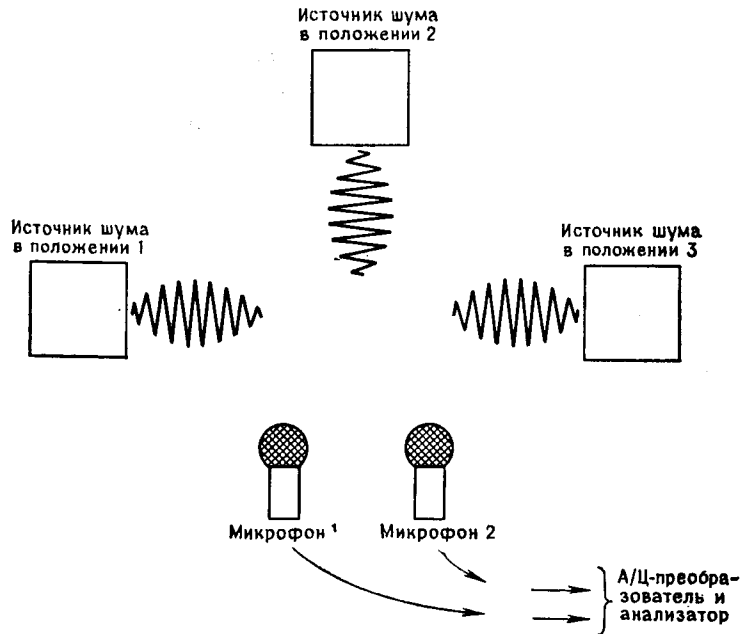


Рис. 7.7. Схема эксперимента для определения кросс-корреляций акустических источников.

Применение кросс-корреляционной функции мы проиллюстрируем на примере обнаружения источников шума. Проведем эксперимент, в котором источник шума располагается в трех различных положениях относительно пары микрофонов (рис. 7.7). Три соответствующие кросс-корреляционные функции приведены на рис. 7.8. Нетрудно видеть, что при расположении источника шума слева от микрофонов сигнал $x(t)$ опережает сигнал $y(t)$; среднему положению источника соответствует всплеск, по существу, при нулевой задержке; при расположении источника справа сигнал $y(t)$ опережает $x(t)$, на что указывает пик при отрицательном запаздывании. Учитывая, что скорость звука в данном случае равна 1100 фут/с и микрофоны установлены на расстоянии примерно 1 фут, можно прикинуть, что время задержек должно быть равно примерно 1 мкс. В данном случае

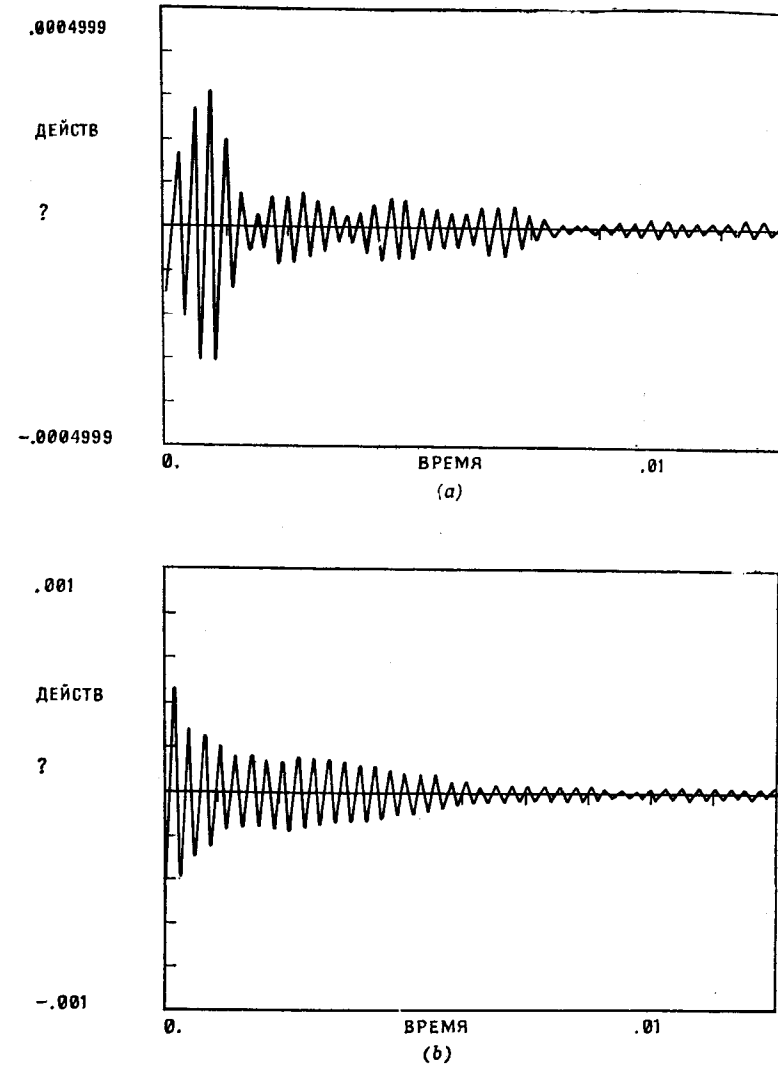


Рис. 7.8. Три кросс-корреляционные функции, полученные для трех положений источников шума. a — источник шума слева от микрофона 1; b — источник шума между микрофонами; c — источник шума справа от микрофона 2.

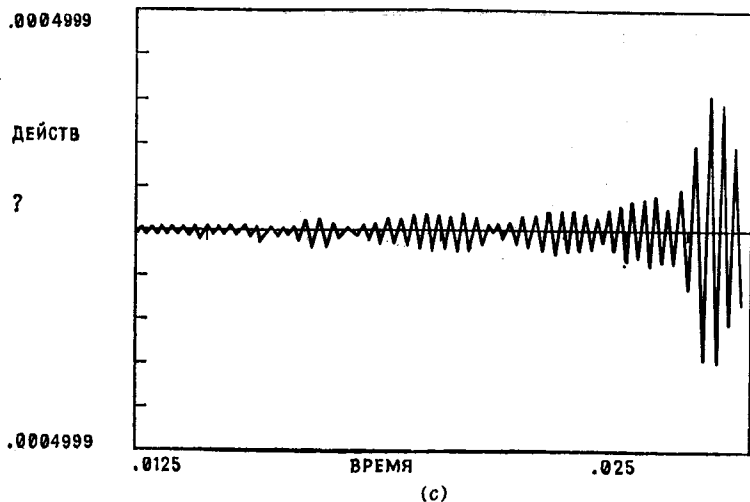


Рис. 7.8. Продолжение.

$S = 50\,000$ выб./с и $T = 0.020$ мкс, поэтому максимальные значения кросс-корреляции должны появляться при $i = 50$; с этим значением хорошо увязан объем выборки (вспомним рекомендацию, по которой N должно выбираться так, чтобы $i \leq 0.1N$).

Моделирование отклика линейных систем (фильтрации посредством свертки). Если мы можем оценивать функцию частотного отклика чувствительных линейных систем (к ним можно отнести большинство структур), то мы имеем возможность с достаточной степенью точности моделировать отклик таких систем. Предположим, что $\hat{H}_{xy}(k)$ — оценка частотного отклика и $x(i)$ — входной сигнал, для которого нужно определить отклик системы. Тогда оценкой отклика служит последовательность ($i = 0, 1, \dots, N-1$)

$$\hat{y}(i) = \mathcal{F}^{-1}[X(k) \hat{H}_{xy}(k)] \quad (7.15)$$

(предполагается, что против возможного кругового эффекта приняты соответствующие меры). Определение величин по формуле (7.15) эквивалентно свертке

$$\hat{y}(i) = T \sum_{p=0}^{N-1} x(p) h(p-i), \quad i = 0, 1, \dots, N-1, \quad (7.16)$$

где индекс $(p-i)$ берется по модулю N .

В структурном анализе непрерывный аналог свертки (7.16) обычно называют интегралом Дюамеля.

Моделирование такого рода представляет интерес во многих приложениях. Предположим, что имеется укрытие для чувствительного электронного оборудования радарной станции. Далее, допустим, что мы можем определить функции частотного отклика при воздействии извне.

Рассмотрим задачу о «прочности», в которой требуется определить, что произойдет внутри укрытия, если его наружная часть подвергается повышенному атмосферному давлению в результате воздушного взрыва, как это происходит при близком разрыве бомбы. Имея в распоряжении типичную временную последовательность для ожидаемой при взрыве бомбы ударной волны, можно оценить отклик при помощи формулы (7.15). Полнее с затронутым вопросом читатель может ознакомиться по работам Кеннеди и Сэффорда (1974) и Масри и Сэффорда (1976).

Иллюстрация наложения (подмена во временной области). Для периодических (детерминированных) и случайных данных эффект наложения проявляется совершенно различным образом. Серьезные расхождения в результатах возникают также в зависимости от выбора того или иного делителя ($N-i$ или N).

В качестве примера рассмотрим автокорреляционную функцию синусоиды, вычисленную тремя различными способами (рис. 7.9): a — без добавления нулей и с делением на N , b — с добавлением нулей и делением на N , c — с добавлением нулей и делением на $N-i$. Отметим, что на рис. 7.9, a и b заметны противоположные по характеру искажения. В силу периодичности функции наложения (подмены) не происходит, поскольку та информация, которая накладывается друг на друга, оказывается правильной. Поэтому деление на N не дает никаких искажений результата — все N кросс-произведений суммы правильны. Другая картина возникает при добавлении нулей (рис. 7.9, b и c). В этих случаях предусмотрена возможность наложения, и, следовательно, в сумму входят только $N-i$ произведений. При этом деление на N вызывает заметное искажение — уменьшение истинных значений таким образом, что они попадают в треугольные области; при делении на $N-i$ существенных искажений не возникает.

Хотя деление на $N-i$ дает несмещенные результаты, нельзя не отметить того, что деление на N удерживает величины в интервале $[-1, 1]$. Мы придерживаемся того мнения, что в ситуациях со случайными данными при значениях задержки i , ограниченной величиной $0.1N$, чрезмерной статистической изменчивости можно избежать, добавляя нули, проводя деление на $N-i$ и имея достаточный объем выборки. Обратим внимание на ту проблему, которая связана с делением на величины, близкие к нулю, при значениях запаздывания, близких к N .

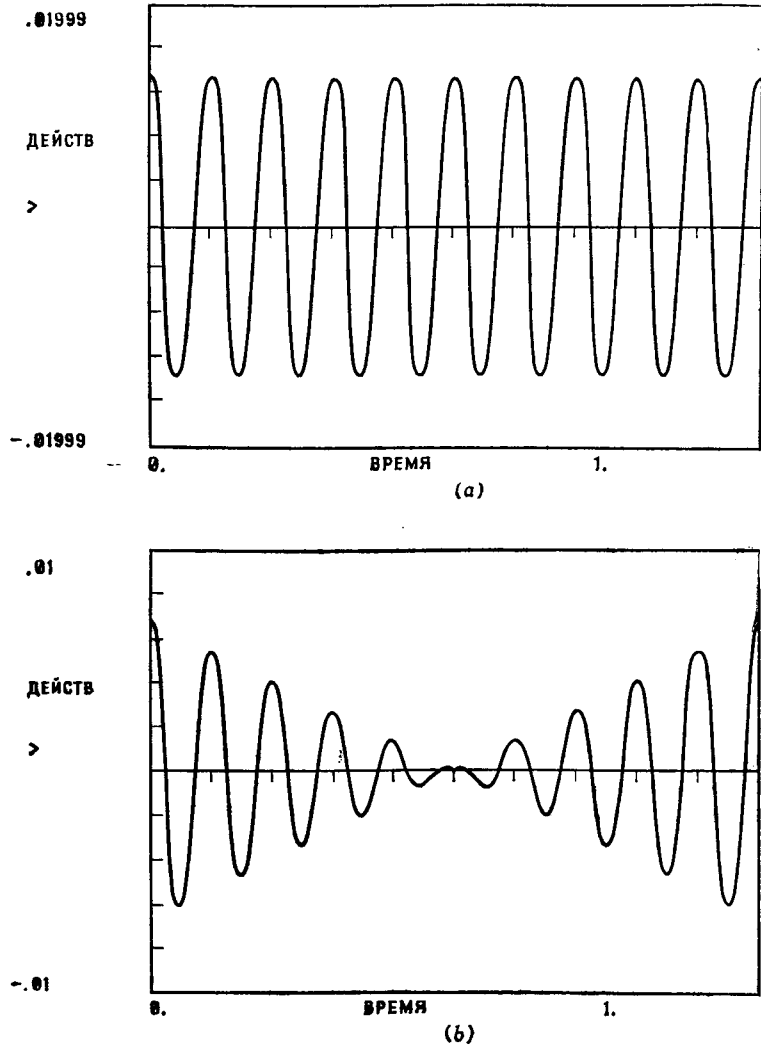


Рис. 7.9. Иллюстрация наложения, возникающего при вычислении кросс-корреляционных функций для синусоиды. *a* — наложение, делитель N ; *b* — наложения нет, делитель N ; *c* — наложения нет, делитель $N - i$.

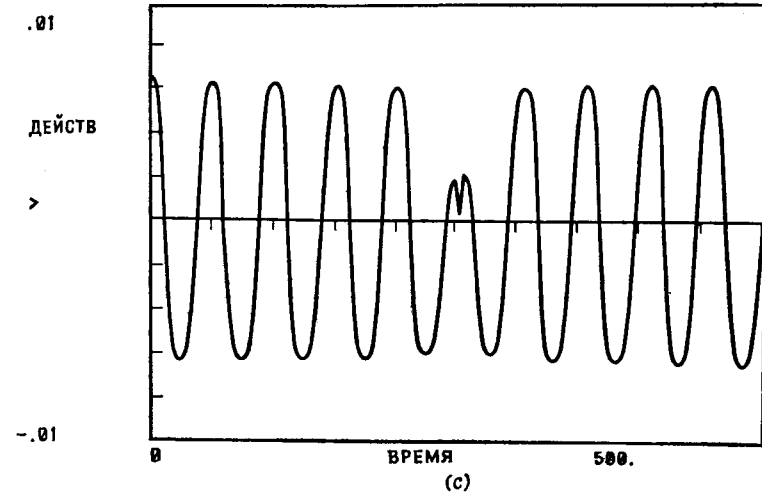


Рис. 7.9. Продолжение.

Хотя данные, изображенные на графиках, были подобраны специально, они вполне точно отражают те эффекты, которые наблюдаются на практике.

Упражнения

7.1. Используя формулу (7.9), перепишите определение свертки.

Ответ:

$$\hat{s}_{xy}(i) = \frac{1}{2N} \left(\sum_{p=1}^N [x(p) + y(p+i)]^2 - \sum_{p=1}^N x^2(p) - \sum_{p=1}^N y^2(p+i) \right).$$

7.2. Используя формулу (7.10), перепишите определение свертки.

Ответ: см. упр. 7.1.

7.3. Докажите, что $\mathfrak{F}[s_{xy}(\tau)] = \mathfrak{F}[X^*(t)Y(t)]$.

Ответ:

$$\mathfrak{F}[s_{xy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)e^{-i2\pi\tau} dt d\tau;$$

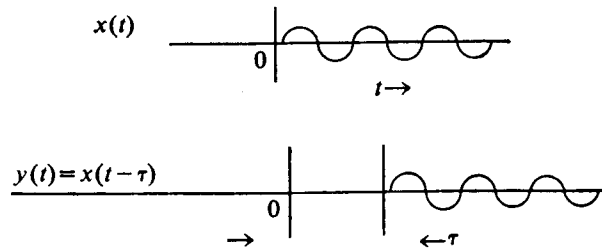
после замены переменных

$$u = t + \tau, \quad \tau = u - t, \quad d\tau = du$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(u)e^{-i2\pi i(u-t)} dt du &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{i2\pi t} dt \int_{-\infty}^{\infty} y(u)e^{-i2\pi u} du = X(f)^* Y(f). \end{aligned}$$

7.4. Докажите, что сдвигу графика функции отвечает линейная убывающая функция фазы с отрицательными значениями; сдвиг определяется как такое значение τ , что при $t = \tau$ функция $y(t)$, соответствующая перемещению $x(t)$ на τ , принимает значение $x(0)$ ($x(\tau - \tau) = x(0)$):



Ответ: поскольку $y(\tau) = x(0)$ и, значит, при $t = \tau$
 $y(t) = x(t - \tau) = x(0)$,

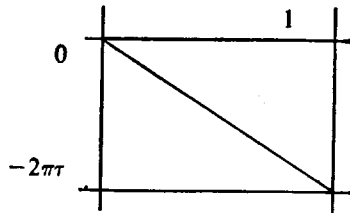
после замены переменных

$$u = t - \tau, \quad t = u + \tau, \quad dt = du$$

получим

$$\int x(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt = \int x(u) e^{-j2\pi f (u + \tau)} du = e^{-j2\pi f \tau} X(f).$$

Для $\varphi = -2\pi f \tau$ имеем



7.5. Напишите программу, в которой предусмотрены следующие действия.
 а) Получение функции, значения которой при $i = 0, 1, \dots, 2^p - 1$ равны 0.1 и при $i = 2^p, \dots, 127$ — нулю. Параметр p пробегает значения 1, ..., 7.
 б) Вычисление для этой последовательности во всех семи случаях функции круговой свертки и изображение результатов с помощью программы для графического изображения данных.

Прокомментируйте результаты.

7.6. Повторите упр. 7.5, но программу измените так, чтобы к данным добавлялся гауссовский шум с нулевым средним и единичной дисперсией (получите этот шум сложением 12 идущих подряд значений, полученных с помощью подпрограммы TDRAND, и последующим вычитанием из суммы 6). Поясните результаты.

7.7. Повторите упр. 7.6 для кросс-корреляции: получите с одинаковым шагом функции, используя для каждой из этих двух функций разные значения гауссовского шума. Поясните результаты.

Глава 8

ПЛОТНОСТИ КРОСС-СПЕКТРА И СПЕКТРА МОЩНОСТИ

8.1. ОБЗОР ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРОВ

Функция плотности спектра мощности (ПСМ) определяет распределение дисперсии (среднеквадратичного значения) временной последовательности по частотам. Своим происхождением термин обязан электротехнике. Дело в том, что рассеяние мощности в электрической цепи пропорционально среднему квадрату поданного напряжения. Этим объясняется, почему в термин вошло слово мощность. Слово спектр подчеркивает, что функция ПСМ есть функция частот. В ПСМ значения мощности на бесконечно малых частотных интервалах нормируются длиной такого интервала, чтобы получалась функция плотности. Понятие ПСМ настолько далеко шагнуло за пределы электротехники, что в некоторых отраслях науки все чаще используется термин *автоспектральная плотность*.

Понятие ПСМ аналогично понятию дисперсии в классической статистике. Продолжая эту аналогию, понятию ковариации (как функции частот) сопоставляют функцию плотности кросс-спектра (ПКС). Понятие ПКС определяется для пары временных последовательностей. Как правило, в качестве этих последовательностей выступают вход и выход системы. ПКС — последний шаг, подводящий к понятиям передаточных функций и функций когерентности.

Возвращаясь к аналогии с классической статистикой, отметим, что передаточная функция соответствует регрессионному коэффициенту, а когерентность — квадрату коэффициента корреляции.

Вычислительные определения. Для вычисления функций плотности спектра существуют три способа. Каждый из этих способов основан на своем вычислительном определении ПСМ; асимптотически все три определения дают один и тот же результат. Во всех остальных способах вычислений используется операция приведения к белому шуму. Она будет затронута только во втором томе, где помимо прочего будут рассмотрены также вопросы применения для оценивания ПСМ линейно упреждающего кодирования (КЛУ), метода Прони, авторегрессионного скользящего усреднения (УАС) и спектрального анализа максимума энтропии (САМЭ). А сейчас обратимся к следующим методам.