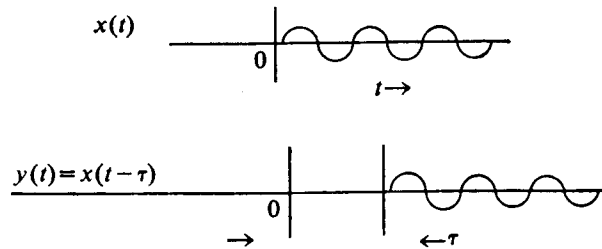


7.4. Докажите, что сдвигу графика функции отвечает линейная убывающая функция фазы с отрицательными значениями; сдвиг определяется как такое значение τ , что при $t = \tau$ функция $y(t)$, соответствующая перемещению $x(t)$ на τ , принимает значение $x(0)$ ($x(\tau - \tau) = x(0)$):



Ответ: поскольку $y(\tau) = x(0)$ и, значит, при $t = \tau$
 $y(t) = x(t - \tau) = x(0)$,

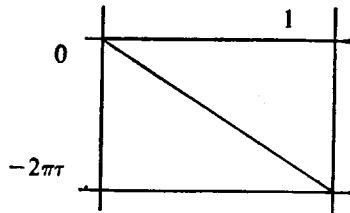
после замены переменных

$$u = t - \tau, \quad t = u + \tau, \quad dt = du$$

получим

$$\int x(t - \tau) e^{-j2\pi f t} dt = \int x(u) e^{-j2\pi f (u + \tau)} du = e^{-j2\pi f \tau} X(f).$$

Для $\varphi = -2\pi f \tau$ имеем



7.5. Напишите программу, в которой предусмотрены следующие действия.
 а) Получение функции, значения которой при $i = 0, 1, \dots, 2^p - 1$ равны 0.1 и при $i = 2^p, \dots, 127$ — нулю. Параметр p пробегает значения 1, ..., 7.
 б) Вычисление для этой последовательности во всех семи случаях функции круговой свертки и изображение результатов с помощью программы для графического изображения данных.

Прокомментируйте результаты.

7.6. Повторите упр. 7.5, но программу измените так, чтобы к данным добавлялся гауссовский шум с нулевым средним и единичной дисперсией (получите этот шум сложением 12 идущих подряд значений, полученных с помощью подпрограммы TDRAND, и последующим вычитанием из суммы 6). Поясните результаты.

7.7. Повторите упр. 7.6 для кросс-корреляции: получите с одинаковым шагом функции, используя для каждой из этих двух функций разные значения гауссовского шума. Поясните результаты.

Глава 8

ПЛОТНОСТИ КРОСС-СПЕКТРА И СПЕКТРА МОЩНОСТИ

8.1. ОБЗОР ОСНОВНЫХ МЕТОДОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ СПЕКТРОВ

Функция плотности спектра мощности (ПСМ) определяет распределение дисперсии (среднеквадратичного значения) временной последовательности по частотам. Своим происхождением термин обязан электротехнике. Дело в том, что рассеяние мощности в электрической цепи пропорционально среднему квадрату поданного напряжения. Этим объясняется, почему в термин вошло слово мощность. Слово спектр подчеркивает, что функция ПСМ есть функция частот. В ПСМ значения мощности на бесконечно малых частотных интервалах нормируются длиной такого интервала, чтобы получалась функция плотности. Понятие ПСМ настолько далеко шагнуло за пределы электротехники, что в некоторых отраслях науки все чаще используется термин *автоспектральная плотность*.

Понятие ПСМ аналогично понятию дисперсии в классической статистике. Продолжая эту аналогию, понятию ковариации (как функции частот) сопоставляют функцию плотности кросс-спектра (ПКС). Понятие ПКС определяется для пары временных последовательностей. Как правило, в качестве этих последовательностей выступают вход и выход системы. ПКС — последний шаг, подводящий к понятиям передаточных функций и функций когерентности.

Возвращаясь к аналогии с классической статистикой, отметим, что передаточная функция соответствует регрессионному коэффициенту, а когерентность — квадрату коэффициента корреляции.

Вычислительные определения. Для вычисления функций плотности спектра существуют три способа. Каждый из этих способов основан на своем вычислительном определении ПСМ; асимптотически все три определения дают один и тот же результат. Во всех остальных способах вычислений используется операция приведения к белому шуму. Она будет затронута только во втором томе, где помимо прочего будут рассмотрены также вопросы применения для оценивания ПСМ линейно упреждающего кодирования (КЛУ), метода Прони, авторегрессионного скользящего усреднения (УАС) и спектрального анализа максимума энтропии (САМЭ). А сейчас обратимся к следующим методам.

Метод преобразования Фурье

$$\text{ПСМ} \quad \hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{P} \overline{|X(f)|^2}; \quad (8.1)$$

$$\text{ПКС} \quad \hat{S}_{xy}(f) = \frac{1}{P} \overline{X^*(f)Y(f)}.$$

Метод корреляционной функции (метод Блэкмена—Тьюки (Б—Т))

$$\text{ПСМ} \quad \hat{S}_{xx}(f) = \int_{-P/2}^{P/2} \hat{R}_{xx}(\tau) \cos(2\pi f\tau) d\tau; \quad (8.2)$$

$$\text{ПКС} \quad \hat{S}_{xy}(f) = \int_{-P/2}^{P/2} \hat{R}_{xy}(\tau) \exp(-j2\pi f\tau) d\tau.$$

Метод полоснопропускающего фильтра

$$\text{ПСМ} \quad \hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{B_e} E[x^2(t, f, B_e)]; \quad (8.3)$$

$$\text{ПКС} \quad \text{Re}[\hat{S}_{xy}(f)] = C_{xy}(f) = \frac{1}{B_e} E[x(t, f, B_e)y(t, f, B_e)],$$

$$\text{Im}[\hat{S}_{xy}(f)] = Q_{xy}(f) = \frac{1}{B_e} E[x_q(t, f, B_e)y_q(t, f, B_e)],$$

где $E[\]$ — операция усреднения; $x(t, f, B_e)$ — результат, полученный при полоснопропускающей фильтрации $x(t)$; f — центральная частота; B_e — полоса пропускания фильтра; $x_q(t, f, B_e)$ — сдвиг $x(t, f, B_e)$ по фазе на 90° (сдвигающая фильтрация). Результаты применения каждого из трех методов к одной и той же временной последовательности показаны на рис. 8.1.

Процедура, включающая преобразование Фурье, в значительной мере вытеснила метод Б—Т. Из-за некоторых существенных расхождений в обозначениях метод Б—Т вынесен в приложение В. Что же касается метода с фильтрацией, то основные вопросы, связанные с его применением, уже разбирались в гл. 5. Метод преобразования Фурье будет рассмотрен в этой главе ниже.

8.2. ПОНЯТИЕ ПЛОТНОСТИ

Всякий раз, когда речь заходит о плотности, будь то плотность мела на доске или плотность атмосферы, нужно сознавать, что добиться ее точного измерения невозможно. В самом деле, при измерении плотности сначала определяется количество вещества, приходящееся на конечную площадь или определенный объем, а затем на их величины делится полученный результат, т. е. фактически для данной поверхности или выбранного объема измеряется среднее значение. Сказанное в полной мере

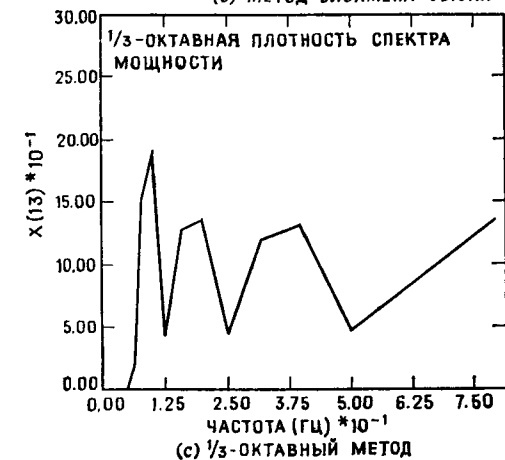
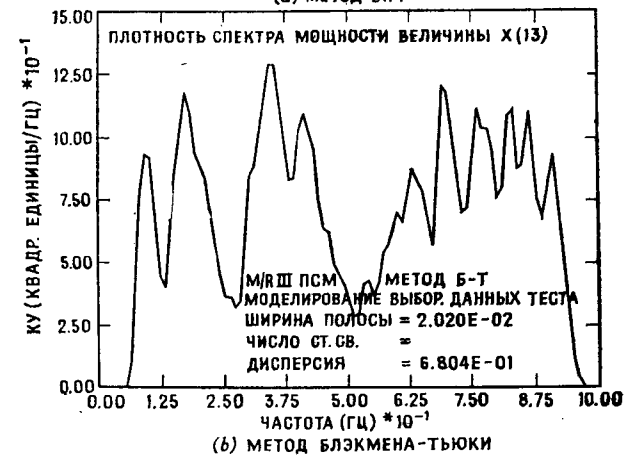
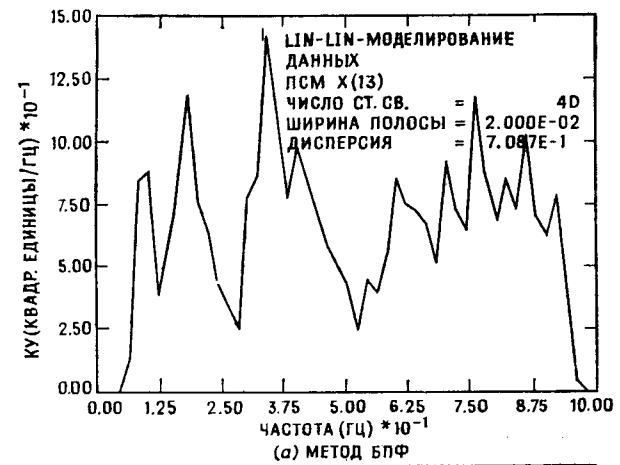


Рис. 8.1. ПСМ трех типов. а — метод БПФ; б — метод Блэкмена — Тьюки; в — 1/3-октавный метод.

можно отнести к ПСМ и ПКС, представляющим собой функции плотности.

Определения (8.1), (8.2) и (8.3) дают один и тот же результат, если фигурирующие в них последовательности имеют бесконечную длину, а полосы частот — бесконечно малую ширину. Практически ни того, ни другого достичь нельзя. Семейство или совокупность временных последовательностей можно рассматривать с позиций теории случайных процессов, считая такую совокупность случайным процессом. Накопив достаточно большое число выборок этого процесса, т. е. получив набор временных последовательностей, имеющих в каждый момент времени (в зависимости от условий эксперимента ими могут быть, например, время суток или фаза луны) одинаковые статистические характеристики, можно выполнить «усреднение по совокупности», при котором для каждого момента времени определяются статистические характеристики, в том числе и ПСМ. Но такая возможность существует далеко не всегда. Из-за чрезмерной стоимости или малодоступности большого числа наблюдений чаще всего в распоряжении оказывается лишь одна временная последовательность. Если эту временную последовательность как элемент бесконечно большого пространства возможных выборок, записанных в несколько различных условиях, можно считать одной реализацией эргодического случайного процесса, то поступают иначе — статистические свойства определяют через временное усреднение. Эта возможность, имеющаяся для регулярных (т. е., в частности, стационарных) процессов, уже отмечалась в гл. 2. Временное среднее всегда определяется на конечных промежутках. Это подводит нас к важной задаче выбора полос частоты, обеспечивающих статистическую устойчивость, а также и к другим аспектам вычислений ПСМ.

Как следует из сказанного выше, понятие ПСМ тесно при-мыкает к идее стационарного случайного процесса. Но помимо стационарного случая понятия преобразования Фурье спектра мощности оказываются весьма полезными и для анализа данных, отвечающих переходным процессам, поскольку их частотные характеристики определяются подобным образом. Для случая переходных процессов потребуются, правда, некоторые изменения, касающиеся вычислений; мы остановимся на них ниже.

8.3. ШИРИНА ЭФФЕКТИВНОЙ РАЗРЕШАЮЩЕЙ ПОЛОСЫ

Основным понятием, относящимся к вычислениям, служит ширина эффективной разрешающей полосы B_e . Это понятие касается каждого из трех методов; все они дадут практически одинаковые результаты, если ширину полосы B_e и длину записи P подогнать соответствующим образом. Важно понимать, что изме-

нение средней мощности возможно только в пределах ограниченной полосы частот. Статистическая устойчивость результатов во многом зависит от ширины этой полосы (см. § 8.5).

Типичные для трех указанных методов эффективные формы фильтров изображены на рис. 8.2. Дополнительные сведения можно найти в гл. 6—8 книги Отнеса и Эноксона (1972).

Ширину полосы можно определить различными способами. Как правило, она полагается равной расстоянию между точками, в которых передаточная функция мощности (спектральное окно) принимает половину максимального значения. Напомним, что

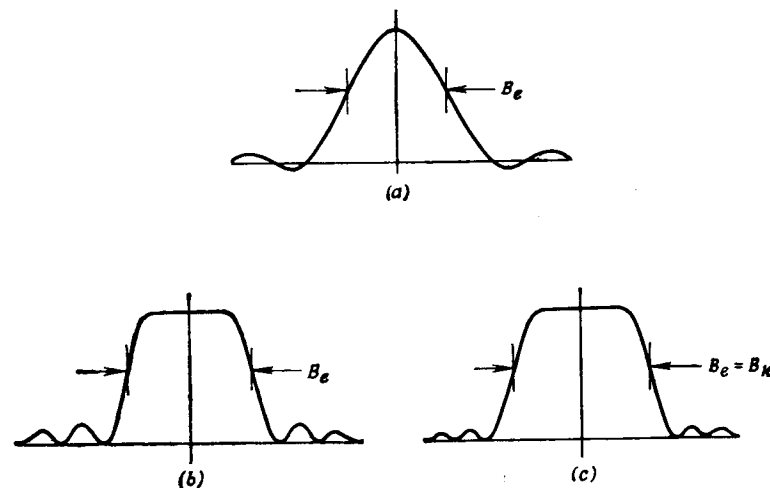


Рис. 8.2. Типичные спектральные окна. *a* — корреляционное спектральное окно; *b* — спектральное окно в методе БПФ; *c* — спектральное окно в методе фильтрации.

точка половинной мощности служит основным параметром при расчете цифровых фильтров. В методе с фильтрацией эта точка и определяет ширину полосы B_e . В методе корреляционной функции приближенное значение ширины полосы получают по формуле $B_e = 1/\tau_{\max}$, где $\tau_{\max} = mT$, m — максимальное значение запаздывания и τ_{\max} — максимальное время запаздывания, входящее в вычисления корреляции. В методе БПФ приближенное значение ширины полосы получают по формуле $B_e = m/P = m/(NT)$, где P — длина записи, N — число величин выборочных данных и m — число отдельных компонент, для которых проводится усреднение. В каждом из трех методов допускается применение различных спектральных окон (см. § 8.8). Помимо этого, в методе БПФ возможны и другие разнообразные изменения.

Различие между разрешающей и вычислительной полосами.

Если значения спектральной функции вычислять в частотах, разделенных интервалами длины B_e , то спектральные величины будут (приближенно) статистически независимы (ортогональны). В полной мере это справедливо только для стационарных процессов. Значения функции можно вычислять и с меньшим шагом. Хотя дополнительные значения, строго говоря, будут нести очень мало новой информации (по крайней мере в смысле теории информации), во многих случаях значения спектральной функции вычисляют с вдвое меньшим шагом $b = B_e/2$. Такой выбор шага в области частот предохраняет от эффекта наложения при построении некоторых временных функций по обратным преобразованиям Фурье. С этой точки зрения шаг, равный $B_e/2$, оптимален. В частности, такая ширина полосы частот нужна при вычислении передаточной функции, используемой для получения свертки с помощью БПФ. Чтобы избежать кругового эффекта, нужно получить $b = B_e/2$, добавляя в каждый отрезок N_s нулей. Круговой эффект был подробно рассмотрен в гл. 1 и 7.

В пользу выбора меньшего шага говорит и то дополнительное соображение, что, вычисляя спектральную функцию с меньшим шагом в области частот, можно получить более гладкие и точные графики. По сути дела, такое вычисление эквивалентно интерполяции рядами Фурье. Последнюю можно выполнить, дополнив функцию нулями. Например, чтобы получить промежуточные значения функции, заданной таблично, интерполяцию можно провести следующим образом: сначала вычислить преобразование Фурье (для N последовательных точек) и дополнить преобразованную функцию N нулями, а затем вычислить обратное преобразование Фурье.

Как правило, ширину полосы B_e мы называем «разрешающей», а b — «вычислительной», подчеркивая тем самым их различие. В спектрах Б — Т обычно используется ширина полосы $b = B_e/2$, как это и предлагалось Блэкменом и Тьюки в их книге (1958), ставшей теперь классической. При вычислениях ПСМ методом БПФ, как правило, берется интервал $b = B_e$. Такой выбор дает минимальный шаг, при котором получаются почти непрерывные, независимые частотные величины.

8.4. ПРЕДЕЛЫ РАЗРЕШАЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ

Нередко возникает вопрос о том, каким должен быть частотный диапазон для спектральных вычислений на ЭВМ. Однозначный ответ на него не имеет смысла. Причина этого кроется в том, что обычно для данных, представленных в цифровой форме, неизвестно, с каким интервалом они выбирались — им может быть и 1 мес, и 1 мкс. Возможности оборудования для анало-

го-цифрового преобразования могут быть ограничены, но, как только данные представлены в цифровой форме, потребуется частотный диапазон $0 - F$ Гц, где $F = 1/(2T) = S/2$ — частота Найквиста. Она меняется при каждом переходе к иному выборочному интервалу, как это происходит, например, при децимации. К этому вопросу мы вернемся во втором томе.

Если обратиться к обработке данных в истинном масштабе времени, то поставленный вопрос приобретает смысл. В этом слу-

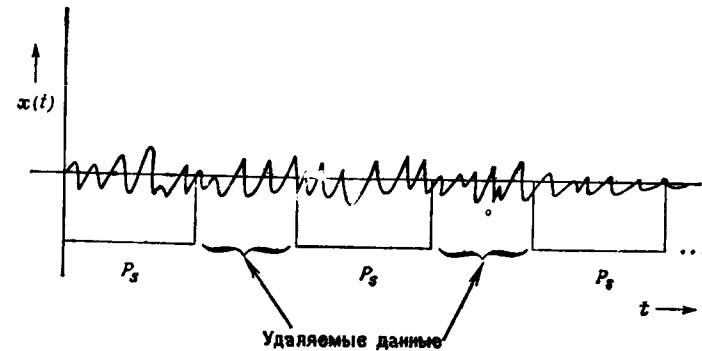


Рис. 8.3. Иллюстрация операции удаления данных при обработке в истинном масштабе времени.

чае на скорость, с которой могут обрабатываться данные, в совокупности влияют быстродействие АЦП, скорость выполнения команд ЭВМ и скорость, с которой дисплеи или периферийные устройства могут принимать данные. Кроме того, на скорость обработки влияет также установка скорости выборки, связанной с частотной полосой данных. Приведем пример. Допустим, что частота S равна 4000 Гц. Полагая, что для обработки берутся данные с полосой частот 1000 Гц, мы будем получать на период максимальной частоты по 4 значения. Для данных с полосой частот 2000 Гц будет получаться пара значений. Хотя в обоих случаях число данных для обработки одинаково, в одном случае будут обрабатываться данные с полосой частот 2000 Гц, а в другом — данные с полосой частот 1000 Гц.

Выше мы неявно предполагали, что обрабатываются все данные. Если скорости аналого-цифровых преобразователей, скорость запоминания ЭВМ и скорость работы программы обработки данных достаточны, то в машину можно вводить данные с высокой частотой выборки. Тем не менее вычисления БПФ, ПСМ и другие процедуры могут и не выполняться с такой скоростью. В этом случае вводятся и обрабатываются один временной интервал, следующий за ним может выбрасываться, а затем обра-

бывается другой временной интервал, как это показано на рис. 8.3.

Мини-ЭВМ основных систем нередко снабжаются быстродействующими устройствами для БПФ. При оснащении мини-ЭВМ основных систем быстродействующими процессорами допустимая скорость обработки (ко времени написания этой книги) колеблется в интервале от нескольких сотен до примерно 50 000 выб./с. Аппаратные устройства могут достигать более высоких скоростей, во многих случаях свыше 100 000 выб./с. Быстродействующие процессоры, которые получают все большее распространение, могут обрабатывать до 1 000 000 выб./с. Несомненно, станут обычными скорости и в несколько миллионов герц.

Существуют также ограничения разрешающей способности, связанные с числом имеющихся ячеек памяти для запоминания данных. Нетрудно видеть, что эти ограничения определяются произведением $B_e P$. Запишем их в виде неравенства $B_e \geq 1/P$ или $B_e P \geq 1$, $B_e N T \geq 1$, $N B_e / S \geq 1$. Например, если $S = 4096$ выб./с, а $N = 4096$, то разрешающая полоса B_e не меньше 1 Гц. Если $S = 4.096$, а $N = 4096$, то $B_e \geq 0.001$ Гц.

8.5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

На статистическую устойчивость влияют два параметра — разрешающая полоса B_e и длина записи $P = NT$.

Можно показать (см., например, книги Отнеса и Эноксона (1972), гл. 5, Бриллинджера (1980), гл. 5), что в разумных предположениях оценки ПСМ приближенно имеют распределение χ_n^2 с n степенями свободы, где $n = 2B_e P$. Более того, для достаточно больших n , например $n \geq 30$, распределение χ_n^2 аппроксимируется гауссовским (нормальным) распределением. В этом случае нормированное стандартное отклонение (стандартное отклонение, связанное с оцениваемой величиной, т. е. процентная ошибка, или, в статистической терминологии, «коэффициент разброса») определяется соотношением $\epsilon_0 = 1/\sqrt{B_e P}$. Величину ϵ_0 называют «стандартной ошибкой». Доказательства и дополнительные сведения можно найти в книге Отнеса и Эноксона (1972), гл. 5.

Формулы для чисел степеней свободы (ст. св.) и соответствующих стандартных ошибок каждого из трех методов сведены в табл. 8.1.

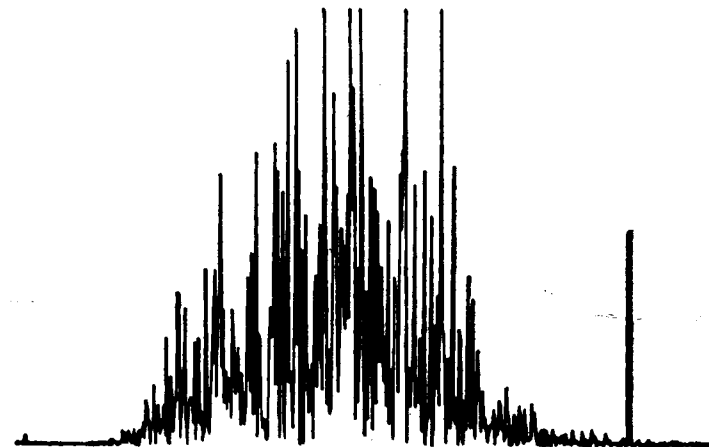
Эффект возрастания числа степеней свободы иллюстрируется на рис. 8.4. На всех пяти графиках изображены ПСМ белого шума после полоснопропускающей фильтрации и добавления синусоиды на выходе.

Для первого графика число степеней свободы $n = 2$, для второго $n = 8$, для третьего $n = 32$, для четвертого $n = 128$ и для

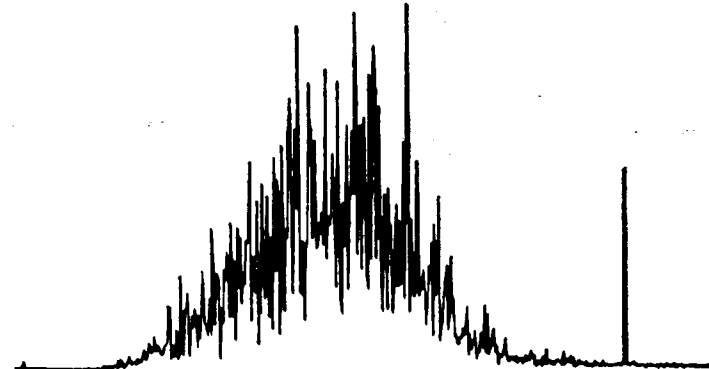
пятого $n = 512$. Стандартные ошибки имеют следующие значения:

График	число ст. св.	$\epsilon_0 = 1/\sqrt{B_e P}$
1	2	1.0
2	8	.3
3	32	.2
4	128	.09
5	512	.05

Доверительные границы для спектра мощности можно определять (в зависимости от значения n) или по таблицам распределения χ^2 , или по таблицам гауссовского распределения. Например, полагая $n = 10$, $T = 1/2$ с, $N = 4000$, получим $P = 2000$ с,



(a) $M = 1$



(b) $M = 4$

Рис. 8.4. Пример статистической устойчивости.

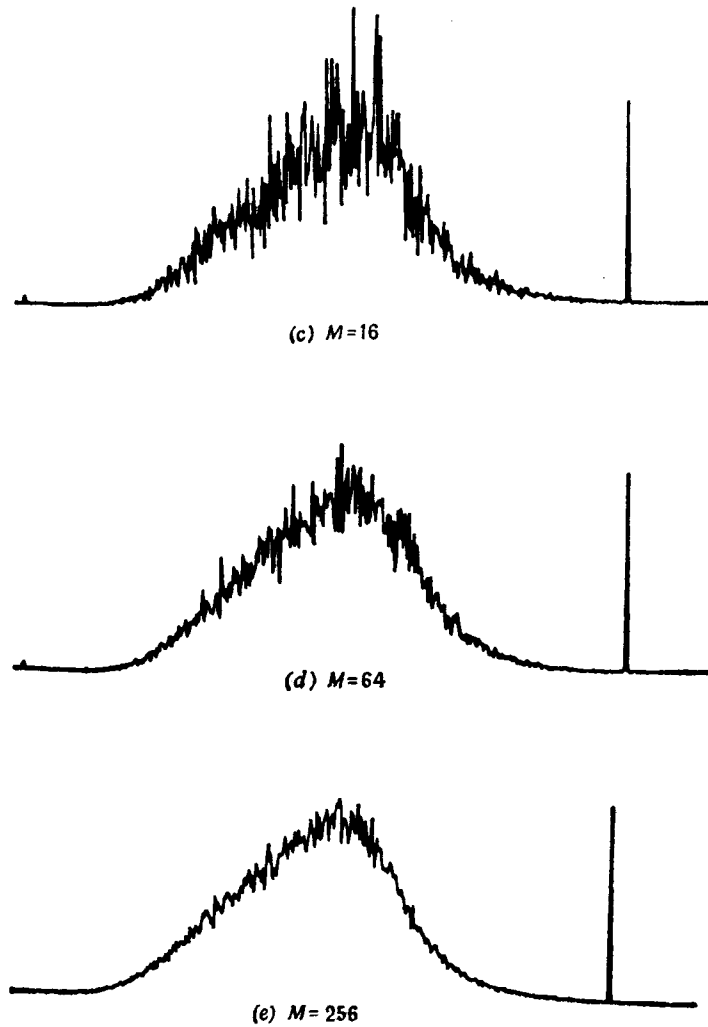


Рис. 8.4. Продолжение.

Таблица 8.1

Число степеней свободы		
Метод получения ПСМ	Число ст. св. $n=2B_eP$	$\varepsilon_n = \sqrt{1/(B_eP)}$
Корреляции (Б—Т)	$n=2N/m$	$\sqrt{m/N}$
БПФ	$n=2M$	$\sqrt{1/M}$
Фильтрации	$n=2B_kP$	$\sqrt{1/(B_kP)}$

Здесь N — общее число значений данных, m — максимальное значение запаздывания в корреляционной функции, M — число осредняемых комплексных коэффициентов Фурье, B_k — точка половинной мощности полосы пропускания цифрового фильтра, $P=NT$ — длина записи

$F=1$ Гц, $B_e=1/400=0.0025$, так что $n=2B_eP=2\frac{2000}{400}=10$. В этом случае для 90-процентного ($=100$ p) доверительного интервала верхней доверительной границей будет служить величина $n\hat{S}(k)/\chi_{n; 1-\alpha/2}^2$, а нижней — величина $n\hat{S}(k)/\chi_{n; \alpha/2}^2$, где $\alpha=1-p$. По таблицам (см., например, таблицы Большева и Смирнова (1965) или табл. 5.4 в книге Отнеса и Энноксона (1972)) находим следующие значения: $\chi_{10; 0.975}^2=3.25$, $\chi_{10; 0.025}^2=20.48$. Следовательно, для верхней и нижней доверительных границ справедливы приближенные равенства

$$\frac{10\hat{S}(k)}{3.25} \approx 3\hat{S}(k) \quad \text{и} \quad \frac{10\hat{S}(k)}{20.48} \approx 0.5\hat{S}(k).$$

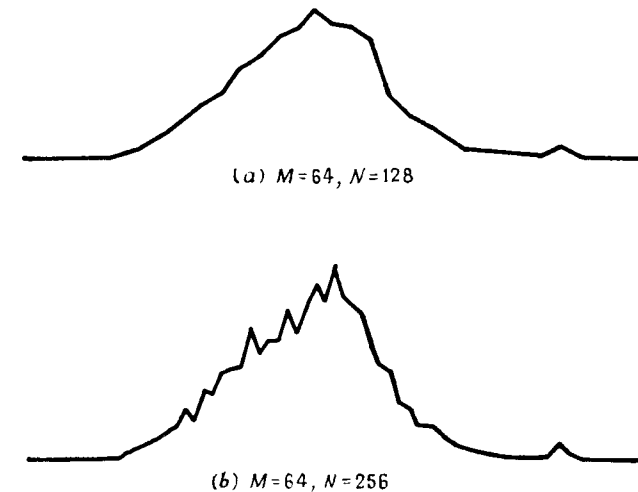


Рис. 8.5. Иллюстрация смещения (размывания), обусловленного слишком широким разрешением.

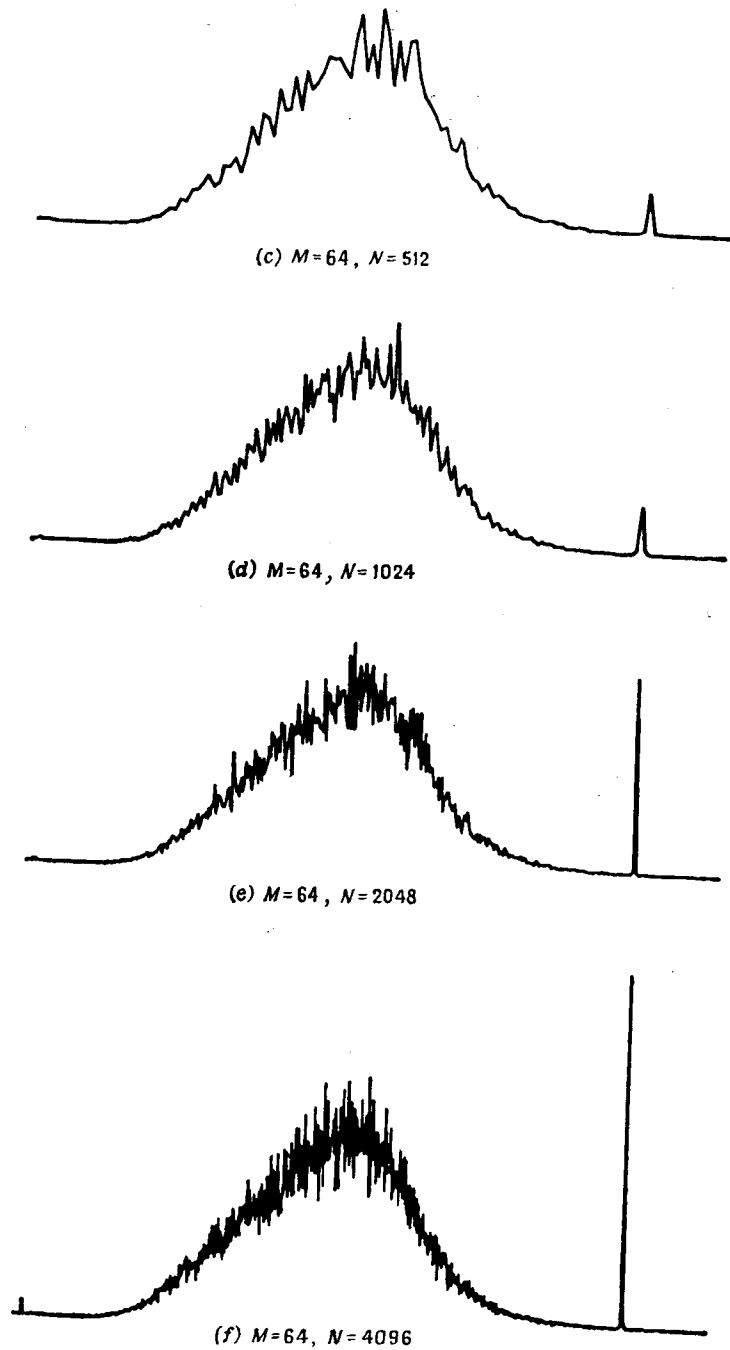


Рис. 8.5. Продолжение.

Пример размывающего эффекта конечного разрешения. Если разрешающую полосу B_e , связанную с полосой частот откликов, выбрать широкой, то возникнет эффект размывания. Речь идет, выражаясь языком статистики, о смещении, относящемся к параметру в оценочной процедуре. Дать какую-либо количественную оценку этого эффекта чрезвычайно сложно. Вместе с тем появляющиеся искажения весьма наглядны и дают хорошее представление о качественной стороне явления. Обратимся к рис. 8.5. Здесь тот же полоснопропускающий фильтр, что применялся для получения графиков рис. 8.4, используется для фильтрации псевдо-

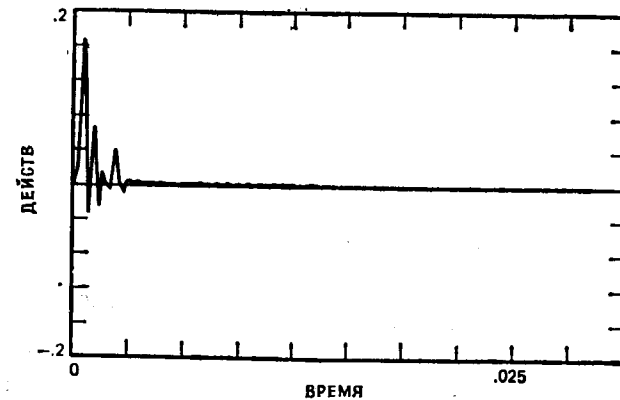


Рис. 8.6. Последовательность переходных данных с нулевым «хвостом» и ненулевым средним.

случайного белого гауссовского шума, затем на выходе добавляется синусоида. Хорошо заметно исчезновение деталей при низком разрешении. При 128-точечном разрешении синусоида исчезает почти полностью. С ростом разрешения она проявляется во все более и более сильном всплеске, достигающем максимума при $N=4096$. Может показаться, что при большем разрешении данные имеют большую статистическую изменчивость. Но это не так. Проявление большей изменчивости объясняется не переменной статистической устойчивости — она остается постоянной, — а возрастанием числа точек, наносимых на одну и ту же площадь.

Удаление среднего. В спектральном анализе следуют полезному эмпирическому правилу — вычисляют значение выборочного среднего и вычитают его из соответствующей временной последовательности. Этот прием обоснован для анализа стационарных процессов. Однако для анализа переходных процессов он не-

приемлем. В качестве подтверждения такого вывода приведем пример (рис. 8.6). Хотя весь «хвост» процесса составляют нулевые значения, среднее оказывается положительным из-за вклада переходной части процесса. В этом случае вычитание среднего послужит причиной нежелательного искажения.

В приемах осреднения по временному промежутку, рассмотренных в этой главе ниже, имеются две вычислительные возможности — удаление среднего по всей временной последовательности и удаление среднего каждого отрезка ряда. Во втором случае величина $\hat{S}(k)$ должна быть равна нулю при $k=0$. Это связано с тем, что $\hat{S}(0) = E(\bar{x}_s - \bar{x})^2$ есть среднеквадратичное отклонение среднего по отрезку от общего среднего. Это отклонение может быть как не очень существенным, так и значительным.

8.6. УТЕЧКА

С помощью спектральных окон, на которых мы остановимся ниже, решается задача борьбы с явлением, получившим название «утечка». Утечка может происходить в двух направлениях. Во-первых, при вычислении мощности можно столкнуться с «вытеканием» в спектральной полосе, что приведет к смещению оценок мощности в сторону уменьшения. Во-вторых, спектральная оценка может сместиться в сторону увеличения в результате «втекания» (если утечке сопоставлены отрицательные веса, то смещение оценки даст заниженный результат).

Для начала продемонстрируем проявление эффекта вытекания. Рассмотрим плотность спектра мощности синусоиды, имеющей амплитуду A и частоту $f = nb$. В этом случае синусоида имеет целое число циклов. Из материала, изложенного в гл. 1 и 2, известно, что

$$S_x(k) = \begin{cases} \frac{A^2 P}{4} & \text{при } k = \pm n, \\ 0 & \text{при } k \neq \pm n. \end{cases} \quad (8.4)$$

График этой функции плотности приведен на рис. 8.7. Дополнив до вычисления преобразования исходную временную последовательность нулями, нетрудно получить более общий вид этой функции:

$$S_x(k) = \frac{PA^2}{4} \left[\frac{\sin(\pi(n-k))}{N \sin[\pi(n-k)/N]} + \frac{\sin(\pi(n+k))}{N \sin[\pi(n+k)/N]} \right]^2. \quad (8.5)$$

Заметим, что, интегрируя функцию $S_x(k)$, заданную формулой (8.4), мы получим среднеквадратичное значение синусоиды, равное $A^2/2$. Отметим также, что в этом случае все среднеквадратичное значение сосредоточено в двух точках ($k = \pm n$).

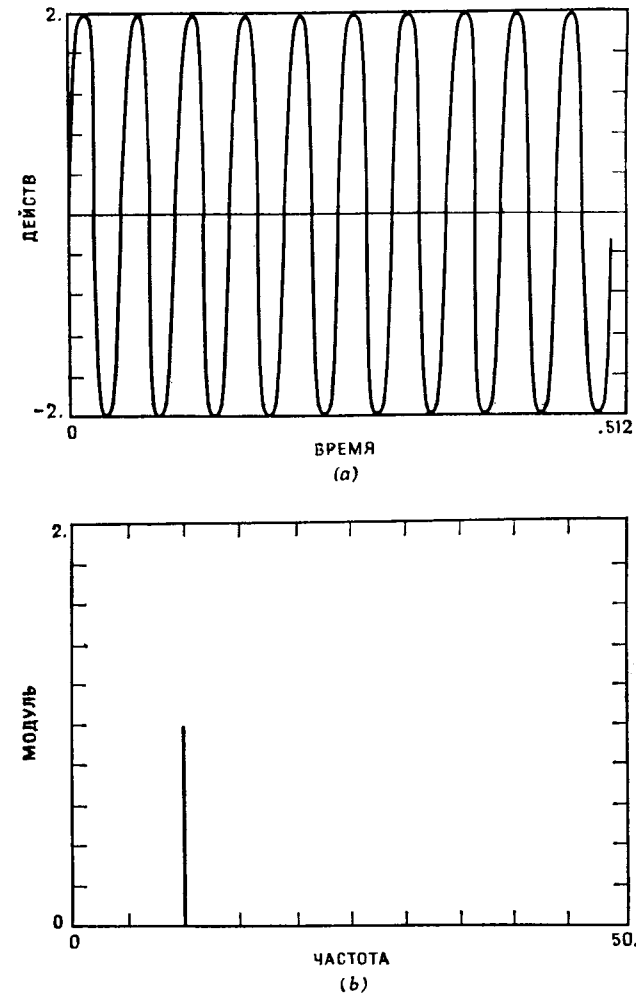


Рис. 8.7. ПСМ синусоиды с целым числом циклов (равным 10).

Предположим теперь, что к целому числу циклов синусоиды той же частоты добавлена еще половина цикла. При этом график ПСМ обретет вид, показанный на рис. 8.8. Это график функции, заданной формулой (8.5) и вычисленной в других точках. Полученная спектральная картина позволяет говорить о растекании мощности из частоты $(n+1/2)b$. Если бы имелась еще одна синусоида, но с другой частотой, то мощность, которая вытекла из частоты $(n+1/2)b$, добавилась бы к мощности второй

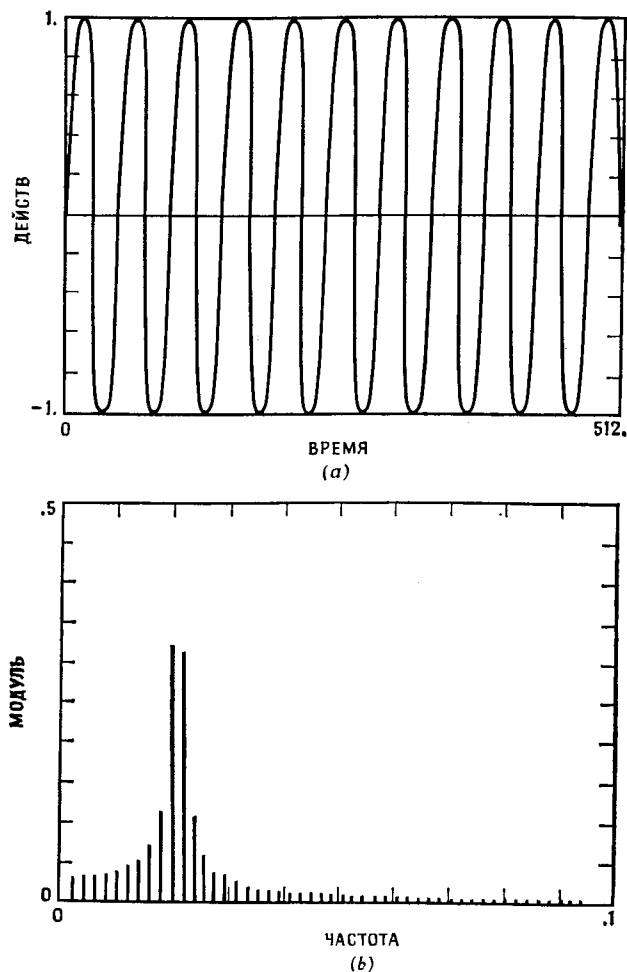


Рис. 8.8. ПСМ синусоиды, к целому числу циклов которой добавлена еще половина цикла (10.5 циклов).

синусоиды. В этом смысле можно говорить о утечке мощности. Отметим, что при интегрировании по частотам общее средне-квадратичное значение остается неизменным.

Применение спектральных окон позволяет изменить преобразование Фурье таким образом, чтобы эта утечка сократилась до минимума. Этой процедуре сопутствуют ухудшение разрешения (т. е. его расширение) и потеря ортогональности, что приводит к уменьшению степеней свободы.

Как только что было показано, утечки происходить не будет,

если в окно данных будут попадать только целые числа циклов. Вместе с тем не следует забывать, что очертания спектрального окна, почти повторяющие график функции $(\sin x)/x$, позволяют получить разрешение не лучше $b = 1/P$. Кроме того, следует принять во внимание, что при случайных данных частотные компоненты имеют случайные числа циклов, и, следовательно, целое число циклов будет встречаться редко, а значит, утечка будет неизбежной.

Связь утечки с явлением Гиббса. Присутствие функции $(\sin x)/x$ в результатах обусловлено конечной длиной записи ряда. Такое ограничение длины достигается при помощи прямоугольного импульса, приводящего к разрывам. Вычисление преобразования Фурье равносильно приближению (подгонке) функции линейной комбинацией синусов и косинусов. Явление Гиббса отражает тот факт, что при такой подгонке из-за разрывов всегда возникают колебания вида $(\sin x)/x$. Если разрывы предварительно сглажены или «закруглены», то при подгонке ошибка уменьшится. Это сглаживание разрывностей достигается при помощи умножения на подходящую функцию во временной области. По теореме о свертке для преобразований Фурье такому умножению соответствует свертка (названная «спектральным окном») в области частот. Более подробно этот вопрос будет затронут ниже, при рассмотрении спектральных окон.

8.7. КАК ВЫЧИСЛЯТЬ СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Среди перечисленных выше стандартных методов вычисления спектров мощности и кросс-спектров были названы методы Блэкмена и Тьюки (1958) (см. приложение В). Эти методы основаны на соотношениях Винера—Хинчина, позволяющих получать спектр как преобразование Фурье корреляционной функции. Одна из основных причин, по которой такому подходу отдавалось предпочтение, состояла в вычислительной эффективности, обусловленной возможностью получения удовлетворительного спектра по усеченной корреляционной функции: вместо N^2 операций, которые были ранее необходимы, чтобы получить спектр из преобразования Фурье исходных данных цифрового временного ряда длины N , для вычисления m значений корреляционной функции требуется лишь примерно Nm операций умножения—сложения. Из-за громоздкости с вычислительной точки зрения метод преобразования Фурье для получения спектра не находил широкого применения, поэтому связанные с ним практические вопросы никогда тщательно не изучались.

Ныне скорость алгоритмов БПФ превратила метод, прежде сбрасываемый со счетов, в самый быстрый. Хотя ряд авторов

отмечает пользу БПФ в получении корреляционной функции для последующего применения метода Блэкумена—Тьюки, чаще всего в таком подходе нет никакой необходимости. Пожалуй, нельзя найти веских причин, по которым следует отказываться от непосредственного получения спектра в области частот в пользу методов, использующих для этой цели корреляционные функции. Несмотря на известное различие результатов с чисто математической точки зрения, почти для всех практических нужд они оказываются одинаковыми. Некоторые тонкости, касающиеся этого вопроса, будут освещены во втором томе.

При использовании метода БПФ требуется около $4Nr$ операций, где $N=2^p$. Как правило, максимальное запаздывание t для корреляционной функции выбирается примерно равным $0.05N-0.1N$. Например, при $N=4096$, т. е. при $p=12$, получается выигрыш в скорости примерно в $\frac{50}{12}-\frac{100}{12}$ раз, т. е. примерно в 4—8 раз. Это главная причина, из-за которой отдается предпочтение непосредственному применению БПФ; в следующих параграфах будет рассмотрен ряд других преимуществ, связанных со сглаживанием спектра.

В гл. 6 были рассмотрены различные алгоритмы БПФ: для N , равного степени 2; для N , равного произведению степеней 2, 3, 4 и 5; для произвольно больших значений N , равных степени 2. Алгоритм для степени 2 реализован почти во всех системах для анализа Фурье, базирующихся на мини-ЭВМ, а также в аппаратных устройствах для БПФ (см. книгу Рабинера и Гоулда (1978)). В качестве примеров назовем миникомпьютерные системы Time Data и Hewlett-Packard и аппаратные системы Spectral Dynamics, и Nicolet Scientific¹⁾. Алгоритмы для произведения степеней 2, 3, 4 и 5 иногда включаются в программное обеспечение систем с более мощными ЭВМ, например University Software Systems²⁾.

Особого внимания заслуживают ограничения на длину последовательности. В принципе можно написать программу для обработки временного ряда произвольной длины N , причем скорость вычислений возрастает, если N не простое, а составное число. На практике, как правило, ограничиваются программами для случая $N=2^p$, и если длина записи ряда данных не равна целой степени двух, то ряд либо укорачивают, либо дополняют нулями. Возможен и другой подход, при котором временная последова-

¹⁾ Time Data, «TDA Time Series Analysis Systems», Santa Clara, Calif., 1973; Hewlett-Packard, «HP2451 Fourier Analysis System», Santa Clara, Calif., 1973; Spectral Dynamics, «SD501 FFT Analyzer», San Diego, Calif., 1974; Nicolet Scientific, «Omniferous ©FFT Analyzer», Northvale, N. J., 1974.

²⁾ University Software Systems, «MAC/RAN III, User Information Brochure», El Segundo, Calif., 1973.

тельность разбивается на более короткие временные подпоследовательности (возможно, перекрывающиеся), а получающиеся результаты осредняются. Однако во многих случаях, когда уже получен ряд сравнительно неудобной длины, отбрасывание данных может привести к потере значительной части информации. Более того, желание собрать определенное число данных может наталкиваться на дополнительные трудности.

Что касается области частот, то в ней может оказаться неудобным интервал, с которым чередуются линии спектра. Предположим, что аналого-цифровой преобразователь имеет скорость выборки S , равную 1000 выб./с, как это нередко бывает на практике. Тогда для записи ряда, длина которого равна 1024, уйдет 1.024 с, поэтому $B_e=1/1.024=0.977$ Гц. Гораздо более удобной была бы в этом случае полоса 1.00 Гц. Поэтому во многих системах с мини-ЭВМ предусматриваются скорости выборок S , равные 256, 512, 1024 выб./с и т. д. (т. е. равные степени 2), что обеспечивает более удобные разрешения в области частот.

Обычно для оценивания спектров мощности, кросс-спектров и родственных им спектральных функций случайных данных выбирают один из трех способов. В первом из них проводится осреднение по области частот, во втором — осреднение по ансамблю, а в третьем способе обе эти возможности используются одновременно.

Под осреднением по области частот подразумевается осреднение соседних «несглаженных» спектральных оценок. Под осреднением по ансамблю понимается осреднение функций спектра мощности и кросс-спектра, взятых целиком; каждая из этих функций вычисляется для различных отрезков временной последовательности или пары временных последовательностей.

Основные выводы, касающиеся разрешающей полосы частот, длины записи и числа степеней свободы, без каких-либо изменений применимы к каждому из перечисленных методов. Однако некоторые особенности эффективных форм фильтров приводят к тому, что одним и тем же результатов получить нельзя, если обращаться к двум разным методам. Тем не менее при разрешении и числе степеней свободы, подогнанных друг к другу соответствующим образом, с чисто практической инженерной точки зрения результаты в целом оказываются эквивалентными.

При комбинированном подходе возможна любая последовательность чередования двух первых методов. Иными словами, можно сначала провести сглаживание каждого спектра в отдельности и потом выполнить осреднение по всему набору полученных спектров, а можно поступить и наоборот — сглаживать спектры, полученные после осреднения исходного набора спектров. Подробнее мы остановимся на этих методах в следующих параграфах.

8.8. ФУНКЦИИ ВРЕМЕННОГО СГЛАЖИВАНИЯ — ОКНА ДАННЫХ

Чтобы выделить определенные характеристики спектральных оценок, нередко прибегают к сглаживанию значений на концах случайного временного ряда. Временное сглаживание представляет собой умножение ряда на «окно данных»; эта операция аналогична умножению корреляционной функции на корреляционное окно. Поэтому временное сглаживание ряда эквивалентно применению операции свертки (см. гл. 7) к «несглаженному» преобразованию Фурье. Цель временного сглаживания, рассматри-

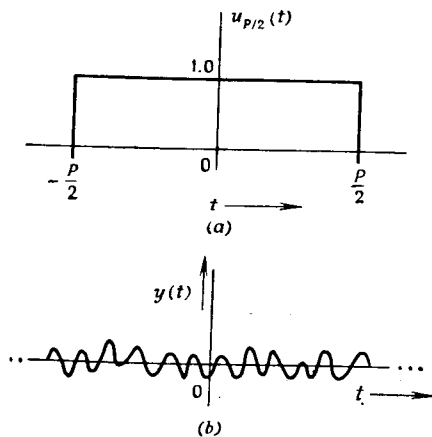


Рис. 8.9. *a* — прямоугольный импульс для БПФ; *b* — выборочная последовательность данных, имеющая длину P .

ваемая с точки зрения его проявлений в области частот, состоит в том, чтобы подавить влияние больших боковых всплесков эффективной формы фильтра, связанного с вычислением приближенного преобразования. Во временной области временное сглаживание служит для «округления» возможных разрывностей на концах конечного отрезка исследуемой временной последовательности.

Как и в случае корреляционной функции, на конечный отрезок случайного временного ряда можно смотреть как на произведение прямоугольного импульса $u_{P/2}(t)$, имеющего конечный носитель (рис. 8.9, *a*), и временной последовательности $y(t)$ бесконечной длины (рис. 8.9, *b*). Поэтому для конечного преобразо-

вания ряда $x(t)$ возможны два представления:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-P/2}^{P/2} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) u_{P/2}(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

Поскольку произведение функций преобразуется в свертку, имеем

$$X(f) = Y(f) * U_{P/2}(f),$$

где

$$U_{P/2}(f) = \int_{-P/2}^{P/2} u_{P/2}(t) \exp(-j2\pi ft) dt.$$

Без временного сглаживания эффективная форма фильтра имеет вид, показанный на рис. 8.10. Заметим, что ширина прямоугольного импульса равна P , где P — длина записи ряда.

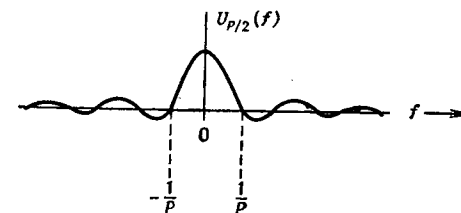


Рис. 8.10. Эффективная форма фильтра без временного сглаживания.

Из-за больших боковых выступов мощность, содержащаяся в данных с частотами, некратными $1/P$, будет осредняться в величине, сосредоточенной в точке $f=0$. Несколько ухудшая разрешение, можно улучшить характеристики боковых выступов.

В работе Слоуна (1969) содержится вывод о неприемлемости временного сглаживания (названного «линейно модифицированным» оцениванием) для рядов гауссовских случайных данных. Не отрицая пользы этой операции для подавления утечки в случае данных «типа сигнала», он подчеркивает факт потери степеней свободы в случае чисто случайных данных. Эти замечания правильны, но, с нашей точки зрения, обычно шумовые данные обладают значительным сходством с данными «типа сигнала», и, следовательно, в типичных случаях целесообразно применять временные сглаживания некоторых типов. Мы считаем, что данные, встречающиеся на практике, имеют чаще всего такой же характер, как данные типа сигнала, даже если полученные данные — гауссовские. Например, искажение оценок, обусловленное

утечкой, создает серьезные препятствия при изучении вибрационных, акустических, сейсмических и большинства экономических данных, дающих неустойчивые формы спектров. Мы должны отметить, что в наших экспериментальных исследованиях искажение, вызванное утечкой, и размывание при конечном разрешении оказывались по крайней мере такой же важной проблемой, как и недостаточность имеющихся степеней свободы. В силу этого нам трудно согласиться с выводом Слоуна о том, что «линейная модификация приводит к ухудшению разрешения без компенсации в виде убывания дисперсии». Убывание дисперсии редко

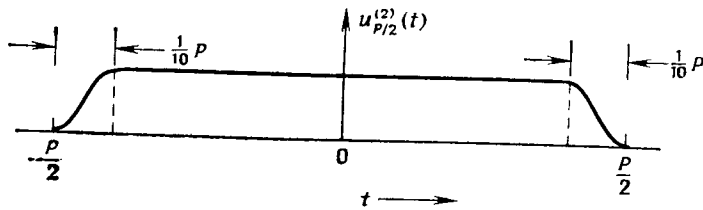


Рис. 8.11. Косинусное сглаживающее окно данных.

составляет проблему, в то время как подавление утечки служит полезным средством уменьшения ошибки.

В работе Бингхэма и др. (1967) для сглаживания на крайних отрезках ряда, составляющих примерно по 1/10 всей длины ряда, предлагается окно

$$u_{P/2}^{(2)}(t) = \begin{cases} \cos^2 \frac{5\pi t}{T}, & -\frac{P}{2} \leq t < -\frac{4P}{10}, \\ 1, & -\frac{4P}{10} \leq t < \frac{4P}{10}, \\ \cos^2 \frac{5\pi t}{T}, & \frac{4P}{10} \leq t < \frac{P}{2}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Это окно носит название косинусного (рис. 8.11). Далее, нетрудно показать, что умножение на полный колоколообразный косинус

$$u_{P/2}^{(3)}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{2\pi t}{T} \right), \quad \text{где } -\frac{P}{2} \leq t \leq \frac{P}{2},$$

эквивалентно применению дискретной свертки с весами $(1/4, 1/2, 1/4)$, т. е.

$$U_{P/2}^{(3)}\left(-\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{4}, \quad U_{P/2}^{(3)}(0) = \frac{1}{2}, \quad U_{P/2}^{(3)}\left(\frac{1}{P}\right) = \frac{1}{4},$$

а во всех точках, кратных $1/P$ (тех, в которых вычисляется конечное дискретное преобразование Фурье), функция $U_{P/2}^{(3)}(f)$

равна 0. Тем не менее сокращение участков сглаживания до $(1/10)P$ на концах последовательности несколько меняет эту картину; получающаяся эффективная форма фильтра изображена на рис. 8.12.

Оба приведенных окна, согласно Слоуну, относятся к классу окон, имеющих преобразования Фурье вида

$$U_{P/2}(\omega, m) = \frac{\sin\left(\frac{2m-1}{2m}\frac{\omega P}{2}\right)}{\left(\frac{2m-1}{2m}\frac{\omega}{2}\right)} \left\{ \frac{\left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2}{\left[\left(\frac{2\pi m}{T}\right)^2 - \omega^2\right]} \right\} \cos \frac{P}{4m}. \quad (8.6)$$

Из этой формулы при $m=5$ получаем $U_{P/2}^{(2)}(\omega)$, а при $m=1$ получаем $U_{P/2}^{(3)}(\omega)$.

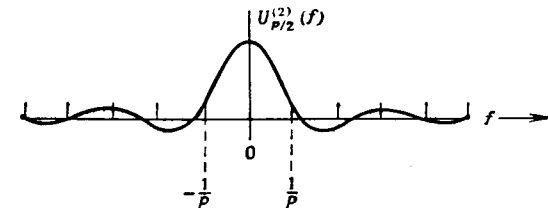


Рис. 8.12. Эффективная форма фильтра с косинусным временным сглаживанием.

Выбор функции временного сглаживания во многих отношениях аналогичен конструированию электрического фильтра в технике. Ниже будет рассмотрено построение двух специальных окон, в основе выбора которых лежит компромисс между допустимым объемом утечки, потерей разрешения и соответствующей потерей степеней свободы.

Окно Гудмэна — Эноксона — Отнеса (ГЭО). Первое окно, предложенное для ситуации, в которой необходимо сглаживание в приемлемо широкой полосе частот, носит название окна ГЭО. Оно играет роль сглаживающей функции не во временной, а в частотной области. С точки зрения вычислительных затрат сглаживания во временной и в частотной областях представляются примерно одинаковыми.

Сглаживанию во временной области (т. е. умножению) соответствует операция свертки в области частот. Для уменьшения вычислительных затрат желательно, чтобы число коэффициентов сглаживания было столь малым, насколько это возможно. По некоторым соображениям, в какой-то мере произвольным, было решено остановиться на семи весовых коэффициентах. Считается, что при этом достигается разумный компромисс между сложностью вычислений и гибкостью в выборе процедур сглаживания. Урав-

нение сглаживания имеет вид

$$\bar{X}(k) = \sum_{l=-3}^3 a(l) X(k+l) = X(k) + \sum_{l=1}^3 a(l) (X(k-l) + X(k+l)),$$

где

$$a(0) = 1, \quad a(-3) = a(3), \quad a(-2) = a(2), \quad a(-1) = a(1). \quad (8.7)$$

Чтобы избежать утечки, на эти веса накладывают условие вида

$$a(0) - 2a(1) + 2a(2) - 2a(3) = 0,$$

которое обеспечивает сокращение утечки мощности с больших расстояний пропорционально $1/f^4$.

Окно ГЭО имеет следующие коэффициенты¹⁾ (8.7):

$$a(0) = 1.0, \quad a(1) = 0.1817, \quad a(2) = -0.1707, \quad a(3) = 0.1476.$$

При таких коэффициентах спектральное окно оказывается на 10% шире, чем окно $(\sin x)/x$. Этому сопутствует потеря примерно 10% ст. св., что является приемлемым компромиссом в борьбе с боковыми всплесками.

Приведем для сравнения некоторые другие сглаживающие окна. На рис. 8.13 показаны основные спектральные окна для процедур сглаживания ГЭО, Хеннинга и 1/10-косинусной. На рис. 8.14 показано эффективное окно ПСМ при осреднении 12 оценок (что дает в спектральной оценке 24 ст. св.). На рис. 8.15 представлены соответствующие временные окна.

Критерий утечки. Для оценки относительной доли втекающей мощности, обусловленной боковыми выступами, был применен дополнительный критерий утечки, основанный на отношении общей мощности в сумме 12 спектральных окон к мощности главного выступа составного окна. Сумма 12 окон дает спектральную оценку с 24 ст. св., что в задачах, где оправдано применение спектрального анализа, считается близким к минимуму.

Отношение, на котором построен критерий, было без труда доведено до незначительных величин. При возрастании числа степеней свободы спектральных оценок это отношение становится только меньше. Для окна ГЭО его величина составляет 0.0073 (0.73%), а для окна Хеннинга — 0.0022 (0.22%).

Чтобы обеспечить, когда это требуется, свойство инвариантности дисперсии в результатах, следует принять дополнительные меры. Всякое окно данных изменяет дисперсию (или мощность) данных, так как разные участки временной последовательности

¹⁾ В этой формулировке считается, что начальная точка отсчета времени расположена посредине данных. Если эту точку перенести в начало, то у величин с нечетными индексами следует изменить знак, так как происходит поворот на 180° .

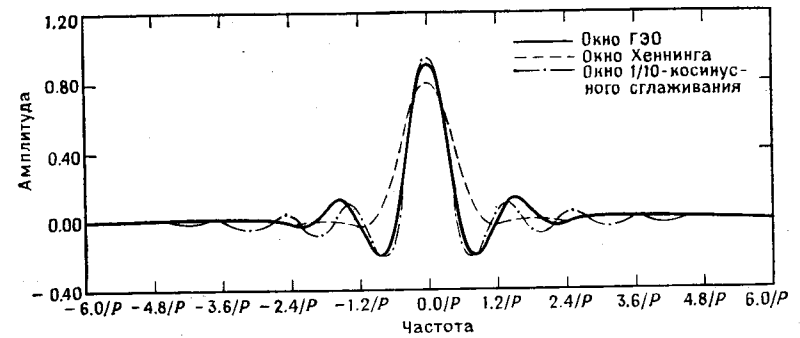


Рис. 8.13. Основные спектральные окна.

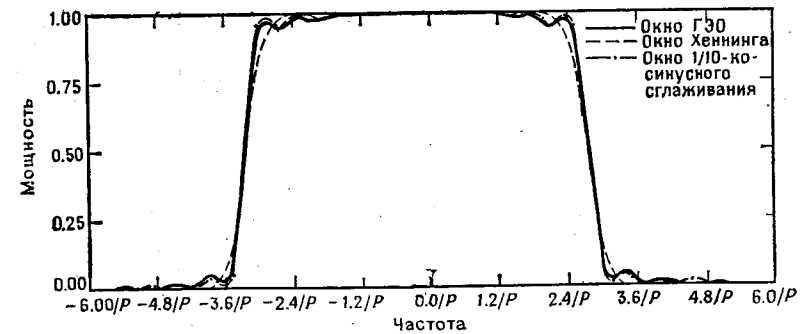


Рис. 8.14. Эффективная форма окна для ПСМ при осреднении 12 оценок основных типов.

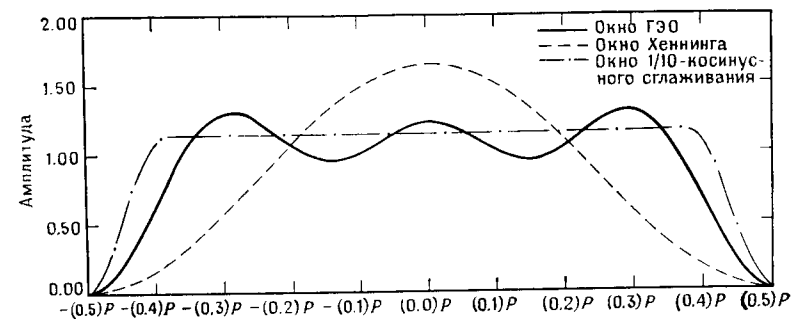


Рис. 8.15. Вид трех основных окон во временной области.

берутся с неодинаковыми весами. В результате происходит отбрасывание данных, которое приводит к потере ст. св. и к убыванию дисперсии. Величина этого сокращения характеризуется квадратом отношения площади, ограниченной функцией окна данных, к площади «прямоугольного» окна. Для окна Хеннинга, в котором первый коэффициент полагается равным 1.0, эта величина равна 0.375, для промежуточного способа Тьюки 0.875, для окна ГЭО 1.1679, Гудмэна 1.267. Чтобы площадь, ограниченная спектром мощности, оставалась инвариантной, нужно умножить этот спектр мощности на величину, обратную соответствующему множителю. С той же целью можно умножать временную последовательность или ее преобразование Фурье на квадратный корень соответствующего множителя.

Окно для осреднения по ансамблю. При необходимости вычисления спектра мощности (или кросс-спектра) осреднением спектров, полученных по отдельным отрезкам временной последовательности, выбор окон обязан удовлетворять немного другим критериям. В этом случае более важной становится задача сокращения так называемой «соседней» утечки. При сглаживании в области частот ее решение сводится к тем мерам, которые только что рассматривались. Дело в том, что два первых относительно больших боковых всплеска составляли очень малую долю главного максимума, получаемого после сглаживания. Это объясняется тем, что главный максимум раздвигается и становится больше, в то время как боковые всплески сохраняют, по существу, один и тот же объем.

Ситуация меняется, если частотное сглаживание отсутствует. При осреднении по ансамблю главный максимум осредняется с главным, а боковой всплеск — с боковым; их соотношение остается постоянным. В этом случае нужно окно, которое в значительно большей степени подавляет влияние боковых всплесков. Чтобы достичь этого, придется пожертвовать частью ст. св.; предполагается, что потери ст. св. можно избежать за счет увеличения длины записи или обработкой не смежных, а перекрывающихся отрезков временной последовательности.

При перекрытиях часть данных используется дважды, что равносильно умножению на 2. Допустим, что хвосты данных при временном сглаживании уменьшены вдвое. Тогда множители 2 и 0.5 взаимно уничтожат друг друга, и это сведет на нет потерю ст. св. Конечно, это достигается ценой времени вычислений, что порой имеет существенное значение.

На рис. 8.16 показаны спектральные окна до и после сглаживаний.

Спектральное окно (неофициально предложенное Гудмэном) для осреднения по временным отрезкам (или осреднение по ан-

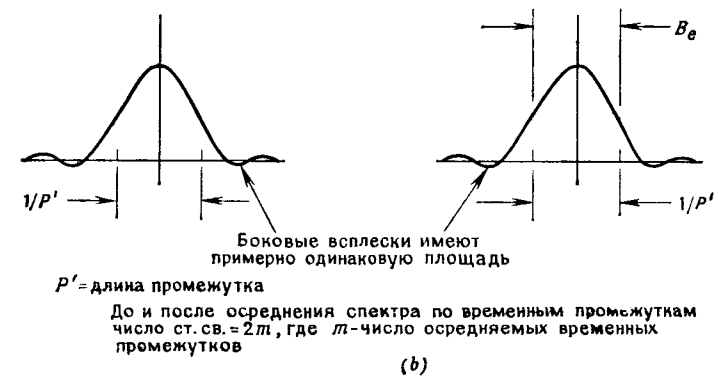
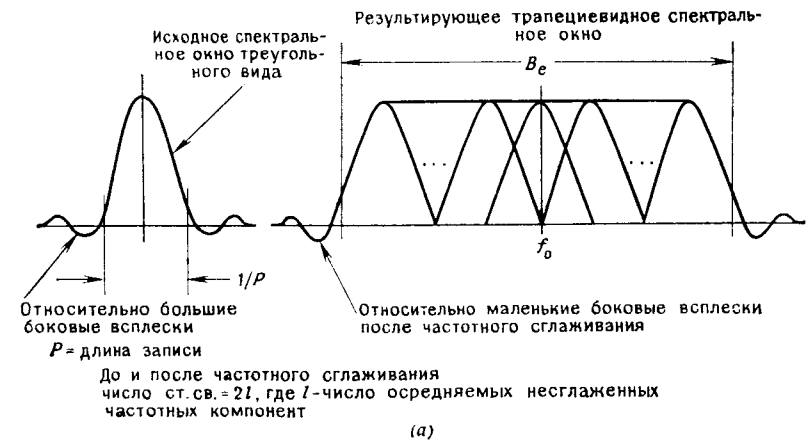


Рис. 8.16. Сглаживание плотностей спектра мощности, полученных посредством БПФ. *a* — осреднение в полосе частот; *b* — осреднение по ансамблю.

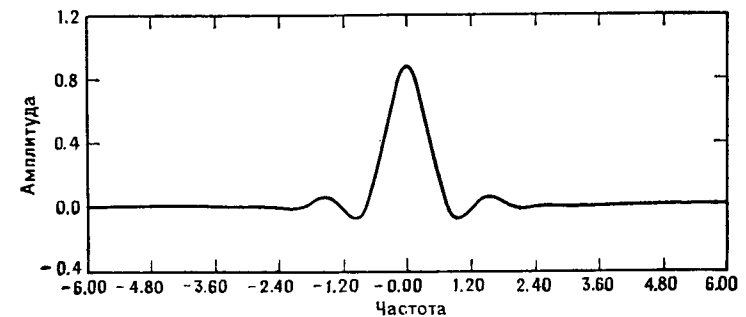


Рис. 8.17. Окно Гудмэна (в области частот).

самблю, см. ниже), построенное в отличие от окна ГЭО на менее формальной основе, имеет весовые коэффициенты

$$b(0) = 1.0, \quad b(1) = b(-1) = 0.35, \\ b(2) = b(-2) = -0.0875, \quad b(3) = b(-3) = 0.0625.$$

Для этого окна утечка составляет примерно 2%; когерентность между соседними оценками равна примерно 30%. Однако выступы, ближайшие к главному, имеют высоту, составляющую примерно

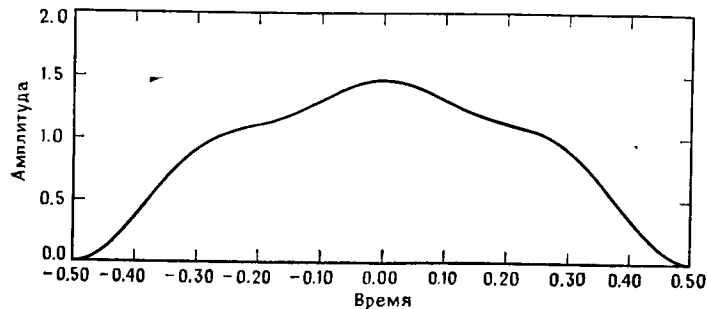


Рис. 8.18. Окно Гудмэна (во временной области).

2% высоты главного выступа. Форма этого окна представлена на рис. 8.17 (окно Гудмэна). Временной эквивалент окна показан на рис. 8.18.

Добавление нулей и интервал в области частот. Значения дискретного преобразования Фурье вычисляются с интервалом $b = 1/P = 1/(NT)$. Расстояния до первых пересечений нуля главным выступом окна $U_{P/2}$ также равны $B_e = 1/P$. Добавление нулей к последовательности никак не отражается на основной форме окна $U_{P/2}(f)$, поэтому ширина главного выступа остается неизменной. Однако, как следует из формулы для вычислений, шаг для оценок при увеличенной длине записи равен

$$b' = \frac{1}{(N + N_z)T},$$

где N_z — число добавленных нулей. Если, например, $N = N_z$, т. е. добавлено столько же нулей, сколько членов содержит исходная последовательность, то шаг уменьшится вдвое и возникнет картина, изображенная на рис. 8.19. Такое изменение шага вызывает неожиданные эффекты, поскольку свертка, применяемая к приближенному преобразованию Фурье, может и не обеспечить желаемого гашения боковых выступов. На самом деле эти выступы могут увеличиваться. Задачи модификации преобразований Фурье для тех случаев, когда необходимо добавлять про-

извольное число нулей, носят, по существу, такой же характер, что и конструирование фильтров эмпирическим способом. Эффект, к которому приводит добавление нулей, можно проследить на примере, предложенном в упр. 8.7.

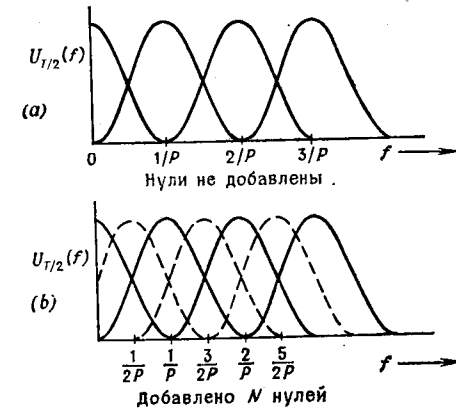


Рис. 8.19. Влияние добавления нулей на шаг чередования спектральных средних.

Спектр мощности получается из преобразования Фурье по формуле

$$\tilde{S}_x(k) = \frac{T}{N} |X(k)|^2 = \frac{T}{N} (\{\text{Re}[X(k)]\}^2 + \{\text{Im}[X(k)]\}^2),$$

где тильдой \sim снабжена «грубая», или «несглаженная», оценка.

Если число данных равно N , то грубые оценки разместятся так, как это показано на рис. 8.20. Можно показать, что грубые спектры мощности (см. эту главу выше) приближенно имеют распределение χ^2 с 2 ст. св. Иначе говоря, каждая точка спектра имеет такое же распределение, как сумма квадратов двух независимых случайных величин, имеющих гауссовские распределения. Стандартная ошибка оценок несглаженного спектра вычисляется по формуле из § 8.5 и равна

$$\varepsilon = \left(\frac{2n}{n^2}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2}\right)^{1/2} = 1,$$

или 100%. Для многих целей такое значение неудовлетворительно. Оценки локально гладкого спектра, разделенные интервалом $1/P$, являются почти некоррелированными (здесь корреляция — перекрытие соседних оценок, см. рис. 8.19, а).

Способы вычислений. Для того чтобы добиться роста числа степеней свободы и сократить тем самым статистическую изменчивость, существуют три способа: осреднение по частотам, осред-

нение по ансамблю, комбинирование этих двух осреднений. Перейдем к объяснению этих методов.

Осреднение по частотам. Сглаженная оценка

$$\hat{S}(k) = \frac{1}{l} (\bar{S}(k) + \bar{S}(k+1) + \dots + \bar{S}(k+l-1)), \quad (8.8)$$

полученная осреднением l соседних оценок спектра, имеет распределение χ^2 с числом степеней свободы, равным примерно $2l$ (крышкой снабжена сглаженная оценка); это следует из теоремы

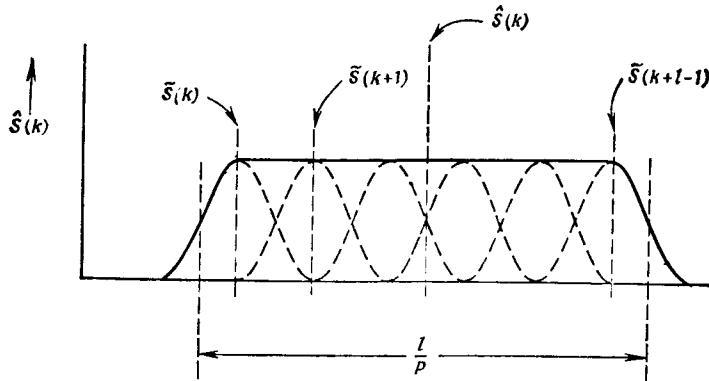


Рис. 8.20. Эффективная форма фильтра после осреднения.

о сложении величин, имеющих распределение χ^2 . Трапециевидная эффективная форма фильтра, изображенная на рис. 8.20, объясняется тем, что она складывается из треугольников, перекрывающихся в точках половинной мощности. Заметим, что эффективная полоса частот B_e теперь приблизительно равна $lb = l/P$.

Можно считать, что оценка $\hat{S}(k)$ располагается в середине промежутка частот от kb до $(k+l-1)b$. Этот метод получения дополнительных ст. св. путем сглаживания мы называем «осреднением по частотам».

Окончательные оценки $\hat{S}(k)$ можно расположить любым удобным способом. Если достаточно окончательных оценок, перекрывающихся в точках половинной мощности, то после осреднения и децимации их окажется N/l штук, причем смежные пары оценок будут заметно коррелировать друг с другом.

Простое скользящее арифметическое среднее в формуле (8.8) можно заменить сверткой более общего вида

$$\hat{S}_x(k) = \sum_{i=-m}^m a(i) \bar{S}_x(k-i), \quad \text{где } k=0, 1, \dots, N/2.$$

Простым примером такой свертки служит свертка Хеннинга. Для нее $m=1$, $a(0)=1/2$, $a(-1)=a(1)=1/4$; грубые оценки располагаются с интервалом $b=1/P$, а нули не добавляются. Веса Хеннинга можно считать частным случаем биномиальных весов сглаживания (ненормированных):

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & 2 & 1 & \\ & & & & & \\ & 1 & & 3 & & 1 \\ & & & & & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

В пределе эти весовые коэффициенты можно получать как ординаты функции плотности гауссовского распределения. Поскольку преобразование Фурье гауссовской функции имеет гауссовское распределение, временное окно также имеет очертания гауссовской функции плотности.

Заметим, что другим простым «кандидатом» для сглаживания служит цифровой RC-фильтр (экспоненциальный). Если последовательность значений ПСМ $\bar{S}(0), \bar{S}(1), \dots$ рассматривать как временной ряд, то процедуру сглаживания будет определять рекурсивная формула ($k=0, 1, \dots, N/2$)

$$\hat{S}(k) = \alpha \bar{S}(k) + (1-\alpha) \hat{S}(k-1). \quad (8.9)$$

Как правило, значение α равно 0.05 и 0.10. Значения в высоких частотах осредняются при сглаживании с помощью рекурсивных фильтров такого типа только со значениями в более низких частотах. Кроме того, применение этих фильтров вносит частотный сдвиг (которому соответствует временная задержка при использовании фильтра во временной области). Следовательно, формула (8.9) сама по себе для сглаживания спектра не подходит. Однако если после применения операции (8.9) произвести обратное действие, заданное рекурсивной формулой $\hat{\hat{S}}(k) = \alpha \hat{S}(k) + (1-\alpha) \hat{\hat{S}}(k+1)$, где $k=N/2, N/2-1, \dots, 0$, то сдвиг по фазе исчезнет. При этом сглаживающий эффект усиливается (в том смысле, что фильтрация проводится дважды).

Вообще, для сглаживания спектра можно воспользоваться любым рекурсивным фильтром. Но чтобы сделать эффект его применения симметричным и удалить сдвиг по фазе, фильтрацию следует провести в обе стороны. Если ИКО-фильтры построены так, что их весовые коэффициенты симметричны (т. е. фазовый сдвиг равен нулю), то ограничиваются фильтрацией лишь в одну сторону. В обоих случаях сглаживание на концах спектра производят, используя периодичность ПСМ.

Обратим внимание еще на некоторые свойства спектральных оценок, полученных сглаживанием при помощи свертки общего

вида (ядер). Сглаживающее ядро можно строить, имея в виду операцию во временной области (в данном случае — окно смещений). При этом выборе «хорошей» формы низкочастотного фильтра будет отвечать сглаживающее ядро с очертаниями одной из типичных импульсных функций отклика, рассмотренных в гл. 4 и 5. Напомним, что эти функции принимают как отрицательные, так и положительные значения. Поэтому можно столкнуться с классическим парадоксом метода Б — Т — отрицательными спектральными оценками. Они могут возникнуть для спектров неустойчивой формы. Возможные неудобства, связанные с появлением таких оценок, отступают на второй план, поскольку в самом факте их наличия содержится информация о том, что исследуемый спектр быстро меняется, или о том, что его значения очень малы и близки к отрицательным.

Метод осреднения по частотам. В качестве процедуры получения приемлемых спектральных оценок для последовательности длины N может служить следующая.

1. Если позднее нужно будет получить корреляционную функцию, для чего понадобится обратное преобразование спектра, то начинают с дополнения исходной последовательности данных нулями до длины $2N$. (Будем считать, что этого не сделано.)

2. Вычисляется конечное преобразование Фурье последовательности данных:

$$\tilde{X}(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x(i) W_N^{ik}, \quad \text{где } k=0, 1, \dots, N-1.$$

3. К несглаженному преобразованию Фурье применяется спектральное окно ГЭО, т. е. вычисляется свертка

$$X(k) = \tilde{X}(k) + \sum_{i=1}^3 a(i) [\tilde{X}(k-i) + \tilde{X}(k+i)],$$

где $k=0, 1, \dots, N-1$, $a(1) = 0.1817$, $a(2) = -0.1707$, $a(3) = 0.1476$. Крайние значения (для индексов, меньших нуля и больших $N-1$) вычисляют, исходя из периодичности преобразования $\tilde{X}(k)$: $\tilde{X}(N+k) = \tilde{X}(k)$.

4. Вычисляются квадраты абсолютных величин, которые нормируются так, чтобы получались «несглаженные» спектральные оценки мощности:

$$\bar{S}_x(k) = \frac{1}{P} |X(k)|^2, \quad k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

(Если нужно получить мощности в отрицательных частотах, то здесь необходимо взять в два раза более длинную последовательность.)

5. Чтобы подправить оценки, их умножают на коэффициент, отвечающий сглаживанию ГЭО:

$$0.856 \bar{S}_x(k) \rightarrow \tilde{S}_x(k), \quad k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}.$$

Это необходимо делать, чтобы компенсировать убывание дисперсии, вызванное временным сглаживанием, отвечающим примененному спектральному окну. Приведенное конкретное значение коэффициента определяется из того факта, что центральный весовой коэффициент был выбран (в целях экономии вычислений) равным единице.

6. После этого сглаженные оценки получаются осреднением соседних несглаженных оценок по формуле

$$\hat{S}_x(k) = \frac{1}{2l+1} \sum_{j=-l}^l \tilde{S}_x(k+j),$$

где $k=0, 2l+1, 2(2l+1), \dots, m(2l+1)$. При этом считается, что полученные значения спектра, т. е. величины $\hat{S}_x(k)$, расположены в частотах

$$f=0, (2l+1)b, 2(2l+1)b, \dots, m(2l+1)b.$$

Отметим, что это завершающее сглаживание можно заменить сверткой более общего вида, а интервал чередования частот можно сделать более мелким, чем B_c . Нередко от предложенного способа вычисления свертки заставляют отказаться в пользу подхода Б — Т соображения экономии. Действительно, свертку в области частот иногда выгодно заменить умножением функций (в данном случае — окна смещения на ковариационную функцию) во временной области. При этом сначала при помощи обратного преобразования получают корреляционную функцию, умножают ее на соответствующее окно смещения, а затем получают посредством преобразования сглаженный спектр, сопровождая это при необходимости децимацией спектральной функции.

Теперь обратимся к другому методу вычислений.

Осреднение по ансамблю. Для длинных рядов данных более подходит метод, при котором вся временная последовательность разбивается на отрезки, и по ним определяется осредненный спектр. То название метода — осреднение по ансамблю, — которое уже встречалось раньше, вообще говоря, не совсем удачно, поскольку никакого ансамбля (множества) выборочных функций случайного процесса, по которым определяются статистические средние, не имеется. Взамен мы имеем лишь набор временных последовательностей, представляющих собой отрезки одной и той же временной последовательности (выборочной функции случайного

процесса). Следует отметить, что рассматриваемый метод наиболее часто реализуется в системах для анализа Фурье, построенных на мини-ЭВМ, и в аппаратных цифровых системах.

Получая статистики осреднением по набору отрезков ряда, мы неявно предполагаем, что исследуются стационарные процессы. На практике наши методы можно приспособить для неоднородных во времени процессов, статистические характеристики которых на протяжении отрезка меняются не слишком заметно.

Наиболее естественный подход к разбиению ряда должен основываться на увязке длины отрезков с ограничениями разрешающей способности. При этом выбору $B_e = b$ отвечает длина отрезков, равная $P_s = 1/b$; эту длину наращивают за счет добавления нулей до ближайшей степени 2. В качестве спектрального окна предлагается использовать окно Гудмэна, имеющее маленькие боковые выступы (рис. 8.17). Вычислительная процедура сводится к следующему.

Метод осреднения по ансамблю.

1. По значению разрешения вычисляется пробное значение длины отрезка ряда $P'_s = 1/b$. Определяется p — наименьшая степень 2, удовлетворяющая условию

$$\frac{P'_s}{T} = N'_s \leq N_s = 2^p.$$

Если $2^{p-1} < N'_s \leq 1.25 \cdot 2^{p-1}$, то длина отрезка берется равной $N_s = 2^{p-1}$; в противном случае полагают $N_s = 2^p$. Если выбрано значение $N_s = 2^{p-1}$, то вычисляется новое разрешение $B_e = b = 1/2^{p-1}$. (Множитель 1.25 выбран произвольно; в экспериментах авторов этот выбор хорошо оправдал себя.)

2. По формуле

$$m < \left[\frac{N}{N_s} + 1 \right],$$

где скобками обозначена целая часть числа, определяется общее число отрезков. Если длина записи фиксирована, как правило, получается один «короткий» отрезок длины $N_m = N - (p-1)N_s$. При необходимости этот последний отрезок увеличивают добавлением нулевых значений, доводя его до длины N_s .

3. Для завершающего осреднения определяются весовые коэффициенты, с которыми берутся все спектры. Для первых $(m-1)$ спектров эти коэффициенты получают по формуле $\omega = N_s/(mN'_s)$; последнему отрезку соответствует весовой коэффициент $\omega_m = N_s/(mN_m)$. В случае равных отрезков все веса полагаются равными $1/m$.

4. Для первой N'_s -точечной последовательности, дополненной, если необходимо, нулями до длины $N_s = 2^p$, вычисляется конеч-

ное преобразование Фурье

$$\bar{X}_l(k) = \sum_{i=0}^{N_s-1} x_l(i) W_{N_s}^{ik}, \quad l=1,$$

где l — номер отрезка.

5. К несглаженному преобразованию Фурье применяется спектральное окно Гудмэна ($k=0, 1, \dots, N_s-1$)

$$X_l(k) = \bar{X}(k) + \sum_{i=1}^3 b(i) [\bar{X}_l(k-i) + \bar{X}_l(k+i)],$$

$$b(1) = 0.35, \quad b(2) = -0.0875, \quad b(3) = 0.0625.$$

6. Вычисляя квадраты абсолютных величин и соответствующим образом нормируя их, получают «грубые» спектральные оценки

$$\bar{S}_x(k) = \frac{1}{P_s} |X(k)|^2, \quad k=0, 1, \dots, \frac{N_s}{2}.$$

7. Полученные оценки подправляют, умножая их на коэффициент, отвечающий сглаживанию Гудмэна

$$(1.267) \quad \bar{S}_x(k) \rightarrow \tilde{S}_x(k).$$

8. Для отрезков $l=2, 3, \dots, m$ повторяют шаги 4—7.

9. Осредняя m грубых спектров, вычисляют сглаженные оценки

$$\hat{S}_x(k) = \omega \sum_{l=1}^{m-1} \tilde{S}_{sl}(k) + \omega_m \tilde{S}_{xm}(k), \quad k=0, 1, \dots, \frac{N_s}{2}-1.$$

Полученные $N_s/2$ оценок спектра (возможно, коррелирующих) считают расположенными в частотах

$$f = 0, b, 2b, 3b, \dots, \left(\frac{N_s}{2}\right)b;$$

каждая из оценок имеет примерно $n = 2m$ степеней свободы.

Предложенный метод часто применяют в тех экспериментальных ситуациях, где для всех практических целей в распоряжении оказываются ряды произвольной длины. В этом случае длину отрезков ряда обычно можно подобрать так, чтобы она вместе со скоростью выборки обеспечила нужное разрешение. Кроме того, скорость выборки можно установить так, чтобы величина B_e получила удобные целые значения. Например, если $N = 256$ и $S = 256$ выб./с, то

$$P = N \frac{1}{S} = 1 \text{ с}, \quad B_e = \frac{1}{P} = 1 \text{ Гц}.$$

Чтобы получить удобное разрешение, можно выбрать $S = 2.56, 25.6, 2560$ выб./с или целые кратные этим значения.

Другим значениям степеней 2^p будут отвечать другие значения скоростей выборки. Наконец, в этом случае реального времени веса отрезков всегда одинаковы и равны $\omega = 1/m$, где m — общее число отрезков.

Комбинированный метод. Оба предыдущих метода — осреднения по частотам и осреднения по ансамблю — представляют собой линейные операции общего вида. Поэтому их последовательное применение в любом порядке также будет линейной (усредняющей) операцией. При осреднении по m отрезкам с последующим усреднением l соседних спектральных оценок в итоге получаются оценки, число степеней свободы которых равно $n \approx 2lm$; разрешение в этом случае равно $B_e \approx l/P_s$. Поскольку линейные операции осреднения перестановочны, их последовательность не имеет значения — результат оказывается одним и тем же (без учета ошибок округления).

Необходимо ответить на два вопроса.

1. Как следует определять длину отрезка?

2. Какие спектральные окна должны использоваться?

Привести совершенно точные ответы на эти вопросы нельзя. В основу выбора длины отрезка естественно положить требование минимизации времени вычислений. Довольно близко к этому требованию подходит такое условие на выбор величины отрезка, при котором число нулей, добавляемых к отрезку, минимально, а разрешение так близко к выбранному аналитиком-исследователем, насколько это возможно. Лучшего приближения к нужному разрешению можно достичь, обратившись к более общему алгоритму для произведения степеней 2, 3, 4, 5 вместо варианта для степени 2.

Рассмотрим пример. Предположим, что при скорости выборки $S = 10\,000$ Гц необходимо получить полосу частот $B_e = 15$ Гц. Минимальная возможная длина отрезка равна

$$P_s = \frac{1}{B_e} = \frac{1}{15} = 0.0667 \text{ с.}$$

Ей соответствует число точек, равное

$$N_s = \frac{P_s}{T} = P_s S = 0.0667 \times 10\,000 = 667.$$

Для 2^p -алгоритма наименьшее возможное число, до которого следует добавлять нули, равно 1024; следовательно, в этом случае нужно добавить $1024 - 667 = 357$ нулей. В качестве другой возможности выступает случай $3 \times 667 = 2001$ точки, в котором до нужного числа остается добавить 23 нуля; чтобы получить при этом разрешение, близкое к заданному, можно проводить частотное сглаживание троек соседних спектральных величин.

При этом на последнем этапе должен получиться спектр в шагом

$$3b = 3 \frac{10\,000}{2048} = 14.65.$$

На самом деле разрешение окажется несколько шире и будет определяться приближенной формулой

$$B_e = 2b + 5 \approx 14.76.$$

Это объясняется тем, что конечные компоненты спектра вносят в полную ширину несколько больший вклад. Число ст. св. на последнем этапе зависит от всей длины записи и определяется числом спектров в осреднении по ансамблю. Нужно число ст. св. можно получить, увеличивая число осредняемых спектров до необходимых (или возможных) границ. Отметим, что частотное осреднение необходимо проводить только один раз, после всех осреднений по ансамблю. Это несколько сокращает время вычислений.

Нами рассмотрен следующий алгоритм выбора длины отрезка.

1. Вычисляется величина $P_s = 1/B_e$, где B_e — заданное разрешение.

2. Определяется пробное число точек $N_s = P_s/T$.

3. Целые кратные ему числа kN_s ($k = 1, 2, \dots$) сравниваются с 2^p .

4. Фиксируется наименьшее значение p , которое дает наименьшее число нулей. Число полос частот, по которым проводится осреднение, равно соответствующему k .

Для алгоритма с произведением степеней 2, 3, 4 и 5 третий шаг заменяется сравнением со значениями из табл. 6.2. На практике произведение степеней 2, 3, 4 и 5 редко не совпадает с нужной длиной в точности.

Кросс-спектры, передаточная функция и когерентность. По существу, приемы вычисления кросс-спектров и спектров мощности одинаковы. Передаточные функции и функции когерентности будут досконально разобраны в гл. 9, но основа их вычисления проста и будет рассмотрена сейчас.

Если необходимо получить функции плотности кросс-спектра, то начинают с вычисления $Y(k)$ — второго преобразования Фурье. Вслед за этим получают оценку спектральной плотности «несглаженного» кросс-спектра ($k = 0, 1, \dots, N/2$)

$$\tilde{S}_{xy}(k) = \frac{1}{P} X^*(k) Y(k) = \tilde{C}_{xy}(k) - j\tilde{Q}_{xy}(k).$$

Будем считать, что используются, если необходимо, те модификации преобразования Фурье, которые позволяют избежать утечки.

Нередко для одновременного вычисления двух преобразований применяют формулы (6.8) и (6.9).

Заключительное сглаживание можно выполнять любым из предложенных для ПСМ способом — осреднением по частотам, осреднением по ансамблю, комбинированным способом.

Как правило, для кросс-спектра вычисляют абсолютную величину $|\hat{S}_{xy}(k)|$ или ее квадрат $|\hat{S}_{xy}(k)|^2$, а также фазу $\hat{\theta}_{xy}(k)$ (в градусах), определяемые равенствами

$$\begin{aligned} |\hat{S}_{xy}(k)|^2 &= \hat{C}_{xy}^2(k) + \hat{Q}_{xy}^2(k), \\ \hat{\theta}_{xy}(k) &= \frac{360}{2\pi} \operatorname{arctg} [\hat{Q}_{xy}(k)/\hat{C}_{xy}(k)] \quad (\text{в градусах}), \\ |\hat{S}_{xy}(k)| &= \sqrt{|\hat{S}_{xy}(k)|^2}, \quad k=0, 1, \dots, N/2. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Получение кросс-спектра само по себе редко служит конечной целью. Чаще всего его вычисление бывает промежуточным этапом при получении тесно связанных с ним передаточной функции и функции когерентности. Передаточная функция определяется отношением ($k=0, 1, \dots, N/2$)

$$\hat{H}_{xy}(k) = \frac{\hat{S}_{xy}(k)}{\hat{S}_x(k)}.$$

Обычно ее записывают через модуль, называемый *коэффициентом усиления*, или квадрат модуля и фазу. Коэффициент усиления вычисляется по формуле ($k=0, 1, \dots, N/2$)

$$|\hat{H}_{xy}(k)| = \frac{|\hat{S}_{xy}(k)|}{\hat{S}_x(k)}.$$

Фаза передаточной функции совпадает с фазой кросс-спектра и, следовательно, вычисляется по формуле (8.10). Передаточная функция определяет соотношение между двумя временными последовательностями, выраженное в виде функции частот. Комплексные значения этой функции обычно записывают в полярных координатах — через коэффициент усиления (модуль) и фазу. К подробному изучению передаточной функции мы вернемся в гл. 9.

К кросс-спектру тесно примыкает функция когерентности, определяемая формулой ($k=0, 1, \dots, N/2$)

$$\hat{\gamma}_{xy}^2(k) = \frac{|\hat{S}_{xy}(k)|^2}{\hat{S}_x(k)\hat{S}_y(k)}.$$

В некоторых случаях с функцией когерентности связывают также фазу. В других случаях в качестве значений функции когерентности берут положительные значения квадратного корня;

при этом функция когерентности становится обобщением понятия коэффициента корреляции, встречающегося в классической статистике. Сдвигу фазы в 0° отвечает положительная корреляция; сдвигу фазы в 180° соответствует отрицательная корреляция. Для других фаз аналогов в элементарной статистике нет. Более широко эти вопросы будут рассмотрены в гл. 9.

Линейное осреднение. Все процедуры сглаживания для ПСМ, рассмотренные выше, относятся к классу *квадратичных* сглаживающих процедур. В некоторых ситуациях более точных спектральных оценок позволяет достичь осреднение по ансамблю временных промежутков, т. е. операция

$$\bar{x}(i) = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m x_l(i), \quad i=0, 1, \dots, N-1. \quad (8.11)$$

Если промежутки статистически независимы, то предложенный метод применять бессмысленно из-за быстрого стремления суммы (8.11) к среднему значению процесса, которое в случае процесса с нулевым средним будет равно 0. Покажем, каким образом можно извлечь пользу из линейного осреднения в практически важных ситуациях со статистически зависимыми промежутками.

Отметим, что операции (8.11) эквивалентно осреднение преобразований Фурье, поскольку

$$\bar{X}(k) = \mathcal{F}[\bar{x}(i)] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{m} \sum x_l(i)\right] = \frac{1}{m} \sum \mathcal{F}[x_l(i)].$$

Иначе говоря, осреднение и преобразование Фурье как линейные операции перестановочны. Принимая это во внимание, нетрудно понять, в чем заключается польза линейного осредне-

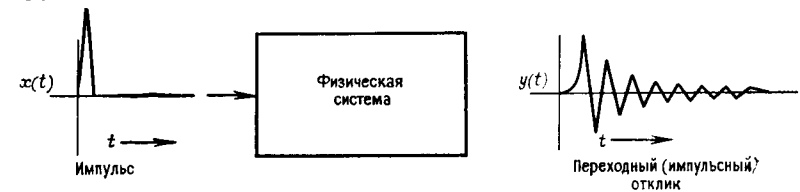


Рис. 8.21. Импульс и переходный отклик линейной системы.

ния. Мы ограничимся здесь объяснением его преимуществ лишь на интуитивном уровне, оставляя читателю возможность более полного знакомства с вопросом по работе Норина и Слоуна (1975).

Рассмотрим отклик физической системы на импульс, поступивший на вход. Очевидно, что возникающий переходный отклик полностью затухает по прошествии некоторого промежутка времени (рис. 8.21). Отличным примером отклика такого рода может

служить звучание колокола после удара его языка. Временную последовательность можно рассматривать как последовательность импульсов, разделенных бесконечно малыми интервалами (рис. 8.22). Поэтому при вычислении спектральных оценок ограничение пары временных последовательностей некоторым конечным промежутком времени неизбежно приводит к потере той части переходного отклика на выходе, которая соответствует последней части входа. Чем больше длина ограничивающего

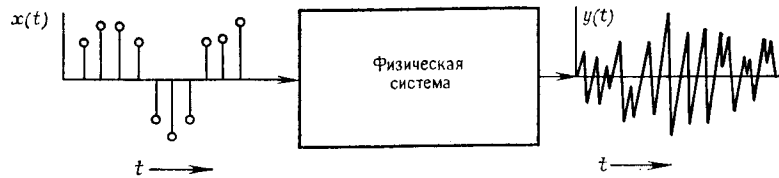


Рис. 8.22. Отклик на временную последовательность как на последовательность импульсов.

промежутка по отношению к длине переходного отклика, тем меньше ошибка, вызванная этим ограничением.

Для области частот рассмотренный эффект истолковывают как ошибку, обусловленную слишком широкой разрешающей полосой. В этой ситуации на первый план выходит тот факт, что линейное осреднение позволяет возместить ошибку, вызванную размыванием, даже при слишком широком разрешении.

Будучи связанными ограничениями, диктуемыми длиной отрезка, мы не можем получить дополнительных точек для спектральных функций и, следовательно, улучшить разрешения. В то же время можно минимизировать ошибку в тех точках, где вычисляются спектры. Помимо сокращения ошибок размывания мы получим *дополнительный выигрыш — уменьшим изменчивость!* Это объясняется тем, что при линейном осреднении посторонний независимый шум сглаживается.

Со статистической точки зрения оценки ПСМ и ПКС представляют собой функции второго порядка (квадратичные); их аналогами служат дисперсия и ковариация. Аналогом линейного осреднения служит оценка среднего значения. В случае некоррелирующих выборок данных оценка среднего значения просто сходилась бы к нулю. Если же выборки коррелируют, то получится более точная оценка импульсного отклика.

Напомним, что при обсуждении подмены частот подчеркивался следующий факт: если вычисляется обратное преобразование частотной функции (в частности, интересующих нас здесь в первую очередь передаточных функций), то в итоге получается искаженная (круговая) временная функция. Иными словами,

получается функция

$$h'(i) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(i - nP), \quad \text{где } P = NT. \quad (8.12)$$

В этом случае

$$h'(i) = b \sum_{k=0}^{N-1} H(k) W_N^{-ik}, \quad \text{где } k=0, 1, \dots, N-1;$$

будем считать, что $H(k)$ — точные значения передаточной функции в тех точках, где она вычислена (рис. 8.23). Рассуждая в обратном порядке, нетрудно понять, что если при вычислении передаточной функции ограничиться взятым без изменений вре-

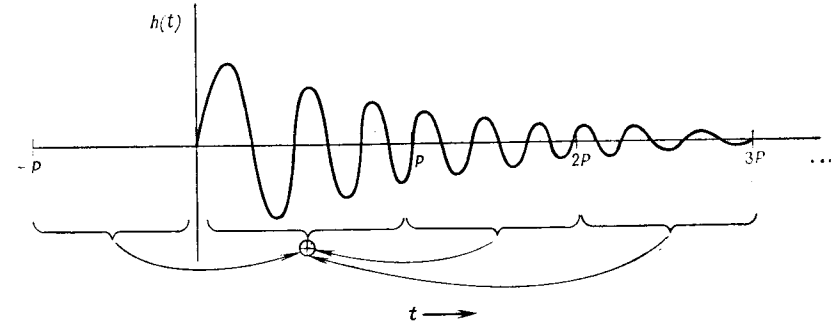


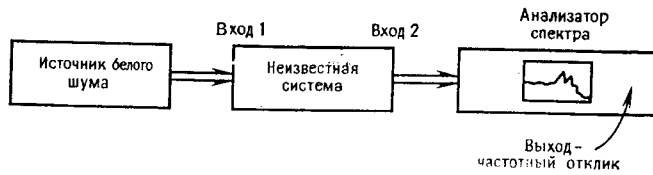
Рис. 8.23. Смещенная импульсная функция отклика. Все промежутки данных, имеющие длину P , добавляются к промежутку от 0 до P .

менным промежутком, длина которого по отношению ко времени затухания импульсного отклика мала, то возникнет ошибка. Ее можно компенсировать линейным сложением по отрезкам, определенным формулой (8.12). Это основной довод, оправдывающий использование линейного осреднения.

8.9. ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ПЛОТНОСТИ СПЕКТРА МОЩНОСТИ

Быстрые измерения частотного отклика. Поскольку у белого шума на всех частотах одна и та же интенсивность, его можно подать на один из двух входов системы. Этот шум будет выполнять роль управляющего сигнала. Второй вход можно исследовать при помощи анализатора плотности спектра мощности; в этом случае спектр выхода есть частотный отклик системы

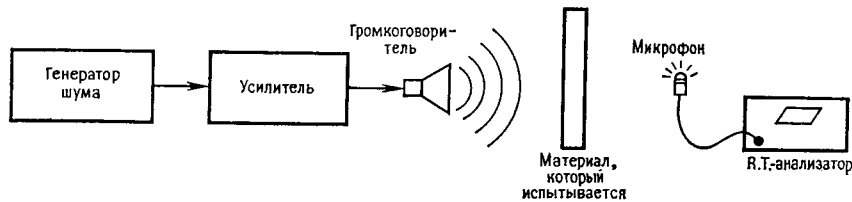
с двумя входами.



Чтобы получить для типичных генераторов развертки частотной отклик 10—20 Гц, требуется несколько минут. Анализатор спектра с истинным масштабом времени (R.T.-анализатор) может существенно ускорить процесс. К этому можно добавить, что генераторы развертки имеют ограниченные возможности и не покрывают слишком низкие частоты, а так как спектральные R.T.-анализаторы все чаще реализуются как ЦВМ, то при их использовании доступную границу низких частот определяет генератор шума.

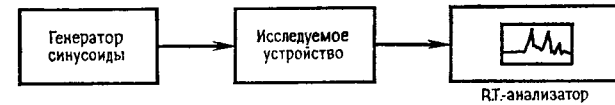
Измерение акустических свойств передачи/потери. Нередко возникает важная задача — исследовать характеристики передачи каких-то материалов. Допустим, что такого рода задачу нужно решить для некоторой металлической структуры, подобной стальной или стеклянной пластине; итогом исследования должна стать та частота, которая возбуждает данную структуру и заставляет ее вибрировать. Часто проводятся эксперименты более общего характера, в которых проверяются материалы, специально подобранные для глушения шума, подобно звукозащитным панелям. Для материалов этого типа, как правило, получают кривую затухания, которая характеризует зависимость от частоты величины потерь при прохождении звука через панель.

Измерения можно также производить со стороны громкоговорителя, вычитая их результаты из данных, полученных с другой стороны. Это позволяет исправить неточности, возникающие вследствие влияния частотных откликов усилителя и громкоговорителя.



Измерения гармонического искажения у систем со звуковыми частотами. При конструировании звуковых схем всегда пытаются подавить искажения, вызванные неидеальностью характе-

ристик электроники. Здесь важно как измерить эти искажения, так и решить вопрос о том, насколько результаты согласуются с поставленными требованиями. Как правило, гармоническое искажение вызывается третьей гармоникой основного тона. Это гармоническое искажение помогает измерить простой прием, основанный на применении R.T.-анализатора с истинным масштабом времени и генератора синусоидального сигнала.



Приближенную величину процента искажения ищут в виде уровня D между основной и третьей гармониками; так, уровню D , равному 40 дБ, отвечает искажение 1%, уровню D , равному 60 дБ, — искажение 0.1%. Точное гармоническое искажение можно получить, сопоставляя другие гармоники и суммируя их мощности; однако это дает небольшой выигрыш в точности.

Упражнения

8.1. Почему сделан вывод о том, что биномиальные веса сглаживания имеют в пределе очертания гауссовской плотности?

Ответ: это заключение основано на фундаментальной предельной теореме теории вероятностей о сходимости биномиального распределения к гауссовскому.

8.2. Предположим, что нужно провести анализ вибрационных данных; ожидаемое максимальное значение частоты компонент составляет 3к Гц. Допустим, что $S=10\,000$ выб./с и что самая узкая ожидаемая полоса отклика предполагается равной около 40 Гц. Разрешение выбрано равным $B_e=10$ Гц. Какие значения имеют:

- частота Найквиста F ;
- период следования промежутков P_s ;
- число данных в промежутке N_s ?

Сколько промежутков потребуется, чтобы получилось $n=100$ ст. св.?

8.3. Когда в § 8.8 шла речь о частотном осреднении, утверждалось, что преобразование Фурье гауссовской функции есть гауссовская функция. Докажите это утверждение.

8.4. Докажите, что множитель $PA^2/4$, фигурирующий в формуле (8.5) для конечной дискретной ПСМ синусоиды частоты nb , совпадает с T/N , используемым в другом месте.

8.5. Приведите вывод формулы (8.5).

8.6. Приведите вывод формулы для временного варианта окна ГЭО с произвольным N , напишите программу для вычислений по этой формуле и получите график.

8.7. В § 8.8 при обсуждении шага частот и операции добавления нулей отмечалось, что добавление нулей может вызвать непредсказуемые эффекты, приводящие к изменениям очертаний спектральных окон. Используя результаты упр. 8.6 получите очертания окна ГЭО (в области частот). Затем получите для него преобразование Фурье после добавления $1/3N$ и $2/3N$ нулей и изобразите результаты в виде графика.