

Глава 9

ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ФУНКЦИЯ
КОГЕРЕНТНОСТИ

9.1. СВОЙСТВА ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Пользуясь для краткости в этой главе термином *передаточная функция*, мы будем большей частью относить его, строго говоря, к функциям частотного отклика. В частности, мы коснемся здесь вопроса о вычислении оценок передаточных функций, возникающих в анализе «линейных» моделей. В качестве такой передаточной функции в строительной механике может выступать функция, обратная функции механического сопротивления. В электротехнике она может представлять собой линейный фильтр, который в широком смысле понимается как всякая линейная операция, определяемая посредством интеграла свертки. В большинстве ситуаций передаточной функцией может быть просто какое-нибудь полезное линейное соотношение между двумя произвольными временными последовательностями, пусть и не дающее исчерпывающего описания связи. В этой главе затронуты линейные системы как с одним, так и с несколькими входами. Понятия, относящиеся к случаю многих входов, требуют знакомства читателя со статистикой многих переменных и анализом временных рядов. Поэтому большая часть материала предполагает довольно высокий уровень подготовки читателя; если он чувствует себя хотя бы в одной из названных дисциплин не очень уютно, можно при первом чтении книги этот материал пропустить. Это касается § 9.3, 9.4 и отчасти некоторых других параграфов.

Нужные понятия без труда переносятся (в теории, но обязательно на практике) на такие модели со многими переменными, как модели систем со многими входами и одним выходом. Этот вопрос рассмотрен в § 9.2.

Мерой точности и приложимости линейных соотношений служит исключительно полезный в исследованиях параметр — функция «когерентности»; она рассмотрена в § 9.4.

Рассмотрим физически реализуемую линейную систему, подобную системе, изображенной на рис. 9.1 в виде схемы входа — выхода. Будем считать, что эта система не имеет никаких параметров, изменяющихся во времени. Как говорилось в гл. 1, весовая функция $h(\tau)$, связанная с этой системой, определяется как функция отклика системы (иначе говоря, ее выход) на

единичный входной импульс, представляющая собой функцию времени τ вхождения импульса. Для физически реализуемых систем необходимо, чтобы выполнялось равенство $h(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, поскольку отклик должен следовать за входом. Полезность введения понятия весовой функции или, иначе, импульсной функции отклика объясняется тем фактом, что при произ-

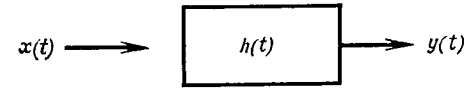


Рис. 9.1. Блок-диаграмма линейной системы с одним входом и одним выходом.

вольном входе $x(t)$ выход $y(t)$ системы можно задать посредством интеграла свертки

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (9.1)$$

Таким образом, значения выхода $y(t)$ для каждого момента времени t можно искать в виде линейной взвешенной (бесконечной) суммы значений всей предыдущей последовательности входа $x(t)$.

Другим способом характеристики линейных систем служит определение частотного отклика или, иначе, передаточной функции $H(f)$ этой системы. Передаточная функция определяется как преобразование Фурье функции $h(\tau)$, т. е. как преобразование

$$H(f) = \int_0^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (9.2)$$

Нижний предел интегрирования взят равным нулю вместо $-\infty$, так как $h(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Идея физической реализуемости важна с точки зрения инженерного анализа реальных систем. Что же касается этого вопроса с математической, а иногда и с вычислительной точки зрения, то наиболее полезными оказываются физически нереализуемые варианты соотношений (9.1) и (9.2). В них вместо конечного нижнего предела интегрирования нужно подставить $-\infty$; в результате они принимают вид

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (9.3)$$

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau. \quad (9.3')$$

Например, в указанном смысле не должны быть реализуемы нерекурсивные фильтры, используемые на цифровых вычислительных машинах. В данном случае применение симметричных весовых функций и использование фильтров с нулевым фазовым сдвигом (см. гл. 4) совершенно оправданно. Частотная функция отклика связывает переменные входа и выхода соотношением

$$Y(f) = H(f) X(f). \quad (9.4)$$

Это равенство получено применением преобразования Фурье к обеим частям соотношения (9.3) и составляет утверждение «теоремы о свертке». Частотная функция отклика представляет большой интерес, поскольку несет в себе информацию об усилении амплитуды (или ее затухании) и о сдвиге фазы. Так как функция $H(f)$ принимает комплексные значения, то для нее можно использовать тригонометрическую запись (т. е. запись в полярных координатах). Эта запись имеет вид

$$H(f) = |H(f)| e^{i\varphi(f)},$$

где

$$|H(f)| = \sqrt{(\operatorname{Re}[H(f)])^2 + (\operatorname{Im}[H(f)])^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi(f) = \frac{\operatorname{Im} H(f)}{\operatorname{Re} H(f)}; \quad (9.5)$$

здесь абсолютная величина $H(f)$ есть коэффициент усиления, а аргумент $\varphi(f)$ — фазовый угол в радианах.

Указанное выше правило выбора знака фазового угла продиктовано желанием получить определение, согласованное с тем, которое принято в теории управления, а также в других областях, использующих идею частотной функции отклика. При таком определении отрицательные временные запаздывания (временные задержки) будут иметь фазу, представляющую собой прямую с отрицательным тангенсом угла наклона. Допустим, что функция $y(t)$ есть сдвинутая во времени функция $x(t)$, т. е. $y(t) = x(t - \tau)$. Тогда для преобразования Фурье функции $y(t)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} Y(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau) e^{-j2\pi ft} dt = \\ &= e^{-j2\pi f\tau} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} dt = e^{-j2\pi f\tau} X(f). \end{aligned}$$

Поэтому для частотной функции отклика, коэффициента усиления и фазы выполняются равенства

$$H(f) = \exp(-j2\pi f\tau), \quad |H(f)| = 1, \quad \varphi(f) = -2\pi f\tau. \quad (9.6)$$

В частности, из последнего равенства следует, что фаза есть прямая с тангенсом угла наклона $-2\pi\tau$. Коэффициент усиления и фаза для рассмотренного случая изображены на рис. 9.2.

Сделаем предположение, согласно которому система, связывающая функции $x(t)$ и $y(t)$, «линейна». Когда говорят о такой системе, под линейностью подразумевают свойства, которым

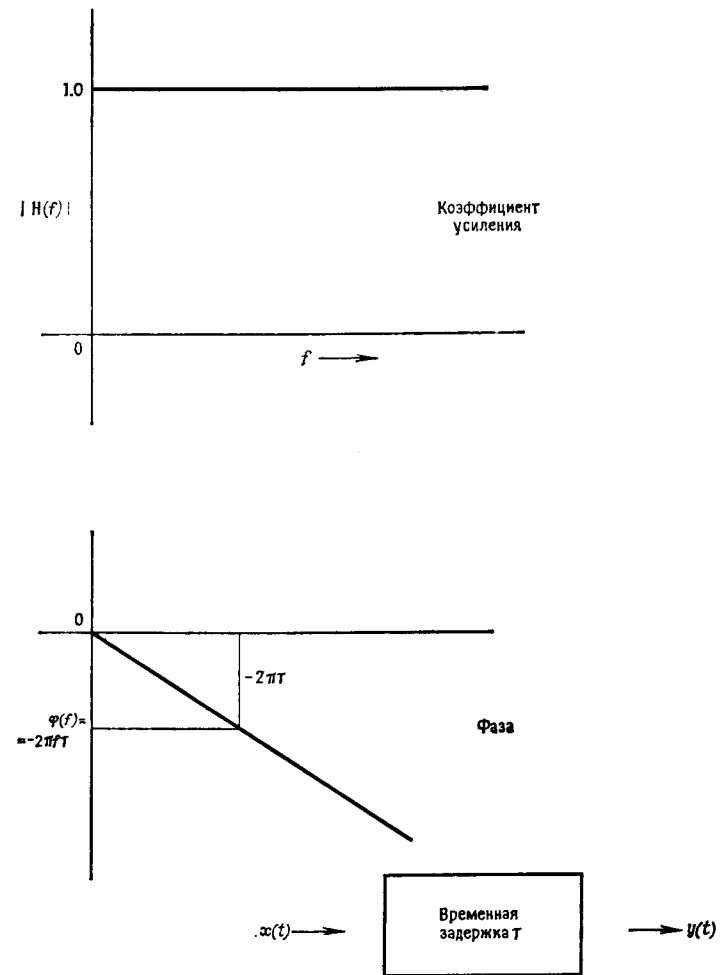


Рис. 9.2. Коэффициент усиления и фаза системы, состоящей только из временной задержки.

удовлетворяет линейный оператор L :

$$\begin{aligned} y(t) &= L[a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)] = \\ &= a_1 L[x_1(t)] + a_2 L[x_2(t)] = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t). \end{aligned}$$

Другими словами, система должна подчиняться аддитивному правилу, согласно которому сумма двух входов переходит в сумму соответствующих выходов, а также правилу однородности, в соответствии с которым входу, умноженному на константу, отвечает выход, умноженный на ту же константу.

Следует иметь в виду, что система может быть линейной, даже если ее «усиление» $|H_{xy}(f)|$ и «фаза» $\varphi_{xy}(f)$ будут нелинейными функциями частоты. Коэффициент усиления показывает

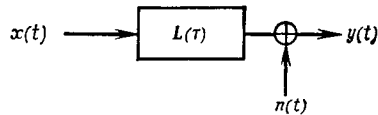


Рис. 9.3. Блок-схема линейной системы с одним входом и одним выходом; к выходу системы добавляется посторонний шум $n(t)$.

только, с каким усилением (или ослаблением) передается та или иная компонента. Что же касается фазы, то ее значения, нанесенные на график, могут показывать, каковы величины задержек компонент сигнала; для компоненты частоты f величина задержки определяется по формуле $\varphi_{xy}(f)/(2\pi f) = -\tau$, которую можно получить, решив уравнение (9.6) относительно τ и вспомнив, что положительную задержку мы рассматриваем как отрицательный сдвиг во времени. На рис. 9.3 показана блок-схема более общего вида. Она соответствует линейной системе с шумом.

На рис. 9.4 показано, как выглядят типичные графики коэффициента усиления (в линейных единицах, а не в децибелах) и фазы для (линейных) цифровых низкочастотных фильтров.

9.2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ОДНИМ ВХОДОМ

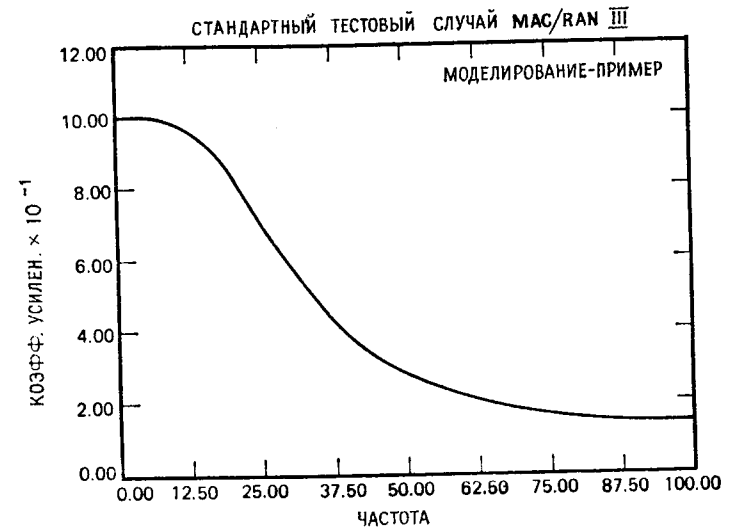
Предположим, что на вход линейной системы с одним точно определенным входом и одним выходом подается некоторый стационарный случайный процесс x с нулевым средним. Тогда, как показали Бендат и Пирсол (1971), выход y будет иметь те же свойства, что и вход. Функции плотности спектра мощности $S_x(f)$, $S_y(f)$ и функцию плотности кросс-спектра $S_{xy}(f)$ связывают соотношения

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \quad (9.7)$$

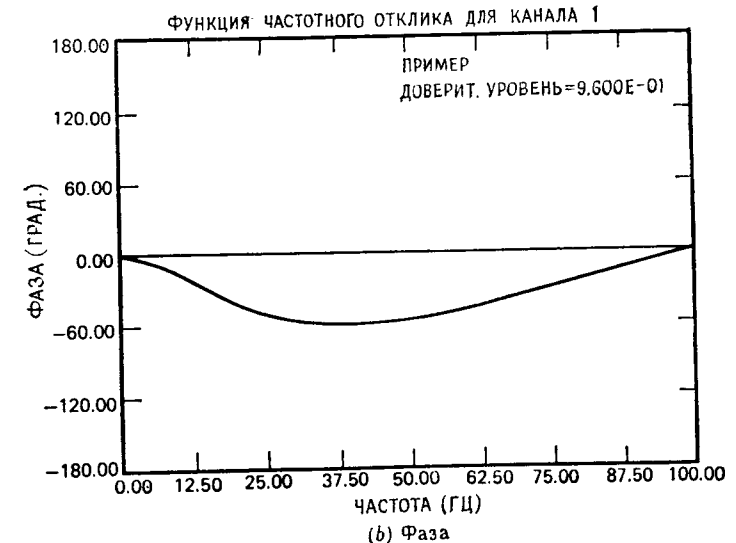
и

$$S_{xy}(f) = H(f) S_x(f). \quad (9.8)$$

Следовательно, если спектр мощности входа и кросс-спектр мощности известны, то частотная функция отклика, а значит, коэффициент усиления и фаза полностью определены.



(а) Коэффициент усиления



(b) Фаза

Рис. 9.4. Коэффициент усиления (а) и фаза (b) цифрового фильтра.

Функция когерентности $\gamma_{xy}^2(f)$ определяется формулой

$$\gamma_{xy}^2(f) = \frac{|S_{xy}(f)|^2}{S_x(f) S_y(f)} \quad (9.9)$$

и принимает только действительные значения. Некоторые авторы предпочитают называть когерентностью положительные значения $\gamma_{xy}(f)$ квадратного корня введенной величины. Можно показать, что функция плотности кросс-спектра мощности $S_{xy}(f)$ удовлетворяет неравенству (см. Дженкинс и Ваттс (1971—1972)) $|S_{xy}(f)|^2 \leq S_x(f) S_y(f)$, из которого следует, что $0 \leq \gamma_{xy}^2(f) \leq 1$. Соотношения (9.7)—(9.9) очень полезно сопоставить с формулами для регрессии и корреляции, приведенными в гл. 2. Нетрудно усмотреть, например, что передаточная функция $H(f)$ является аналогом коэффициента регрессии β и что спектр мощности и кросс-спектр служат аналогами дисперсии и ковариации соответственно. Далее, когерентность является аналогом квадрата коэффициента корреляции. Продолжает аналогию *комплексная когерентность*

$$\gamma_{xy}(f) = \sqrt{\frac{|S_{xy}(f)|}{S_x(f) S_y(f)}} e^{i\varphi_{xy}(f)},$$

представляющая собой обобщение коэффициента корреляции, причем положительная корреляция соответствует сдвигу фазы в 0° («в фазе»), а отрицательная корреляция соответствует сдвигу фазы в 180° («в противофазе»).

На протяжении этой главы мы не раз будем иметь возможность убедиться в том, что соотнесение результатов, касающихся области частот, и относительно простых понятий элементарной статистики сильно упрощает понимание многих глубоких фактов. Далее, для стационарных процессов благодаря свойству ортогональности преобразования Фурье в каждой узкой полосе частот оказывается возможным проведение независимого статистического анализа. Поэтому помимо соображений, которые касаются приложений в технике, а именно соображений о желательности работы с областью частот, что необходимо для определения таких важных параметров, как частота резонанса и т. п., есть также важный математико-статистический довод в пользу выбора области частот — упрощение анализа.

Теперь обратимся к задаче измерения плотности кросс-спектра идеальных линейных систем без шума. Для таких систем выполняется равенство $\gamma_{xy}^2 = 1$. Следовательно, функция когерентности достигает своего теоретического максимума, равного единице на всех частотах, в случае линейных систем. Если же функция когерентности не равна тождественно единице, то одной из возможных причин этого может служить отсутствие линейной зави-

симости выхода от входа рассматриваемой системы. Иными словами, эта система будет нелинейной.

Для того чтобы получить оценки передаточной функции и функции когерентности данных временных последовательностей x_i и y_i , где $i=0, 1, \dots, N-1$, непосредственно применяют формулы (9.8) и (9.9). Эти формулы можно считать «естественными» формулами оценивания, хотя их нетрудно получить методом наименьших квадратов (см., например, книгу Дженкинса и Ваттса (1971—1972)).

Приведем один метод вывода формул (9.8) и (9.9) (оказывается, что он приложим ко всем ситуациям, в которых возможен подход, использующий метод наименьших квадратов). Сначала запишем равенство, составляющее содержание теоремы о свертке:

$$Y(f) = H(f) X(f).$$

Затем, умножив обе его части на $X^*(f)$ (звездочка означает, что берется комплексно-сопряженная величина) и взяв от них математическое ожидание, получим соотношение

$$E[X^*(f) Y(f)] = E[X^*(f) H(f) X(f)]. \quad (9.10)$$

Поскольку передаточная функция для линейных систем является фиксированной характеристикой, функцию $H(f)$ можно вынести за знак математического ожидания. Тогда, согласно определениям, в левой части стоит кросс-спектр, а в правой — спектр мощности, помноженный на функцию $H(f)$. Таким образом,

$$S_{xy}(f) = H(f) S_{xx}(f).$$

Вычисления по этой формуле равносильны получению ковариации входа и выхода. Если же математическое ожидание брать от квадратов обеих частей исходного равенства и, следовательно, исходить из соотношения

$$E|Y(f)|^2 = E[|H(f) X(f)|^2],$$

то получится формула

$$S_{yy}(f) = |H(f)|^2 S_{xx}(f).$$

Все эти формулы имеют свои аналоги для дискретных спектральных функций, соответствующие случаю конечной длины записи. Никакой особой разницы между непрерывным и дискретным случаями нет. Исключение составляют такие ошибки, которые, встретившись при вычислении преобразования Фурье (например, из-за подмены частот), повлекут за собой ошибки при вычислении функций, получаемых из этого преобразования.

9.3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ СО МНОГИМИ ВХОДАМИ

Теперь обратимся к модели линейной системы, отвечающей случаю многих входов. Предположим, что число входов равно p , а число выходов — одному. Важную роль в изучении таких систем имеют функции обычной, множественной и частной когерентности. О способах их вычисления будет рассказано в § 9.4.

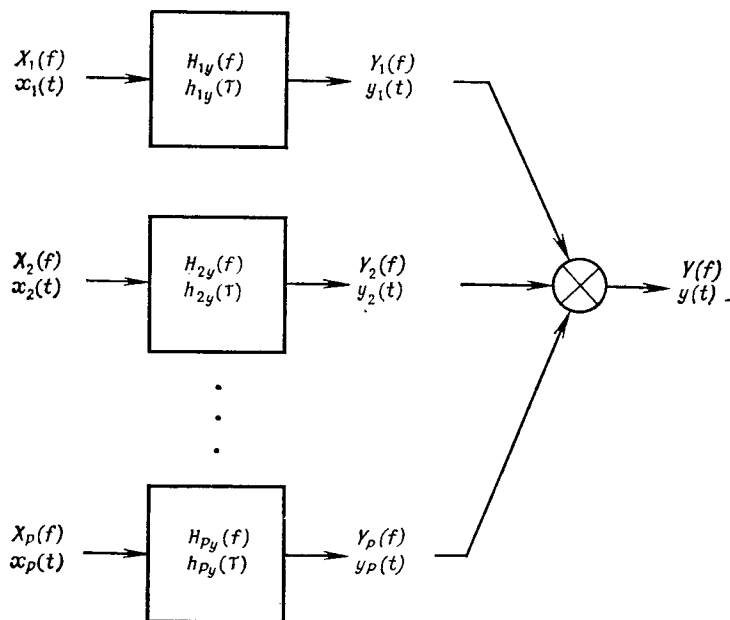


Рис. 9.5. Линейная система с несколькими входами.

Рассмотрим линейную систему, имеющую параметры, не зависящие от времени; p входов этой системы обозначим $x_l(t)$, $l=1, 2, \dots, p$. Выход $y(t)$ такой системы определяется соотношением

$$y(t) = \sum_{l=1}^p y_l(t),$$

где слагаемое $y_l(t)$ определяется как та часть выхода, которая получается при подаче на l -й вход значений $x_l(t)$, а на все остальные входы — нуля (рис. 9.5). Каждая из функций h_{ly} на рис. 9.5 определяется как весовая функция, относящаяся к ли-

нейной системе, образованной входом $x_l(t)$ и соответствующим ему частным выходом $y_l(t)$. Таким образом, функция $y_l(t)$ определяется формулой

$$y_l(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{ly}(\tau) x_l(t - \tau) d\tau. \quad (9.11)$$

Применив к обеим частям формулы (9.11) преобразование Фурье, получим равенство $Y_l(f) = H_{ly}(f) X_l(f)$, в котором $Y_l(f)$ и $X_l(f)$ — преобразования Фурье функций $y_l(t)$ и $x_l(t)$ соответственно. Учитывая это равенство, для $Y(f)$ — преобразования Фурье полного выхода — получим следующее выражение:

$$Y(f) = \sum_{l=1}^p Y_l(f) = \sum_{l=1}^p H_{ly}(f) X_l(f). \quad (9.12)$$

В этом месте статистик, читающий книгу, непременно заметит, что соотношение (9.12) есть уравнение множественной регрессии для величин с нулевым средним, подобное уравнению для случая одного входа, определенному чуть выше. В качестве зависимой величины выступает преобразование Y , в качестве независимых величин выступают преобразования X_l , а в качестве коэффициентов регрессии — функции H_{ly} . Следовательно, о понятиях передаточных функций в частотной области, относящихся к областям электротехники и механики, можно говорить на языке того раздела статистики, который составляет регрессионный анализ комплексных случайных величин. Эта идея была детально разработана Акайком (1965). Суть этой идеи заключается в возможности обращаться с каждой полосой частот независимо; выполняя многомерный регрессионный анализ многих комплексных величин (по одному разу для каждой полосы частот), получают полные функции в области частот.

Предыдущим соотношениям можно придать более сжатую форму. Для этого следует, как это принято в многомерном регрессионном анализе, перейти к более удобной матричной записи. Во-первых, определим p -мерный вектор-столбец преобразований Фурье

$$\mathbf{X}(f) = \begin{bmatrix} X_1(f) \\ X_2(f) \\ \vdots \\ X_p(f) \end{bmatrix}$$

и p -мерный вектор-столбец передаточных функций

$$\mathbf{H}(f) = \begin{bmatrix} H_{1y}(f) \\ H_{2y}(f) \\ \vdots \\ H_{py}(f) \end{bmatrix}. \quad (9.13)$$

Во-вторых, введем p -мерный вектор-столбец кросс-спектров мощности выхода $y(t)$ с входами $x_l(t)$:

$$\mathbf{S}_{xy}(f) = \begin{bmatrix} S_{1y}(f) \\ S_{2y}(f) \\ \vdots \\ S_{py}(f) \end{bmatrix},$$

где $S_{ly}(f) \equiv S_{x_ly}(f)$ для $l=1, 2, \dots, p$. Наконец, определим $(p \times p)$ -матрицу спектров мощности и кросс-спектров всех входов $x_l(t)$:

$$\mathbf{S}_{xx}(f) = \begin{bmatrix} S_{11}(f) & S_{12}(f) & \dots & S_{1p}(f) \\ S_{21}(f) & S_{22}(f) & \dots & S_{2p}(f) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{p1}(f) & S_{p2} & \dots & S_{pp}(f) \end{bmatrix} = E[\mathbf{X}^*(f)\mathbf{X}^T(f)],$$

где звездочкой помечена сопряженная величина, а индекс означает транспонирование. Для упрощения записи введем обозначение $S_{ij} = S_{x_ix_j}(f)$, где $i, j=1, 2, \dots, p$. Матрица \mathbf{S}_{xx} эрмитова, поскольку она совпадает с матрицей, полученной из нее транспонированием и заменой элементов на сопряженные им. Из этого факта, в частности, следует, что собственные значения матрицы $\mathbf{S}_{xx}(f)$ суть действительные числа. В некоторых приложениях эти параметры представляют большой интерес.

Для того чтобы получить для элементов $H_{ly}(f)$ вектора (9.13) решение по методу наименьших квадратов, необходимо решить систему линейных уравнений, которая в матричной записи имеет вид $\mathbf{S}_{xy} = \mathbf{S}_{xx}\mathbf{H}$. Это уравнение можно расписать в виде

$$\begin{bmatrix} S_{1y} \\ S_{2y} \\ \vdots \\ S_{py} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \dots & S_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1y} \\ H_{2y} \\ \vdots \\ H_{py} \end{bmatrix}. \quad (9.14)$$

Решение системы дает формула

$$\mathbf{H} = \mathbf{S}_{xx}^{-1}\mathbf{S}_{xy}. \quad (9.15)$$

На практике оценки спектров и кросс-спектров, входящих в выражение (9.14), ищут при помощи процедур, рассмотренных в гл. 8.

9.4. ФУНКЦИИ ОБЫЧНОЙ, МНОЖЕСТВЕННОЙ И ЧАСТНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

Для системы с одним входом мы встречались только с одним типом когерентности, а именно с функцией обычной когерентности, определенной формулой (9.9). При этом отмечалось, что когерентность имеет аналог в элементарной статистике — квадрат коэффициента корреляции. Теперь же заметим, что понятие когерентности обобщается на случай многих входов, причем возникают два других типа когерентности — множественная и частная; их аналогами служат квадрат множественного коэффициента корреляции и квадрат частного коэффициента корреляции.

Чтобы придать этим трем разным функциям когерентности единообразное толкование, перепишем формулу (9.9) в ином виде, связав мощность входа с линейно «прогнозируемой» мощностью выхода. Вернемся к рис. 9.3, на котором выход системы $y(t)$ складывается из двух независимых (по предположению) компонент. Спектр мощности выхода такой системы имеет две компоненты, т. е. $S_y = S_n + S_u$, где $U(f)$ определяется как незашумленный выход системы $U(f) = H(f)X(f)$. Вспомогательное соотношение (9.7), получим $S_u = |H|^2 S_x$. Здесь S_u — часть общей мощности входа. Доля этой мощности определяется отношением

$$\frac{S_u}{S_y} = \frac{|H|^2 S_x}{S_y} = \frac{|S_{xy}|^2}{S_x^2} \frac{S_x}{S_y} = \frac{|S_{xy}|^2}{S_x S_y} = \gamma_{xy}^2. \quad (9.16)$$

Такой вид записи показывает, что обычная когерентность дает ту долю мощности выхода, появление которой обусловлено линейной зависимостью от входа. Точно такую же интерпретацию для многомерного случая имеют множественная и частная когерентности.

Если система нелинейна, то оценка передаточной функции $\hat{H}(f)$ служит приближением «наименьших квадратов» к «истинной» нелинейной передаточной функции. В очень интересной теореме о системах утверждается, что выход $y(t)$ всегда можно расщепить на две независимые части. Первая из них $u(t)$ будет полностью когерентна с входом $x(t)$, а вторая часть $n(t)$ совершенно некогерентна с входом $x(t)$. В этом случае, как и в (9.16), функция когерентности есть отношение мощности когерентной части к общей мощности.

При $p > 1$ имеются две дополнительные формы когерентности. Первая — множественная когерентность $\gamma_{y \cdot x}^2(f)$; она определяет долю мощности выхода $y(t)$, обусловленную линейными соотношениями, которые связывают входы $x_1(t), \dots, x_p(t)$ с выходом. Вторая форма — частная когерентность $\gamma_{iy | 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, p}^2(f)$; она представляет собой обычную когерентность между остатками i -го входа $\Delta x_i(t)$ и выхода $\Delta y(t)$, полученных удалением из них линейных эффектов, обусловленных остальными $p-1$ входами.

В случае многих входов дисперсия «прогноза» определяется формулой $S_{yx}^T \mathbf{H}_{xy} = S_{yx}^T S_{xx}^{-1} S_{xy}$, поэтому множественная когерентность дается равенством

$$\gamma_{y \cdot x}^2 = \frac{S_{yx}^T S_{xx}^{-1} S_{xy}}{S_{yy}}$$

Остаточный спектр выхода, который нередко называют «условным»¹⁾ спектром, определяется следующим образом:

$$S_{y | x} = S_{yy} - S_{yx}^T S_{xx}^{-1} S_{xy}$$

Множественная когерентность через условный спектр выражается просто:

$$\gamma_{y \cdot x}^2 = 1 - \frac{S_{y | x}}{S_{yy}}$$

Функция множественной когерентности дает ту долю мощности на выходе, которую определяет система соотношений линейной фильтрации для всех входов.

Для того чтобы получить функцию частной когерентности между каждым входом (предположим, что в данный момент нас интересует вход x_1) и выходом при условии остальных $(p-1)$ входов, сначала разбивают расширенную спектральную матрицу на подматрицы так, как это показано ниже:

$$S_{yxx} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} S_{yy} & S_{y1} & S_{y2} & \cdots & S_{yp} \\ S_{1y} & S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{2y} & S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & - & \vdots \\ S_{py} & S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} \Sigma_{yy} & \Sigma_{y1} \\ \Sigma_{1y} & \Sigma_{11} \end{array} \right]$$

¹⁾ Появление этого слова объясняется связью с понятием условных вероятностей в теории вероятностей. Обычно оно используется в ситуациях, когда нужно знать, выражаясь нестрого, «что будет, если возникают некоторые условия».

Вслед за этим вычисляют элементы условной спектральной матрицы¹⁾:

$$S_{xy | p} = \Sigma_{yy} - \Sigma_{y1} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{1y} \quad (9.17)$$

Наконец, по формуле

$$\gamma_{iy | p}^2 = \frac{|S_{iy | p}|^2}{S_{11 | p} S_{yy | p}}$$

определяют функцию частной когерентности между входом x_1 и выходом y при условии остальных $(p-1)$ входов. Аналогичные действия проводят для x_2 , переставляя x_2 и x_1 , затем для x_3 , переставляя x_3 и x_2 и т. д.

9.5. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ГРАНИЦЫ ДЛЯ КОГЕРЕНТНОСТИ

Статистическое распределение когерентности тесно связано со статистическим распределением коэффициентов корреляции. По-видимому, наиболее удобный подход к получению доверительных границ — применение нормализующего преобразования, т. е. такого преобразования, которое делает статистическое распределение оценок когерентности приближенно нормальным (гауссовским). Таким подходом пользовались Эноксон и Гудмэн (1965), его развил и усовершенствовал Бенинус (1969), в дальнейшем он рассматривался Картером (1972). Преобразование, которое используется в таком подходе, — это «z»-преобразование Фишера, названное так по имени выдающегося статистика Р. А. Фишера.

Характеристики оценок когерентности. Как следует из теории статистических выборок, оценки когерентности, помимо того что они проявляют статистическую изменчивость, еще и смещены. Приближенные значения дисперсии и смещения даются формулами

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{n-2}, \quad b = \frac{1}{n-2},$$

где $z = \text{arth } \hat{\gamma}$. Поскольку в знаменателе имеется n — число степеней свободы, для малых значений n смещение оказывается чрезвычайно большим. В частности, для 2 ст. св., как показали Отнес и Эноксон (1972), гл. 9, справедливо при всех f равенство $\hat{\gamma}_{xy}^2 = 1.0$.

Кроме рассмотренного имеется также смещение второго типа, не затрагиваемое в теории. Его влияние можно изучать лишь на качественном уровне, как это сделано в § 9.12. Это смещение для любой спектральной оценки возникает вследствие «размы-

¹⁾ Соотношение (9.17) — комплексный аналог уравнения многомерного регрессионного анализа, приведенного, например, в книге Андерсона (1963).

вающего эффекта», если разрешающая полоса частот (т. е. B_e) широка по сравнению с действительным максимумом в спектре.

Смещение такого типа встречается не так уж редко. Кроме того, по некоторой причине такое смещение может оказывать на когерентность гораздо более сильное воздействие. Авторы в целом ряде случаев наблюдали рост оценки когерентности от $\hat{\gamma}^2 = 0.4$ до $\hat{\gamma}^2 = 0.9$ при уменьшении B_e вдвое (все остальные параметры оставались неизменными). Такого рода экспериментирование с изменениями B_e полезно проводить всякий раз, когда неясно, с какой шириной спектральных пиков придется столкнуться.

По крайней мере отчасти такое поведение когерентности можно отнести на счет временных задержек в системе. Большие задержки проявляются в слишком быстром изменении фазовой функции. Это в свою очередь влечет за собой быстрое изменение действительной и мнимой частей кросс-спектра. Поэтому во многих практических ситуациях весьма вероятно появление сильного смещения, имеющего своим источником быстрое изменение функций кросс-спектра.

Такое смещение помогает устранять процедура оценивания, которую предложили Кливленд и Парзен (1975).

Преобразование, приводящее распределение выборочной функции когерентности к точной нормальной (гауссовской) аппроксимации, имеет вид (см. Эноксон и Гудмэн (1965))

$$z = \operatorname{arth} \hat{\gamma} = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1 + \hat{\gamma}}{1 - \hat{\gamma}} \right]. \quad (9.18)$$

Здесь $\hat{\gamma}$ — положительное значение квадратного корня из выборочной оценки когерентности $\hat{\gamma}^2$. Приближенные значения среднего значения и дисперсии величины z дают формулы

$$\mu_z = \operatorname{arth} \gamma + \left(\frac{p}{n-2p} \right), \quad \sigma_z^2 = \frac{1}{n-2p}, \quad (9.19)$$

где $n = 2B_e P$.

Усовершенствования, предложенные Бенинусом (1969), кажутся как смещения, так и изменчивости. Оценку $\hat{\gamma}^2$ когерентности можно улучшить следующей коррекцией смещения:

$$B(\hat{\gamma}^2) = \frac{1}{2n} (1 - \hat{\gamma}^2).$$

При этом в (9.18) используется подправленная оценка когерентности $\tilde{\gamma}^2 = \hat{\gamma}^2 - B(\hat{\gamma}^2)$. Вместо дисперсии, полученной по формуле (9.19), должно использоваться ее подправленное значение; поправка узнается по подгоночной кривой, которая позволяет улучшить оценку дисперсии σ_z^2 при $\hat{\gamma}^2 < 0.3$. В качестве указан-

ной кривой берется кривая $E(\sigma_z) = 1 - 0.004(1.6\hat{\gamma}^2 + 0.22)$. Вместо дисперсии из (9.19) будет в этом случае использоваться дисперсия

$$\sigma_z = \sqrt{\frac{1}{n-2p}} [E(\sigma_z)].$$

Предыдущие равенства позволяют для данных γ^2 и n построить $(1-\alpha)$ -доверительные границы для истинного значения γ^2 :

$$\operatorname{th}(z - b - \sigma_z^{2\alpha/2}) \leq \gamma \leq \operatorname{th}(z - b + \sigma_z^{2\alpha/2}).$$

Здесь Z_α есть 100α -процентная точка нормального распределения, а величина b определяется равенством

$$b = \frac{p}{n-2p}. \quad (9.20)$$

Приведенную выше формулу для доверительных границ можно использовать и для функций обычной когерентности при $p = 1$, и для функций множественной когерентности при $p > 1$.

Чтобы получить доверительные границы для функции частной когерентности, требуются очень небольшие изменения. При этом число ст. св. в анализе должно, вообще говоря, уменьшиться на число условных переменных, эффекты которых должны быть устранены. Например, в случае, когда требуется устранить влияние $(p-1)$ входов, используется число n' ст. св., равное $n - (p-1)$, где $n = 2B_e T$.

9.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДОВЕРИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Расположение и размеры доверительных областей для частотных функций отклика $H_{iy}(f)$, $i = 1, 2, \dots, p$, зависят от выборочной функции когерентности между выходами и входами, выборочной функции множественной когерентности между входами, выборочных функций ПСМ входов и выборочных частотных функций отклика (см. рис. 9.5). Основой приведенных ниже рассуждений послужили книга Бендата и Пирсола (1971) и работа Гудмэна (1965).

Будем считать, что ошибки смещения всех встречающихся ниже спектральных оценок пренебрежимо малы. Допустим, что $|H_{iy}|$ — истинный коэффициент усиления, а φ_{iy} — истинная фаза; таким образом, истинная передаточная функция записывается в виде $H_{iy} = |H_{iy}| e^{j\varphi_{iy}}$. Тогда $(1-\alpha)$ -доверительные интервалы для H_{iy} и φ_{iy} при каждом i и любой фиксированной частоте f (в дискретном случае ее роль выполняет частотный индекс k)

определяются системой неравенств

$$\begin{cases} |\hat{H}_{iy}| - \hat{r}_i < |H_{iy}| \leq |\hat{H}_{iy}| + \hat{r}_i, \\ \hat{\varphi}_{iy} - \Delta\hat{\varphi}_i < \varphi_{iy} \leq \hat{\varphi}_{iy} + \Delta\hat{\varphi}_i, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (9.21)$$

где $|\hat{H}_{iy}|$ и $\hat{\varphi}_{iy}$ — выборочные оценки. Здесь квадрат ошибки в длине радиуса, которую обозначим $\hat{r}_i \equiv \hat{r}_i(f)$, и ошибка $\Delta\hat{\varphi}_i \equiv \Delta\hat{\varphi}_i(f)$ в фазе вычисляются при каждом i по формулам

$$\hat{r}_i^2 = \frac{2p}{n-2p} (F_{n_1, n_2; \alpha}) \frac{(1 - \hat{\gamma}_{y,x}^2) \hat{S}_y}{(1 - \hat{\gamma}_{i,x}^2) \hat{S}_i}, \quad (9.22)$$

$$\Delta\hat{\varphi}_i = \arcsin\left(\frac{\hat{r}_i}{|\hat{H}_{iy}|}\right). \quad (9.23)$$

В формулах (9.22) и (9.23) используются следующие обозначения: p — число входов (без выхода); $n = 2B_e P$ — число ст. св. в каждой спектральной оценке; $F_{n_1, n_2; \alpha}$ есть 100α -процентная

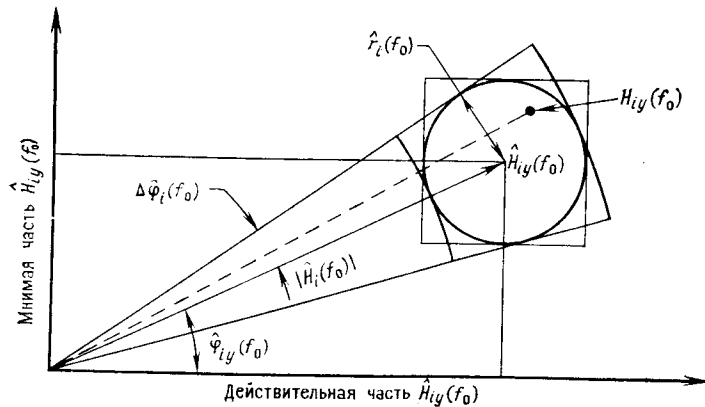


Рис. 9.6. Диаграмма, изображающая доверительную область для функций множественного частотного отклика.

точка F -распределения с $n_1 = 2p$ и $n_2 = 2n - 2p$ степенями свободы; $\hat{\gamma}_{y,x}^2$ — выборочная оценка функции множественной когерентности между выходом y и всеми измеренными входами; $\hat{\gamma}_{i,x}^2$ — выборочная оценка функции множественной когерентности между входом x_i и всеми остальными измеренными входами, исключая x_i ; \hat{S}_y — оценка спектра мощности для выхода y ; \hat{S}_i — оценка спектра мощности для входа x_i .

На рис. 9.6 в полярных координатах представлена доверительная область, определенная формулами (9.21), при значении

частоты f_0 . Каждой отдельной частоте и любому возможному значению $i = 1, 2, \dots, p$ отвечает своя собственная доверительная область.

Формула (9.22), дающая выражение для ошибки в радиусе, отвечает наиболее общему случаю многих когерентных входов. Если ограничиться специальным случаем p некогерентных входов или случаем только одного входа ($p = 1$), то формула для квадрата ошибки в радиусе примет вид

$$\hat{r}_i^2 = \frac{2}{n-2} (F_{n_1, n_2; \alpha}) (1 - \hat{\gamma}_{yi}^2) \frac{\hat{S}_y}{\hat{S}_i}, \quad (9.24)$$

где n , \hat{S}_y и \hat{S}_i — те же величины, что и раньше; $F_{n_1, n_2; \alpha}$ есть 100α -процентная точка F -распределения с $n_1 = 2$ и $n_2 = n - 2$ степенями свободы; $\hat{\gamma}_{yi}^2$ — выборочная оценка функции обычной когерентности между y и x_i . Ошибка в фазе, т. е. величина $\Delta\hat{\varphi}_i$, вычисляется, как и прежде, по формуле (9.23), поэтому различие с предыдущим случаем сводится к тому, что вместо формулы (9.22) для вычисления ошибки \hat{r}_i в радиусе используется формула (9.24).

Теперь коснемся различий между доверительными областями при одном и нескольких входах. В этом вопросе имеется одна тонкость, на которой мы остановимся. Допустим, что для 100 систем со многими входами построены 90%-е доверительные границы. Следует ожидать, что примерно для десяти из этих систем рассчитанные границы будут нарушены. Теперь предположим, что вместо этого доверительные границы определяются для каждого входа и выхода отдельно (как в ситуации с одним входом). В этом случае следует ожидать, что из 100 доверительных областей для любого отдельно взятого входа около десятка областей окажутся нарушенными. Однако при числе входов, равном, например, десяти (т. е. при $p = 10$), число нарушений должно оказаться больше (хотя и нельзя сказать точно, на сколько), так как разные доверительные области для моделей с единственным входом не бывают независимыми. Упомянутая тонкость заключается в том, что если наши интересы ограничиваются только одной частотной функцией отклика, то нужно пользоваться формулами, соответствующими случаю одного входа, даже если интересующий нас вход — лишь один из многих входов системы. Определенные таким образом доверительные границы дадут более узкую область, чем границы для случая многих входов; следовательно, первые более предпочтительны. Но если требуются все доверительные области, то необходимо пользоваться формулами для случая многих входов.

Обратимся к вопросу повышения точности оценок множественных передаточных функций, в основе вычисления которых

лежит формула (9.22). Нетрудно понять, что точность в экспериментах по измерению этих функций можно повысить, придерживаясь следующих правил.

1. Все входные функции следует делать одинаково мощными, чтобы величина $\hat{r}_i(f)$ уменьшилась за счет уменьшения отношения мощности выхода к мощности входа.

2. Сокращать шум на входе и делать системы линейными, чтобы уменьшить величину $\hat{r}_i(f)$ за счет большой множественной когерентности.

3. Делать входы независимыми, насколько это возможно, чтобы уменьшить величину $\hat{r}_i(f)$ за счет низкой множественной когерентности между входами.

4. Увеличивать, насколько можно, число степеней свободы, чтобы уменьшить величину $\hat{r}_i(f)$ как за счет уменьшения значения F (для данного α), так и за счет увеличения знаменателя. Следует иметь в виду, что для фиксированной длины записи данных возрастанию числа ст. св. сопутствует возрастание B_e , что в свою очередь приводит к сложностям, которые связаны со смещениями, обусловленными размытием.

Перечисленные примеры, описанные на качественном уровне, весьма полезны и могут принести ощутимую помощь при составлении программ сбора данных. Главное, что может при этом стать предметом заботы, — это компромисс между числом степеней свободы и высокой когерентностью. Но вряд ли стоит придавать ему особое значение. Мы повторяем здесь важное положение: «Высокая когерентность позволяет получать очень точные оценки передаточных функций даже тогда, когда число ст. св. мало и спектр мощности вычислен с большими погрешностями (и наоборот)».

9.7. КАК ВЫЧИСЛЯЮТСЯ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

Методы вычислений передаточной функции системы с одним входом и передаточных функций системы с несколькими входами весьма несхожи. Здесь мы подробно остановимся на последних, а в примерах, относящихся к этому случаю, рассмотрим вопросы, общие для обеих возможностей.

Все вычислительные процедуры, необходимые для поиска решения системы (9.15), распадаются на три группы.

1. Программы вычисления функций плотности спектра мощности и плотности кросс-спектра.

2. Процедура совместной обработки $p+1$ переменных, цель которой заключается в получении эффективным способом спектральных функций плотности для всех пар переменных.

3. Комплексные арифметические и матричные операции для вычисления параметров многомерных линейных систем.

Как правило, спектральные функции плотности получают при помощи процедур БПФ — ПСМ. Главное требование состоит здесь в том, что при вычислениях должны быть получены все кросс-спектры. В силу комплексной сопряженности элементов, расположенных симметрично относительно главной диагонали матриц кросс-спектров, т. е. в силу того, что $S_{ij}(f) = S_{ji}^*(f) = S_{ij}(-f)$ (эрмитово свойство матрицы), нужно вычислять только элементы диагонали и правой верхней части над ней.

Рассмотренные здесь процедуры предназначены для вычисления параметров математической модели линейной системы с p входами $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, p$, и одним выходом $y(t)$. Следует определить следующий набор параметров системы.

1. Передаточную функцию между каждым входом и выходом.

2. Функции обычной когерентности между всеми парами переменных.

3. Функцию множественной когерентности между выходом и всеми входами.

4. Функции частной (условной) когерентности между каждым входом и выходом при условии на остальные входы.

На некоторое время мы откажемся от крышечки над статистическими оценками — обозначения ниже и без того достаточно сложны. Надеемся, что это не вызовет никаких недоразумений, тем более, что во всех случаях теоретические соотношения и их переформулировки для статистических оценок совпадают.

Первая операция, в которой возникает необходимость, — это сортировка. Как правило, спектральные функции плотности вычисляются как функции частоты, и программы для анализа линейных систем со многими входами должны в конечном счете оперировать со спектральными $(p+1) \times (p+1)$ -матрицами плотностей (по одной матрице на каждое значение частоты).

Таким образом, данные, с которыми оперирует программа, составляют набор матриц плотностей спектров в частотах, снабженных индексом k :

$$S_{yxx}(k) = \begin{bmatrix} S_{yy}(k) & S_{y1}(k) & S_{y2}(k) & \cdots & S_{yp}(k) \\ S_{1y}(k) & S_{11}(k) & S_{12}(k) & \cdots & S_{1p}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_{py}(k) & S_{p1}(k) & S_{p2}(k) & \cdots & S_{pp}(k) \end{bmatrix}, \quad k=0, 1, \dots, m.$$

Обычно частотный индекс k обозначает значения частот $f_k = kF/m$, где $k = 0, 1, \dots, m$ и F — частота Найквиста. Однако, индекс может использоваться и в более общем смысле, а именно

для обозначения частот $f_k = f_1 + k\Delta f$, где $k = 0, 1, \dots, m$, f_1 — начальная частота, Δf — приращение частоты (шаг).

Набор m отдельных спектральных $(p+1) \times (p+1)$ -матриц плотности можно представлять себе в виде трехмерного массива (рис. 9.7). Вычисление каждой из спектральных функций плотности даст одномерный столбец длины $m+1$ вдоль $(p+1) \times (p+1) \times (m+1)$ -блока с рис. 9.7. При вычислениях частотного

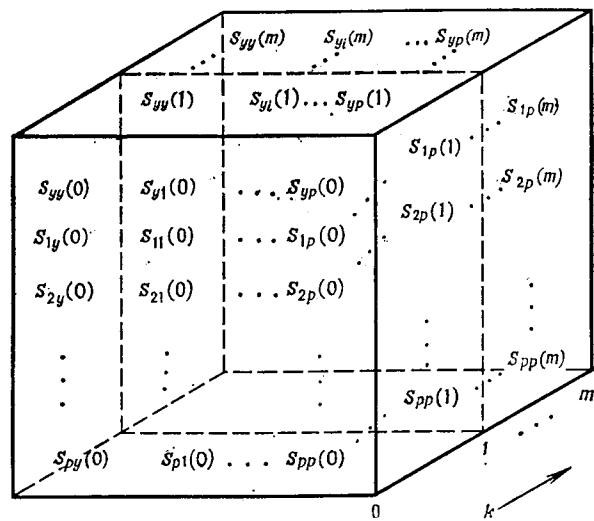


Рис. 9.7. Изображение трехмерного блока для запоминания спектральных матриц.

отклика требуется один поперечный (вертикально-горизонтальный) слой. Если для запоминания промежуточных результатов используется магнитная лента, то возникает задача разумного, расположения данных, поскольку итоговые данные должны быть упорядочены в виде ряда. Для этой цели больше подходит память файлами на дисках.

Всякий раз, когда речь будет заходить о статистическом распределении результатов, будет предполагаться, что все p входных величин, а также выход — стационарные гауссовские процессы с нулевым средним. Функции $H_{iy}(k)$, $l = 1, \dots, p$, суть характеристики частотных функций отклика (передаточных функций) линейной системы, выход $y(t)$ которой получается при прохождении через нее входных величин.

Предполагается, что величины $x_l(i)$, $i = 1, \dots, p$, и $y(i)$ составляют дискретные (преобразованные в цифровую форму) последовательности из N точек в каждой.

Функция частотного отклика определяется из матричного уравнения (9.14), в котором для упрощения записи аргумент

функции будет опускаться (т. е. вместо записи вида $S_{11}(k)$ будет использоваться запись S_{11}). Матрицы и векторы в соотношении (9.14) имеют комплексные элементы, поэтому при расчетах требуется применение комплексной арифметики. В частности, справедливо представление $S_{il} = C_{il} + jQ_{il}$, где $C(k)$ и $Q(k)$ — соответствующие функции плотности коспектра и квадратурного спектра как функции индекса k .

Решение уравнения (9.14) определяется следующим соотношением:

$$\begin{bmatrix} H_{1y} \\ H_{2y} \\ \vdots \\ H_{py} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1p} \\ S_{21} & S_{22} & \cdots & S_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{p1} & S_{p2} & \cdots & S_{pp} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} S_{1y} \\ S_{2y} \\ \vdots \\ S_{py} \end{bmatrix}.$$

В векторных обозначениях оно принимает вид

$$\mathbf{H}_{xy} = \mathbf{S}_{xx}^{-1} \mathbf{S}_{xy}. \quad (9.25)$$

Здесь нам кажется уместным процитировать следующее место из книги Форсайта и Молера (1969): «Один из способов решения системы линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ состоит в том, что, вычислив матрицу, обратную \mathbf{A} , умножают \mathbf{A}^{-1} на \mathbf{b} . . . Однако целый ряд процедур решения линейных уравнений . . . может как упростить эту задачу за счет уменьшения числа операций, так и улучшить ее решение путем увеличения точности.

Систему линейных уравнений над комплексными числами можно решать непосредственно в комплексной арифметике. Можно пойти и другим путем — разбить уравнение на мнимые и действительные части. Один из таких методов решения, предложенный Ланцошем (1961), детально разобран в книге Отнеса и Энноксона (1972), с. 347—349. Кроме того, можно пользоваться изоморфизмом

$$(\mathbf{C} + j\mathbf{Q}) \sim \begin{bmatrix} \mathbf{C} & -\mathbf{Q} \\ \mathbf{Q} & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (9.26)$$

который комплексным матрицам размера $p \times p$ соотносит действительные $2p \times 2p$ -матрицы в правой части (9.26). Действительную часть решений системы (9.25) будут составлять первые p элементов вектора \mathbf{H}_{xy} , а мнимую — оставшиеся p элементов этого вектора.

Систему линейных уравнений предполагается решать методом, основанным на процедурах Форсайта и Молера, приспособленных для действий с комплексными числами. Эти процедуры более других подходят для гауссовского случая, главная особенность которого состоит в наличии максимального значения, что

требует масштабирования. Другие возможные процедуры основаны либо на ортогонализации данных, либо на ортогонализации спектральной матрицы (см., например, Лонгли (1967) или Уомплер (1970)). Метод Форсайта и Молера содержит программу последовательного улучшения решения с оценкой числа точных цифр в решении. В зависимости от длины слова ЭВМ и вида матриц могут потребоваться вычисления с удвоенной точностью.

Метод решения системы (9.25) сводится к следующему:

1. Система спектральных уравнений решается методом Форсайта—Молера, работающим непосредственно в комплексной арифметике.

2. Полученное решение корректируется последовательными улучшениями. Если результаты неудовлетворительны, то используется арифметика с удвоенной точностью.

3. При помощи оператора «развертки», определенного ниже, вычисляется множественная когерентность, а также частные когерентности.

Известный интерес представляют итерационные методы, в которых число переменных увеличивается постепенно, восхождением от случая системы с одним входом. Один из таких методов, «метод эскалатора», рассмотрен в книге Отнеса и Эннокса (1972). Однако с точки зрения эффективности вычислений этот класс приемов не оптимален; более того, точность вычислений и результатов находится в зависимости от того, в каком порядке вводятся новые переменные. Поэтому такие методы, вообще говоря, применять не рекомендуется.

9.8. ОПЕРАТОР РАЗВЕРТКИ

Допустим, что решается система уравнений, которая имеет следующую матрицу:

$$\Sigma = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p & 1 \\ \left[\begin{array}{c|c} S_{xx}^{-1} & (S_{xx}^{-1}S_{xy})^T \\ \hline - (S_{xx}^{-1}S_{xy})^* & S_{yy} - S_{yx}S_{xx}^{-1}S_{xy} \end{array} \right] & p \\ p & 1 \end{array} \end{array}$$

Теперь напомним, что множественная когерентность определяется по формуле

$$\gamma_{y,x}^2 = 1 - \frac{S_{yy} - S_{yx}S_{xx}^{-1}S_{xy}}{S_{yy}} = \frac{S_{yx}S_{xx}^{-1}S_{xy}}{S_{yy}},$$

а множественные когерентности между входами — равенством

$$\gamma_{x_i, x_j}^2 = 1 - \frac{1}{S_{ii}S_{jj}},$$

где S_{ii} есть i -й диагональный элемент матрицы S_{xx}^{-1} . Эти величины необходимы при вычислениях доверительных границ.

Определим *развертку* (см. Шатцов и др. (1968)) r -х строки и столбца следующим образом. Пусть $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ суть квадратные матрицы. Матрица A преобразуется разверткой в матрицу B по такому правилу:

$$b_{rr} = \frac{1}{a_{rr}}; \quad b_{ir} = -\frac{a_{ir}}{a_{rr}}, \quad i \neq r;$$

$$b_{rj} = \frac{a_{rj}}{a_{rr}}, \quad j \neq r; \quad b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{rj}}{a_{rr}}, \quad i, j \neq r.$$

Оператор развертки обратим. Следовательно, применив к матрице Σ развертку, например, по p -м строке и столбцу, получим

$$\Sigma' = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} p-1 & 2 \\ \left[\begin{array}{c|c} \Sigma_{11}^{-1} & (\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{1y})^T \\ \hline -(\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{1y})^* & \Sigma_{yy} - \Sigma_{y1}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{1y} \end{array} \right] & p-1 \\ p-1 & 2 \end{array} \end{array}$$

Как видно, здесь получена и условная спектральная матрица $S_{xy|p}$ из соотношения (9.17). Поэтому, вычислив по этой 2×2 -матрице обычную когерентность, мы получим частную когерентность, между p -м входом и выходом y .

Для того чтобы получить остальные частные когерентности, нужно снова применить оператор развертки p -х строки и столбца, восстановив тем самым матрицу Σ из Σ' .

Вслед за этим, применяя развертку по другим столбцам и строкам, получают остальные частные когерентности.

Если требуются частные и множественные когерентности первого порядка, действия при вычислениях можно значительно упростить. Здесь в матрице Σ' необходимо знать только элементы $S_{pp|p}$, $S_{yy|p}$ и $S_{py|p}$, соответствующие b_{rr} , $b_{p+1, p+1}$ и $b_{r, p+1}$. Поэтому для того чтобы получить условную спектральную матрицу, вычисляются величины

$$S_{pp|p} = b_{rr} = \frac{1}{a_{rr}}, \quad (9.27)$$

$$S_{py|p} = b_{r, p+1} = \frac{a_{r, p+1}}{a_{rr}}, \quad (9.28)$$

$$S_{yy|p} = b_{p+1, p+1} = a_{p+1, p+1} - \frac{a_{p+1, r}a_{r, p+1}}{a_{rr}} = a_{p+1, p+1} - \frac{|a_{r, p+1}|^2}{a_{rr}}. \quad (9.29)$$

С точки зрения качества вычислений приведенный метод получения частной когерентности и условной спектральной матрицы, разумеется, наиболее эффективен и точен.

9.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ СИНУСОИД

В лабораторной практике прошлого метод вычисления передаточной функции при помощи синусоид находил самое широкое применение. Цифровой эквивалент этого метода уже был рассмотрен в § 5.2. При этом мы пользовались тем фактом, что изменение амплитуды и сдвиг фазы определяют характеристики передаточной функции, которую с учетом формул (9.4) и (9.5) задает соотношение

$$Y(f) = |H(f)| e^{j\varphi(f)} X(f).$$

Если на вход подается косинус частоты f_c , который можно рассматривать как действительную часть комплексной экспоненты, т. е.

$$x(t) = \operatorname{Re} [A e^{j2\pi f_c t}] = A \cos(2\pi f_c t),$$

то

$$X(f) = \frac{A}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)],$$

и, следовательно, на выходе будет получена функция, имеющая преобразование Фурье вида

$$\begin{aligned} Y(f) &= |H(f)| e^{j\varphi(f)} \frac{A}{2} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] = \\ &= \frac{A}{2} [|H(f_c)| e^{j\varphi(f_c)} \delta(f - f_c) + |H(f_c)| e^{j\varphi(-f_c)} \delta(f + f_c)], \end{aligned}$$

т. е. будет получена функция

$$y(t) = A |H(f_c)| \operatorname{Re} [e^{j[2\pi f_c t + \varphi(f_c)]}]. \quad (9.30)$$

Таким образом, действительная часть выхода есть косинус с амплитудой $A |H(f_c)|$, фаза которого сдвинута относительно входа на $\varphi(f_c)$. Покажем это. На рис. 9.8,а изображена синусоида на входе; 9.8,б дает изображение выхода. Легко заметить, что амплитуда на выходе, как, впрочем, и фаза, изменилась. Поэтому, располагая методом получения отношения амплитуд и способом измерения сдвига фазы, мы можем полностью определить характеристики передаточной функции.

Следует отметить, что синусоида — функция «установившегося» поведения. Даже если соотношение (9.4) и остается в силе для произвольных функций, то в частном случае синусоиды следует до проведения измерений подождать, пока система не начнет

давать установившийся отклик. Поскольку в физических системах промежутки времени, который занимает переходный отклик, примерно равен величине, обратной полосе частот, длительность этого промежутка можно взять за основу при определении ин-

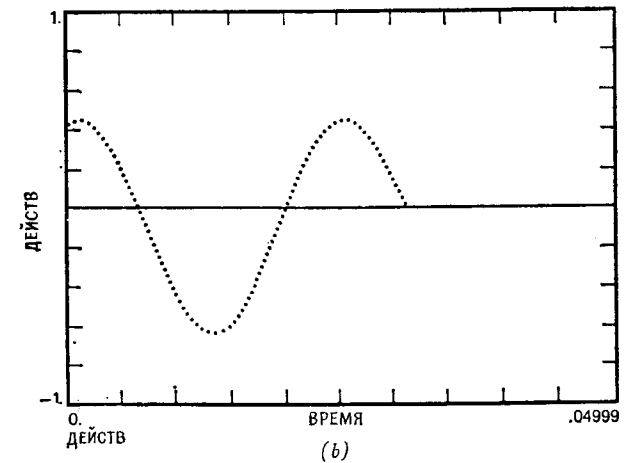
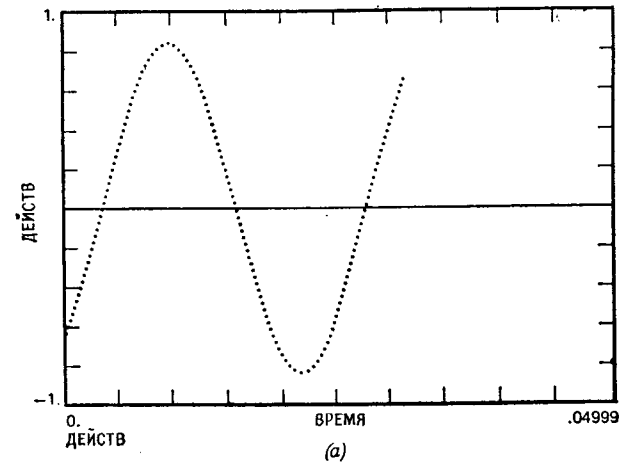


Рис. 9.8. а — синусоида на входе системы; б — синусоида на выходе линейной системы; амплитуда уменьшилась и фаза сдвинулась.

тервала ожидания. Более точно, если P_t — длина переходного отклика, а B_e — полоса частот отклика, то справедливо приближенное равенство $P_t \approx 1/B_e$; длину интервала времени ожидания перед измерениями амплитуды и фазы при помощи синусоиды нужно выбрать равной $2P_t$.

Рассматриваемый метод применяется в такой последовательности.

1. Выбирается осциллятор или генератор синусоиды нужной частоты.

2. Назначается тракт передачи данных на вход фильтра, смесителя или иного исследуемого устройства, который дает возможность получить на входе этих систем синусоиду.

3. Выжидается промежуток времени, необходимый для того, чтобы получился установившийся отклик.

4. Измеряется отношение амплитуды выхода к амплитуде входа и фазовый сдвиг выхода относительно входа.

5. Шаги 1—4 повторяются для всех частот, составляющих полосу частот отклика.

Преимущества метода исследования передаточных функций при помощи синусоид состоят в следующем. Во-первых, вся энергия сигнала концентрируется в одной частоте, поэтому отношение сигнала к шуму велико. Во-вторых, этот метод прост, применяется к системам непосредственно и допускает относительно простое оборудование. К недостаткам метода следует отнести в первую очередь исключительно долгое время, которое может потребоваться для полного исследования передаточной функции. Это неудобство заставляет искать иные подходы. Здесь мы остановимся на методе использования развернутой синусоиды, а затем — на методе случайных входов.

Метод получения передаточных функций при помощи развернутой синусоиды. Для того чтобы полностью определить передаточную функцию системы, необходимо иметь такую функцию на входе, которая несет достаточную мощность на всех частотах, имеющих заметные отклики. Как уже говорилось, метод одной синусоиды требует неприемлемо большого времени. Сократить время исследования можно при помощи развернутой синусоиды. *Линейно развернутая синусоида* определяется формулой

$$x(t) = \sin(\omega t),$$

где $\omega = at + b$; следовательно,

$$x(t) = \sin(at^2 + bt).$$

Мгновенная частота есть производная аргумента синусоиды, имеющая вид $\omega(t) = 2at + b$. При $t=0$ по этой формуле получаем начальную частоту $\omega(0) = 2pf_0 = b$. Конечная частота, которая достигается на P -й секунде, получается из равенств $\omega(P) = 2pf_1 = 2aP + b$. Таким образом, скорость развертки равна $2a$, где

$$2a = \frac{2\pi(f_1 - f_0)}{P} \quad \text{или} \quad a = \frac{\pi(f_1 - f_0)}{P} \text{ рад/с.}$$

Чтобы пройти частотную область от f_1 до f_0 за P с, потребуется скорость развертки $a/(2\pi) = (f_1 - f_0)/(2P)$.

Типичное поведение плотности спектра мощности развернутой синусоиды показано на рис. 9.9. Нередко приходится сталкиваться с заблуждением, что развернутая синусоида с постоянной амплитудой имеет «плоский» спектр. Как можно видеть из

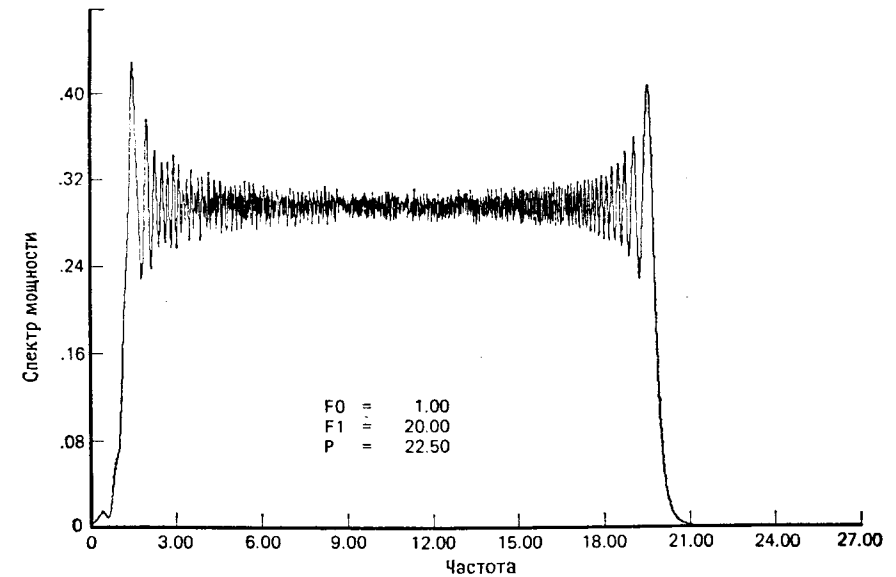


Рис. 9.9. Спектр развернутой синусоиды.

рисунка, это не так. В спектре выделяется «испорченный диапазон», величина которого не зависит от скорости развертки. По приближенной формуле

$$S_{\text{макс}} = \frac{1.38\pi}{4a} = 1.38 S_{\text{средн}}$$

можно получить крайние значения отклонений от среднего уровня спектра. Если бы спектральная плотность входа была функцией, постоянной вдоль всей области частот, то вычисления преобразования Фурье входа и не требовалось бы: достаточно было бы взглянуть на значения квадратного корня из плотности спектра мощности — по ним и определялся бы коэффициент усиления передаточной функции.

При использовании методов, основанных на применении кросс-спектров или отношений преобразований Фурье, дело обстоит не так просто, поскольку исследования осложняются

ограничениями на разрешающую способность и число ст. св. (при наличии существенного уровня шума). Упомянем еще об одной тонкости, связанной с методом развернутой синусоиды. Дело в том, что мощность, которую развернутая синусоида несет на взятом диапазоне частот, подается лишь в очень короткие промежутки времени. «При слишком скорой» развертке подчас не удается получить точного отклика систем, и немало примеров тому имеется по крайней мере в прикладных структурных исследованиях, где малых промежутков времени может не

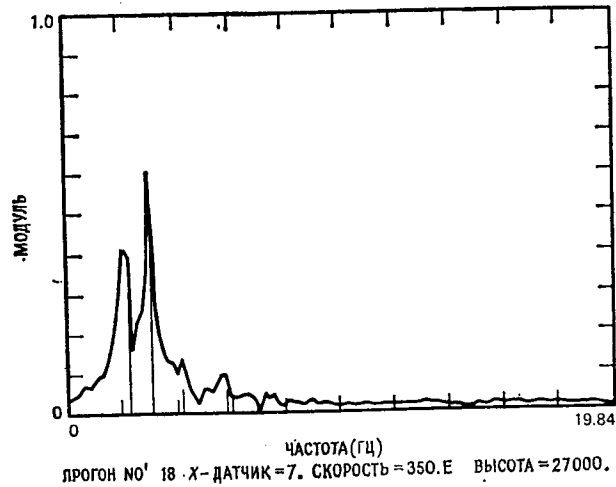


Рис. 9.10. Результаты теста по определению флаттера, проводившегося в AFPTC (один из научно-исследовательских центров военно-воздушных сил США.— Прим. перев.): модуль передаточной функции (27 000 футов = 8230 м).

хватать для того, чтобы все типы колебаний структуры при возбуждении полностью выходили на устойчивые режимы. Поэтому в каждом отдельном приложении, прежде чем сделать вывод о том, что такую возможность позволительно игнорировать, нужно поэкспериментировать с несколькими разными скоростями развертки.

На рис. 9.10 показана передаточная функция, полученная для одной из частей конструкции бомбардировщика В-1 (Рокуэлл) в ходе тестовых испытаний на полетные вибрации. В этих тестах использовалось возбуждение развернутой синусоидой.

9.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ СЛУЧАЙНЫХ ВХОДОВ

Соотношение (9.4) связывает выход с произвольным входом. При этом, по существу, никаких ограничений на вход не нало-

жено. В частности, в его качестве может выступать выборочная функция случайного процесса. В своей основе возможность использования таких входов восходит к тому факту, что для точной линейной системы без постороннего шума *одного измерения* достаточно для *точной оценки* передаточной функции системы.

В частности, представляется очень подходящим кандидатом для использования в качестве входной функции белый шум, несущий мощность на всех частотах. Разумеется, в реальных ситуациях посторонний шум всегда присутствует, поэтому приходится проводить какие-то операции усреднения, которые позволяют избавляться от влияния шума. Тем не менее тот факт, что имеется стационарная (в среднем) функция, несущая равные мощности на всех частотах (опять-таки в среднем), придает выбору белого шума в качестве входной функции исключительное значение по сравнению с другими возможностями, существующими для измерений передаточной функции.

Перечислим преимущества, которые дает использование в качестве входа случайной функции — белого шума.

1. Белый шум несет в среднем равные мощности на всех частотах.

2. Для данного уровня постороннего шума очень удобно проводить осреднения и по отрезкам ряда соответствующей длины, и по частотам в достаточно широких диапазонах, что дает возможность увеличивать число ст. св. и повышать тем самым точность оценок.

3. Чтобы получить необходимую точность при данном разрешении, которое требуется в исследовании, и постороннем шуме, необходимо лишь доводить время теста до соответствующей границы.

Недостатки метода случайных входов обусловлены только традицией. В прошлом из-за отсутствия полного понимания преимуществ этого подхода выбор исследовательского оборудования, предназначенного для генерации белого шума, был крайне ограничен. Однако применение ЭВМ для оценивания передаточных функций в приложениях (например, в тестах вибрационного контроля) заложило прочную практическую основу под методики, использующие случайные входы.

Если используется случайный шум, то применяется метод кросс-спектра, основанный на соотношении (9.8). При этом кросс-спектры и спектры мощности должны оцениваться правильно. Если спектральные оценки окажутся размытыми из-за недостаточного разрешения, то ошибки перейдут и в оценку передаточной функции.

На рис. 9.11 показан контрольный спектр, полученный в цифровой схеме контроля вибрации. Белый шум был получен при

помощи цифрового датчика случайных чисел. Вслед за оцениванием передаточной функции системы спектру входа придавалась такая форма, чтобы выходной спектр укладывался в заранее заданную полосу.

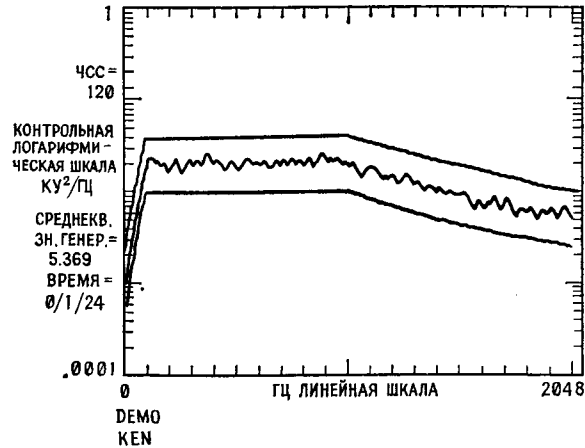


Рис. 9.11. Поведение согласованного спектра (КУ — коэффициент усиления).

9.11. ФУНКЦИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ ПРИ $B_e = 1/P$

Функция когерентности служит очень полезным параметром, описывающим системы типа вход—выход. Вместе с тем когерентность обладает рядом особых статистических свойств. Если внимательно посмотреть на формулы для ошибок, приведенные в § 9.5, в частности на равенство (9.20), то обнаружится необычное поведение смещения, которое при $n \rightarrow 2$ стремится к бесконечности. Это объясняется тем, что при $n = 2$ функция когерентности равна в точности единице. Поясним это следующим соотношением:

$$\gamma_{xy}^2(k) = \frac{|S_{xy}(k)|^2}{S_x(k) S_y(k)} = \frac{(1/P)^2 X(k) Y^*(k) X^*(k) Y(k)}{(1/P) X^*(k) X(k) (1/P) Y^*(k) Y(k)} \equiv 1.$$

Оно справедливо в силу того, что при $n = 2$ (или $B_e = 1/P$) никакого осреднения нет. Вообще говоря, среднее отношения, разумеется, не равно отношению средних, и, следовательно, в общем случае когерентность не должна быть единицей.

Рассмотренное явление помогает уяснить более наглядное представление о когерентности как о линейной связи. Предположим, что имеется одна точка на комплексной плоскости, представляющая собой преобразование Фурье $X(f)$ в некоторой частоте. Далее, допустим, что на этой же плоскости находится точ-

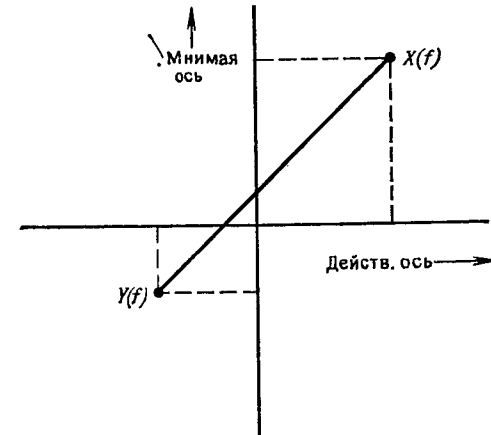


Рис. 9.12. Иллюстрация полной когерентности в одной частоте.

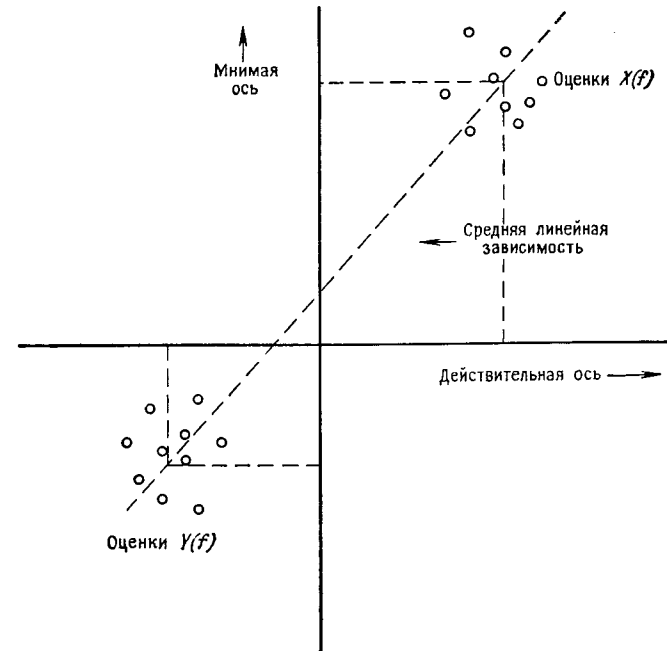


Рис. 9.13. Осредненное линейное соотношение между группами оценок $X(f)$ и оценок $Y(f)$.

ка второго преобразования Фурье, на этот раз $Y(f)$. Как показано на рис. 9.12, эти две точки определили единственную прямую; следовательно, они связаны лишь одним линейным соотношением, и, значит, когерентность должна быть равна 1.

Если же имеется не две, а несколько оценок преобразования Фурье, каждое со своей ошибкой, то все они сгруппируются вокруг некоторых средних значений $X(f)$ и $Y(f)$. В этом случае прямую можно провести по средним, определенным методом наименьших квадратов. Здесь когерентность будет служить мерой точности подгонки линии (рис. 9.13).

Кроме того, как показал простым способом Купмэнс (1974), с. 309, при слишком широком разрешении может возникать смещение когерентности, вызванное размыванием. Это касается, в частности тех областей исследования, где встречаются быстро меняющиеся фазы. Такие фазы возникают, например, при резонансах механических систем.

9.12. ПРИМЕРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Цифровой фильтр. Если конструируется цифровой фильтр, то мы сталкиваемся с примером совершенно когерентной линейной системы, для которой получить хорошие оценки передаточной функции не составляет труда. Они показаны на рис. 9.14. Здесь изображена передаточная функция низкочастотного рекурсивного фильтра Баттеруорта, полученная при помощи вычислений кросс-спектра.

Как видно из рисунка, коэффициент усиления и фаза — совершенно гладкие функции. Те статистические ошибки, которые здесь имеются, очень малы.

Эффект добавления шума. Продемонстрируем влияние добавления шума на примере простого электрического фильтра, к выходу которого добавлен независимый белый шум. На рис. 9.15—9.17 рассмотрены ситуации с 0, 10 и 50%-м уровнем постороннего шума. В каждом из случаев число ст.св. в анализе одинаково и равно 128. Следует заметить, что белый шум, добавляемый к выходу, имеет по определению постоянную мощность вдоль всей полосы частот. Тем не менее на выходе мощность распределена по частотам неравномерно. В полосе пропускания полоснопропускающий фильтр оставляет большую мощность, чем на всех остальных частотах. Поэтому отношение сигнала к постороннему шуму ниже вне полосы пропускания. Это находит свое отражение в гораздо большей статистической изменчивости вне полосы пропускания.

Функция когерентности неразрывно связана с передаточной функцией. Это объясняется исключительно важной ролью

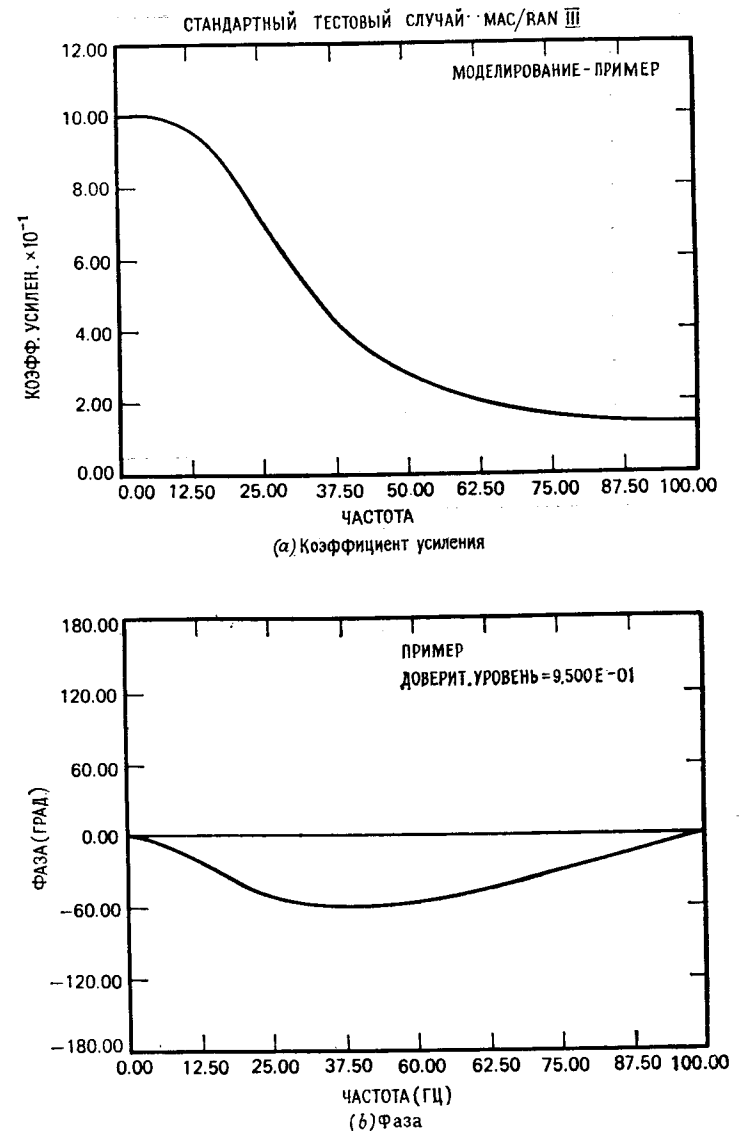


Рис. 9.14. *a* — коэффициент усиления; *b* — фаза цифрового фильтра.

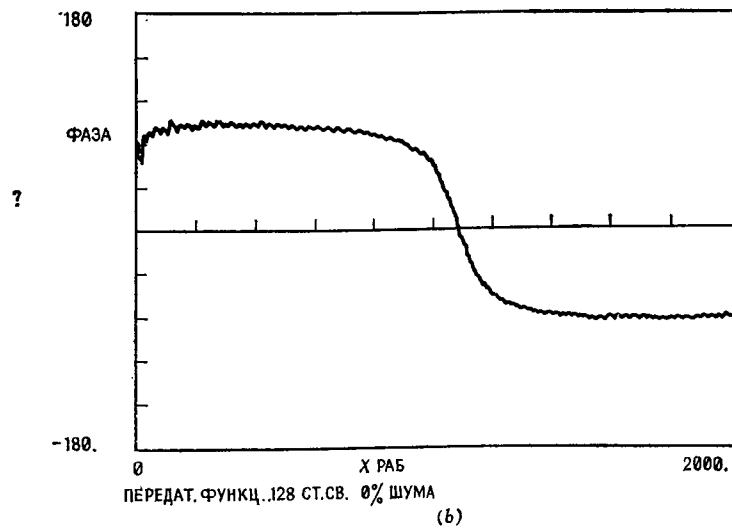
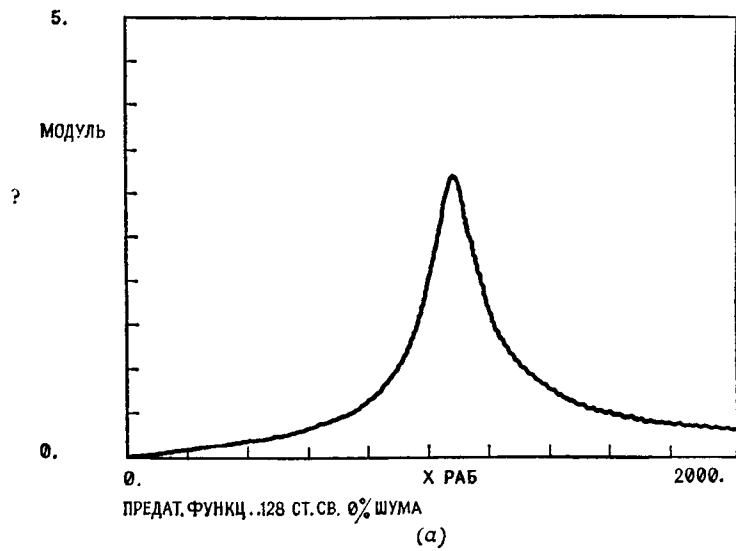


Рис. 9.15. Оценка передаточной функции цифрового фильтра при 0%-м уровне шума.

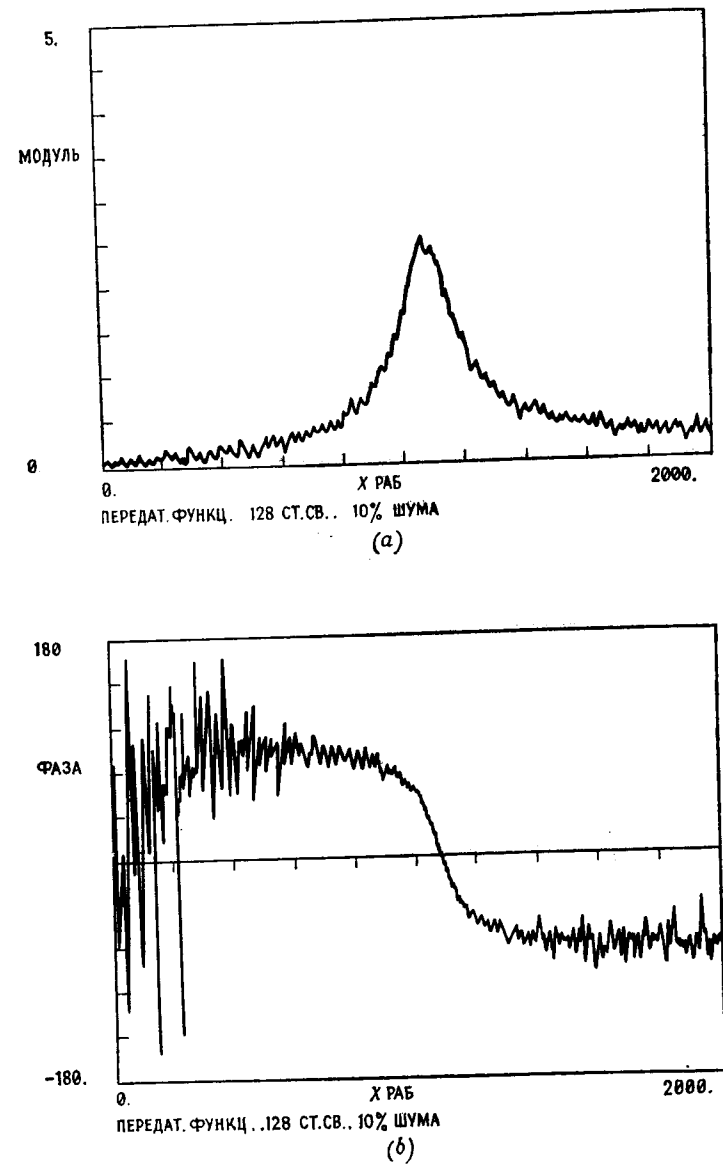


Рис. 9.16. Оценка передаточной функции цифрового фильтра при 10%-м уровне шума.

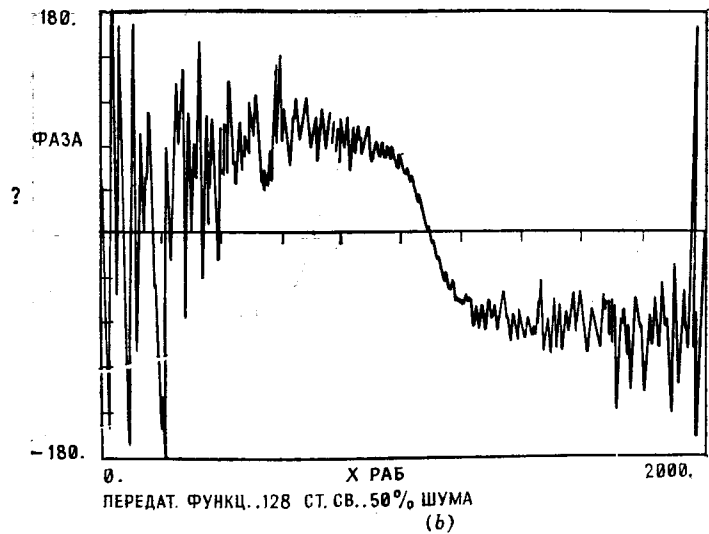
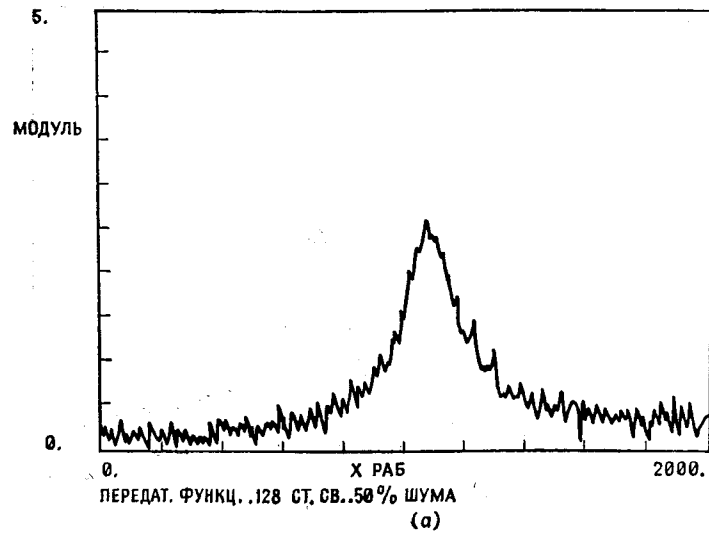


Рис. 9.17. Оценка передаточной функции цифрового фильтра при 50%-м уровне шума.

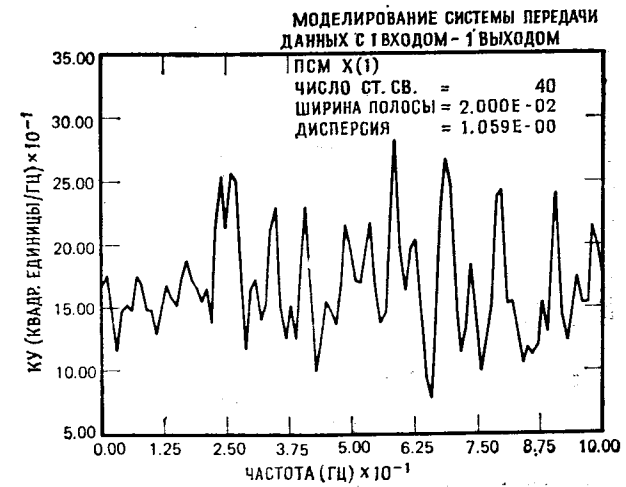


Рис. 9.18. ПСМ входа $\hat{G}_{xy}(f)$.

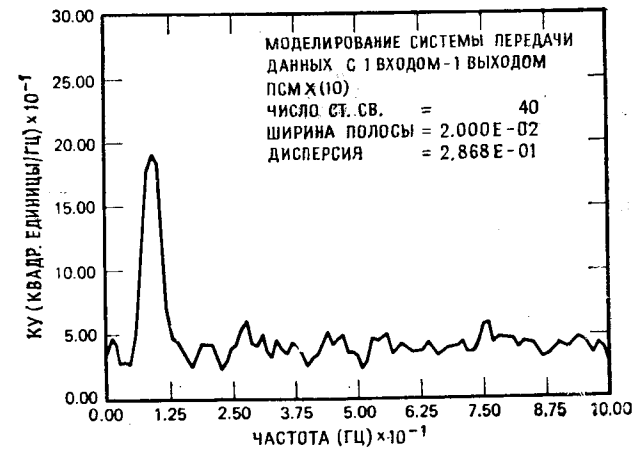
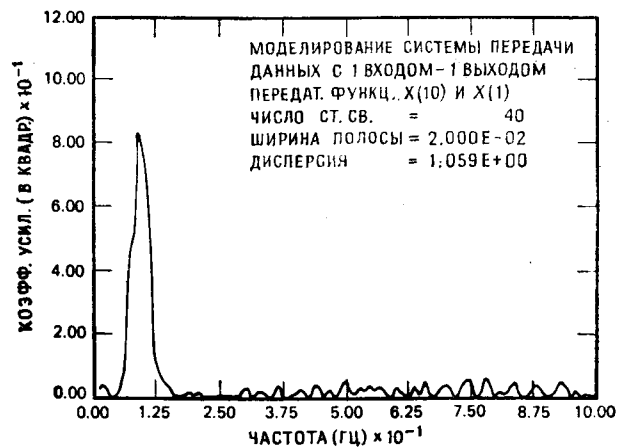
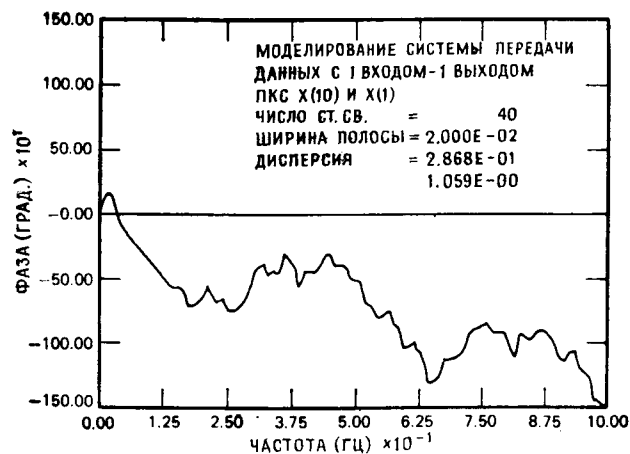
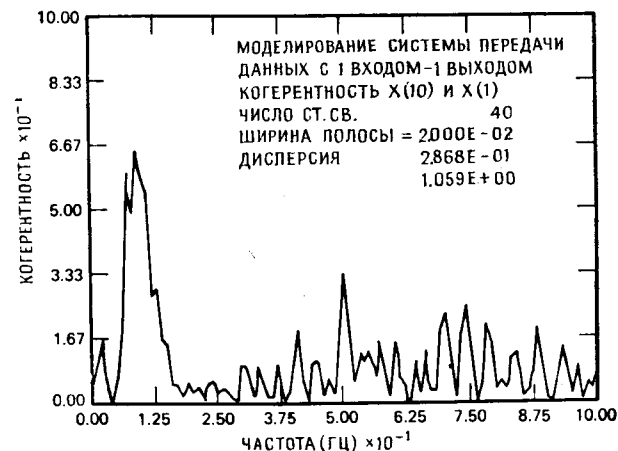


Рис. 9.19. ПСМ выхода $\hat{G}_{yy}(f)$.

Рис. 9.20. Коэффициент усиления фильтра $|\hat{H}_{xy}(f)|$.Рис. 9.21. Фаза фильтра $\hat{\varphi}_{xy}(f)$.

функции когерентности в оценке статистической точности результатов — количественную характеристику этой точности дают вычисления доверительных границ. Что же касается качественной характеристики, то, учитывая ее немалую пользу в исследованиях, мы коснемся сейчас связанных с ней вопросов подробнее. На рис. 9.18—9.22 приведены $\hat{G}_{xx}(f)$, $\hat{G}_{yy}(f)$, $|\hat{H}_{xy}(f)|$, $\hat{\varphi}_{xy}(f)$ и $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$ соответственно; здесь $x(t)$ — псевдослучайный белый шум,

Рис. 9.22. Когерентность $\hat{\gamma}_{xy}^2(f)$.

функция $H_{xy}(f)$ соответствует полоснопропускающему цифровому фильтру. График когерентности показывает, что при высокой истинной когерентности в полосе пропускания фильтра (около 0.8 в этом случае, поскольку добавлен посторонний шум) оценка когерентности становится ближе к истинному значению. С другой стороны, низкая когерентность (почти равная нулю вне полосы пропускания) приводит к тому, что оценка проявляет высокую изменчивость. Отметим, что важно принимать в расчет и общий вид функции. Очень отчетливо выделяется диапазон высокой когерентности, расположенный в низких частотах. Это заставляет «полагать», что истинная когерентность на самом деле высока (начиная примерно с 0.2 Гц наблюдается очень нерегулярное поведение графика). Поэтому, даже встречая отдельные довольно высокие пики (например, $\hat{\gamma} = 0.4$ около 0.5 Гц), не следует придавать им большого значения ввиду «общей» нерегулярности функции. В итоге наибольшее доверие должны вызывать части графиков передаточной функции и фазы, заключенные в диапазоне от 0.05 до 0.15 Гц, и меньшее — вне этого диапазона. К сожалению, нам неизвестен более точный коли-

чественный способ описания поведения такого типа. Однако подобного рода ситуации на практике не редкость, поэтому такие рассмотрения весьма полезны.

Пример системы со многими входами. Рассмотрим искусственную систему с двумя входами (рис. 9.23). Передаточные функции системы $H_1(f)$ и $H_2(f)$ отвечают двум восьмиполосным полоснопропускающим фильтрам с полосами пропускания от 0.07 до 0.12 Гц и от 0.14 до 0.24 Гц соответственно. Корреляция входов моделируется добавлением к первому входу $x_1(t)$ зна-

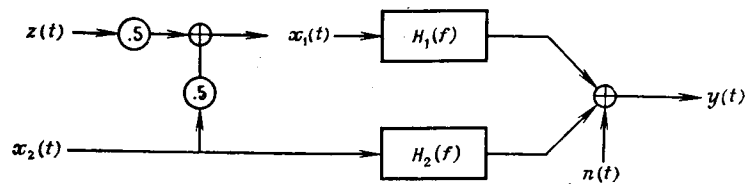


Рис. 9.23. Система с двумя коррелирующими входами.

чений $x_2(t)$ второго входа, уменьшенных вдвое. Если бы оба входа были полностью независимыми, то достаточно было бы решений для $H_1(f)$ и $H_2(f)$, полученных так же, как в ситуации с одним входом. Наличие корреляции между входами заставляет для вычисления точных результатов пользоваться подходом, предназначенным для систем со многими входами и включающим в себя операцию обращения матриц.

Изучение графиков на рис. 9.24—9.32 помогает сделать следующие выводы.

1. Характеристики полоснопропускающих фильтров по графикам коэффициентов усиления можно установить лишь довольно грубо.

2. График множественной когерентности показывает, что данные на выходе проявляют высокую степень линейной связанности со входами на определенных частотах. Коэффициентами усиления полоснопропускающих фильтров. Как следует из формул доверительных границ, наиболее надежные результаты для передаточных функций получаются там, где множественная когерентность имеет большие значения. Экспериментально определяем, что отдельным пикам графика когерентности в диапазоне высоких частот можно не придавать значения ввиду «общего» нерегулярного поведения там графика.

3. Сопоставление обычной и частной когерентностей для двух каналов подтверждает тот факт, что линейная связь каналов ограничена диапазонами примерно 0.03—0.10 Гц и 0.13—0.26 Гц для каналов 1 и 2 соответственно. Эти диапазоны выявились



Рис. 9.24. Пример со многими входами. Частная когерентность для второго фильтра. График показывает, что эффекты, сохраняющиеся после первой полосы пропускания, почти полностью исчезают, а эффекты после прохождения второй полосы пропускания остаются.

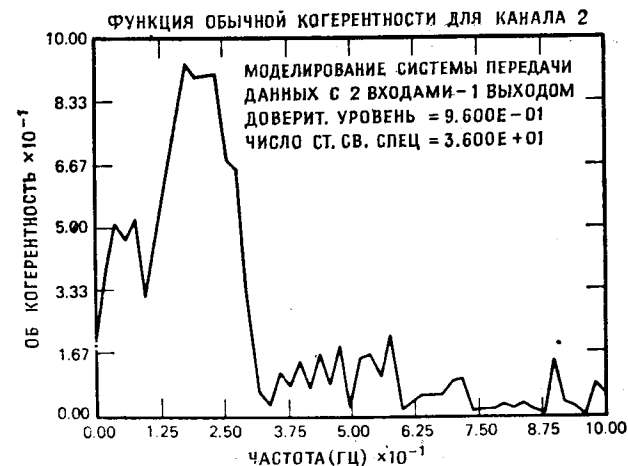


Рис. 9.25. Пример со многими входами. Обычная когерентность для второго входа оставляет полосу пропускания первого фильтра примерно на половинном уровне мощности (когерентность равна примерно 0.5).

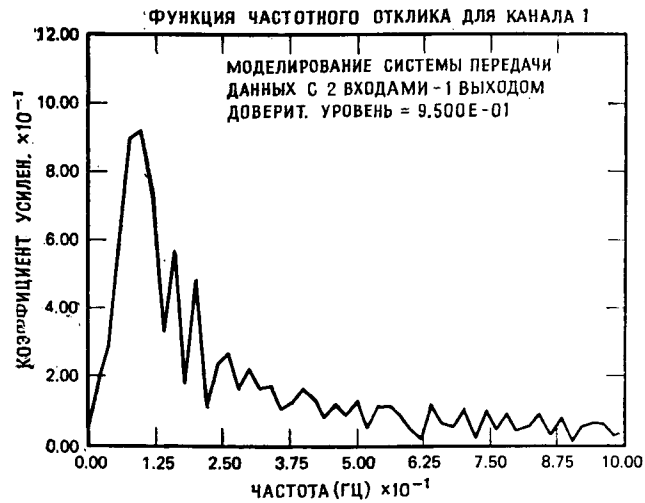


Рис. 9.26. Пример со многими входами. Коэффициент усиления в полосе пропускания (примерно 0.07—0.12 Гц) первого фильтра.

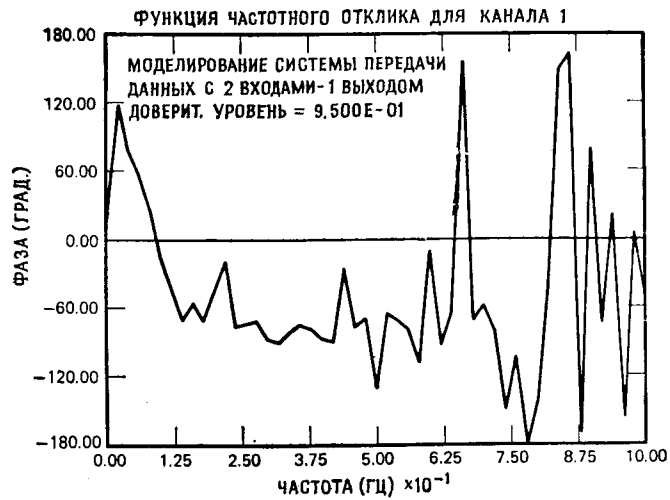


Рис. 9.27. Пример со многими входами. Выборочная фаза первого фильтра.

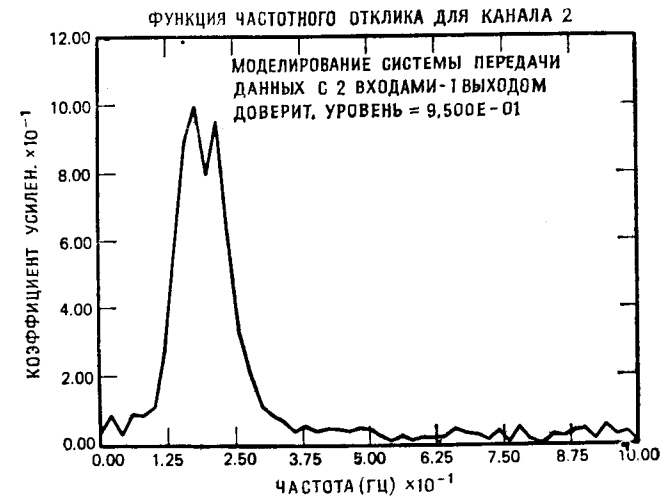


Рис. 9.28. Пример со многими входами. Коэффициент усиления в полосе пропускания (примерно 0.14—0.24 Гц) второго фильтра.

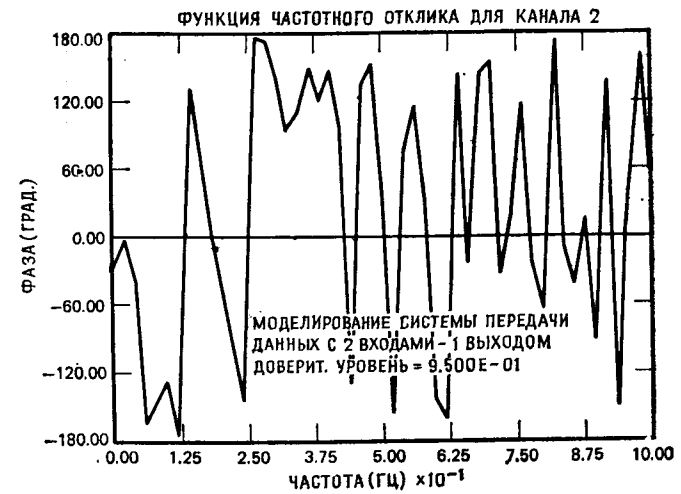


Рис. 9.29. Пример со многими входами. Выборочная фаза второго фильтра.

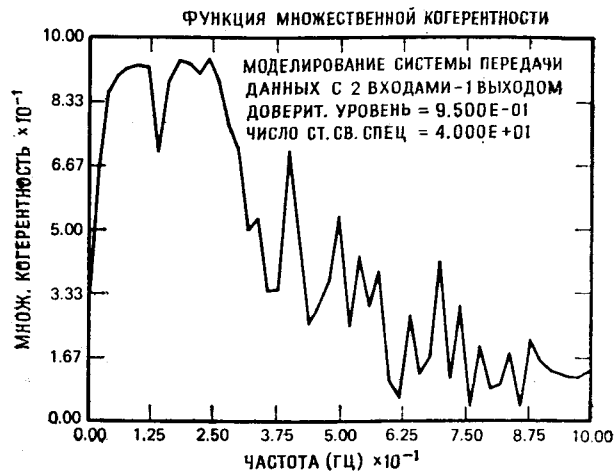


Рис. 9.30. Пример со многими входами. Функция множественной когерентности. Обратите внимание на высокую когерентность в полосах пропускания фильтров.

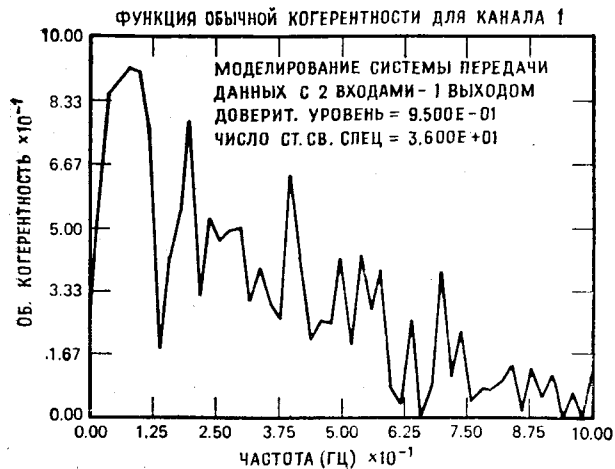


Рис. 9.31. Пример со многими входами. Обычная когерентность для первого фильтра. Обратите внимание на высокую когерентность в полосе пропускания первого фильтра и несколько неустойчивую высокую когерентность в полосе второго фильтра.

в результате того, что видимая мощность в высоких частотах в первом случае и в низких частотах во втором случае пропала при вычислении частной когерентности.

Рассмотренные примеры были призваны объяснить, как делаются различные полезные выводы на основе вычислений (в случае многих входов) передаточных функций и различных функций когерентности. Выводы становятся более точными, если учитываются физические условия. Например, если можно выдвинуть

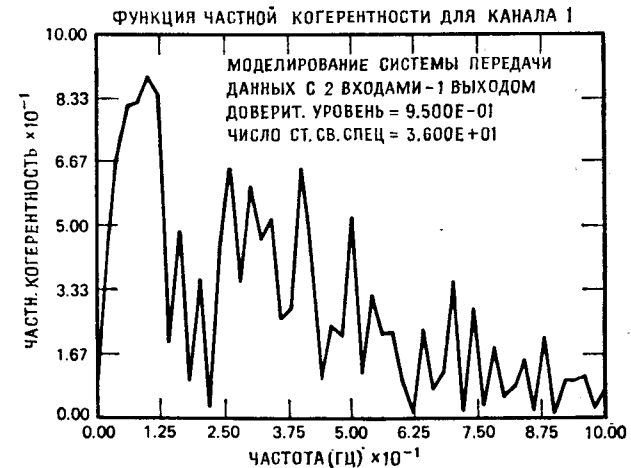


Рис. 9.32. Пример со многими входами. Частная когерентность для первого фильтра. Обратите внимание на то, что большая часть значений когерентности на протяжении полосы пропускания — очень малые величины. Исключение составляет первый всплеск.

гипотезу о том, что на двух каналах с передачей стоят полоснопропускающие фильтры, то, получив результаты, легко сделать вывод о том, противоречат они гипотезе или нет.

Некоторые замечания к графикам. В области теории управления передаточные функции по традиции переводят на графиках в дБ, используя логарифмическую шкалу. Мы предпочитаем графики типа линейная шкала — линейная шкала, хотя для выбора каждого представления есть свои аргументы, говорящие в его пользу. Обозначение дБ пришло из акустики, где оно отвечает децибелам, определяемым формулой $1\text{дБ} = 10 \log(x/\text{ед})$, где «ед» — единица измерения переменной x . Обычно в качестве такой единицы в теории управления выступает напряжение $1\text{дБ} = 20 \log(v_1/v_2)$ или, через отношение мощностей, $1\text{дБ} = 10 \log(v_1^2/v_2^2) = 20 \log(v_1/v_2)$, поскольку мощность пропорциональна квадрату напряжения.

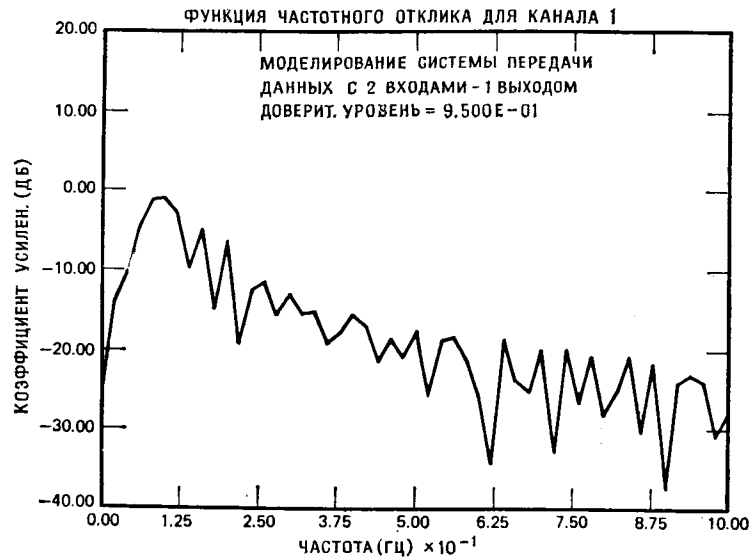


Рис. 9.33. График коэффициента усиления фильтра для канала 1 (шкала децибел). Сравните с рис. 9.26.



Рис. 9.34. График коэффициента усиления фильтра для канала 2 (шкала децибел). Сравните с рис. 9.26.

Для коэффициентов усиления передаточных функций роль «ед» выполняет коэффициент $1: |H| \text{ дБ} = 10 \log \frac{|H(f)|^2}{1} = 20 \log |H(f)|$. Единица выбирается потому, что выход физической системы нельзя усилить (если не используется внешняя мощность за счет усилителя), и, значит, коэффициент, равный единице, будет давать фильтр, пропускающий все данные без изменения (на всех частотах). Значению 1 соответствует в дБ значение 0, поэтому затухание характеризуется отрицательными значениями.

Логарифмическое преобразование расширяет диапазон представимости данных на графиках. Это положение иллюстрируют графики на рис. 9.33 и 9.34, которые получены из графиков на рис. 9.26 и 9.28 переходом к дБ. Заметим, что логарифмическая шкала после перехода к дБ дана в линейных единицах. Следует иметь в виду, что 10 дБ отражают изменение, характеризуемое множителем 10. Почти все понятия, затронутые сейчас, пришли из акустики — человеческое ухо воспринимает силу звука логарифмическим образом. Иначе говоря, при возрастании звука в 100 раз его громкость будет казаться лишь вдвое больше.

Логарифмическое преобразование частоты растягивает нижние и сжимает верхние частоты. Полосы пропускания многих физических систем шире на высоких частотах. В этом случае логарифмическое преобразование сделает полосы низких и высоких частот постоянными.

Упражнения

- 9.1. Приведите опущенные при выводе формулы (9.10) выкладки.
 - 9.2. Докажите, что формулы (9.16) и (9.9) эквивалентны.
 - 9.3. Докажите формулу (9.29).
 - 9.4. Перепишите соотношения (9.27) — (9.29) в их простейшей форме через элементы спектральной матрицы.
 - 9.5. Получите (9.4) из (9.3), применив преобразование Фурье к (9.3). Предполагается, что все необходимые математические условия существования преобразований и т. п. выполнены.
- Почти все формулы для линейных систем можно вывести при помощи комплексных аналогов величин, к которым применяется преобразование Фурье (в каждой частоте f), и понятиями классической статистики. Определим дисперсию формулой $E[X^*X]$, а ковариацию — формулой $E[X^*Y]$. Пусть ПСМ служит аналогом дисперсии, а кросс-спектр — ковариации. Эти соглашения используйте в упр. 9.6 — 9.8.

- 9.6. Выведите соотношение (9.7) как аналог статистической формулы

$$\sigma_y^2 = \beta^2 \sigma_x^2, \quad y = \beta + \epsilon,$$

где ϵ — независимый шум с нулевым средним.

- 9.7. Выведите соотношение (9.8) как аналог статистической формулы $\sigma_{xy} = \beta_{xy} \sigma_x^2$, где $\sigma_{xy} = \text{cov}[x, y]$.

9.8. Что служит аналогом обычной когерентности (9.9) в классической статистике?

- 9.9. Получите необходимые соотношения для частного случая системы с двумя входами и одним выходом.

- 9.10. Получите обратным преобразованием Фурье формулу (9.30).