

5. Jury E. I., Theory and Application of the Z-Transform Method, Wiley, N. Y., 1964.
6. Kuo F. F., Kaiser J. F., Systems Analysis by Digital Computer, Wiley, N. Y., 1966.
7. Rader C. M., Gold B., Digital Filter Design Techniques in the Frequency Domain, *Proc. IEEE*, 55, No. 2, 149—171 (Feb. 1967); есть русский перевод: Голд, Рейдер, Методы расчета цифровых фильтров в частотной области, *ТИИЭР*, т. 55, № 2, стр. 19—43 (1967).
8. Gold B., Oppenheim A. V., Rader C. M., Theory and Implementation of the Discrete Hilbert Transform, *Proc. Sym. Computer Proc. in Communication*, 235—250 (1969).
9. Stockham T. G., High Speed Convolution and Correlation, *AFIPS Conference Proceedings*, 28, 229—233 (1966).
10. Oppenheim A. V., Schaffer R. W., Digital Signal Processing, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1975.

## ТЕОРИЯ И РАСЧЕТ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С ИМПУЛЬСНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

### 3.1. Введение

Как было показано в гл. 2, класс последовательностей конечной длины обладает некоторыми свойствами, желательными с точки зрения построения фильтров. Например, никогда не возникает вопрос об устойчивости и физической реализуемости фильтров, поскольку КИХ-последовательности гарантируют устойчивость, а при введении соответствующей конечной задержки и реализуемость. Более того, ниже будет показано, что КИХ-последовательности можно выбрать так, чтобы фильтры имели *строго* линейные фазовые характеристики. Поэтому, используя КИХ-последовательности, можно проектировать фильтры с произвольной амплитудной характеристикой.

Интересно отметить, что до появления алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ) реализация КИХ-фильтров считалась, как правило, нереальной, поскольку для достаточно хорошей аппроксимации фильтров с острыми срезами требуются весьма длинные последовательности. Разработка на основе высокоэффективного алгоритма БПФ методов быстрой свертки изменила это положение, и в настоящее время КИХ-фильтры успешно конкурируют с БИХ-фильтрами, имеющими острые срезы в частотной характеристике.

### 3.2. Порядок расчета фильтров

Порядок расчета цифрового фильтра (реализуемого программным путем на ЦВМ или в виде специализированного устройства) включает четыре основных этапа:

1. Решение задачи аппроксимации с целью определения коэффициентов фильтра, при которых фильтр удовлетворяет заданным требованиям.

2. Выбор конкретной схемы построения фильтра и квантование найденных значений его коэффициентов в соответствии с фиксированной длиной слова.

3. Квантование переменных величин фильтра, т. е. выбор длины слова входных, выходных и промежуточных переменных.

4. Проверка моделированием, удовлетворяет ли полученный фильтр заданным требованиям.

После этапа 4, если заданные требования не удовлетворяются, приходится возвращаться к этапам 2 и 3.

Конечно, было бы желательно выполнять три первых этапа одновременно, т. е. решать задачу аппроксимации для произвольной схемы фильтра и для слов произвольной длины, однако маловероятно, что в ближайшем будущем такой подход будет разработан. Поэтому все перечисленные этапы приходится выполнять отдельно. В настоящей главе будет обсуждаться лишь задача аппроксимации КИХ-фильтров. Этапы 2 и 3 будут рассмотрены в гл. 5, а этап 4 сам по себе достаточно очевиден и не требует обсуждения.

### 3.3. Свойства КИХ-фильтров

Имеется много причин, побуждающих к изучению способов проектирования КИХ-фильтров. Перечислим основные достоинства этих фильтров:

1. Легко создавать КИХ-фильтры со строго линейной фазовой характеристикой. Во многих случаях, когда проектируется фильтр с произвольной амплитудной характеристикой, это упрощает задачу аппроксимации. Фильтры с линейной фазовой характеристикой особенно важны в случаях, когда приходится учитывать дисперсионные искажения, связанные с нелинейностью фазовой характеристики (например, при обработке речи и передаче данных).

2. КИХ-фильтры можно эффективно строить как по рекурсивной, так и по нерекурсивной схемам.

3. КИХ-фильтры, реализуемые нерекурсивно, т. е. с помощью прямой свертки, всегда устойчивы.

4. При нерекурсивной реализации КИХ-фильтров шумы округления, возникающие за счет выполнения арифметических операций с конечной точностью, легко минимизировать.

Перечислим недостатки КИХ-фильтров:

1. Для аппроксимации фильтров, частотные характеристики которых имеют острые срезы, требуется импульсная характеристика с большим числом отсчетов  $N$ . Поэтому при использовании обычной свертки необходимо выполнять большой объем вычислений.

2. Задержка в КИХ-фильтрах с линейной фазовой характеристикой не всегда равна целому числу интервалов дискретизации. В некоторых приложениях такая некратная задержка может вызвать определенные трудности.

В последующих разделах главы будут рассмотрены свойства КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой, а также некоторые методы расчета КИХ-фильтров.

### 3.4. Характеристики КИХ-фильтров с линейной фазовой характеристикой

Пусть  $\{h(n)\}$  — физически реализуемая последовательность конечной длины, заданная на интервале  $0 \leq n \leq N-1$ . Ее  $z$ -преобразование равно

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = h(0) + h(1) z^{-1} + \dots + h(N-1) z^{-(N-1)}. \quad (3.1)$$

Преобразование Фурье от  $\{h(n)\}$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} \quad (3.2)$$

является периодическим по частоте с периодом  $2\pi$ , т. е.

$$H(e^{j\omega}) = H[e^{j(\omega+2\pi m)}], \quad m=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3.3)$$

Рассматривая только действительные последовательности  $\{h(n)\}$ , получим дополнительные ограничения на функцию  $H(e^{j\omega})$ , представив ее через амплитуду и фазу:

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j\theta(\omega)}. \quad (3.4)$$

Знаки  $\pm$  действительно необходимы, поскольку функция  $H(e^{j\omega})$  на самом деле равна

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) e^{j\theta(\omega)}, \quad (3.5)$$

где  $H^*(e^{j\omega})$  — действительная функция, принимающая положительные и отрицательные значения. Из уравнения (3.2) видно, что модуль преобразования Фурье является симметричной функцией, а фаза — антисимметричной функцией частоты, т. е.

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})|, \quad 0 \leq \omega \leq \pi, \quad (3.6a)$$

$$\theta(\omega) = -\theta(-\omega). \quad (3.6b)$$

На практике при расчете КИХ-фильтров часто требуется строго линейная фазовая характеристика. Рассмотрим, при каких условиях импульсная характеристика фильтра  $h(n)$  будет обеспечивать строго линейность его фазовой характеристики. Требование линейности фазы фильтра является еще одним ограничением; оно означает, что фазовая характеристика  $\theta(\omega)$  имеет вид

$$\theta(\omega) = -\alpha\omega, \quad -\pi \leq \omega \leq \pi, \quad (3.7)$$

где  $\alpha$  — постоянная фазовая задержка, выраженная через число интервалов дискретизации. Используя выражения (3.4) и (3.7), перепишем соотношение (3.2) следующим образом:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n} = \pm |H(e^{j\omega})| e^{-j\alpha\omega}. \quad (3.8)$$

Приравнивая действительные и мнимые части, получим

$$\pm |H(e^{j\omega})| \cos(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n), \quad (3.9a)$$

$$\pm |H(e^{j\omega})| \sin(\alpha\omega) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n). \quad (3.9б)$$

Чтобы избавиться от множителя  $\pm |H(e^{j\omega})|$ , разделим правые и левые части уравнений (3.9a) и (3.9б):

$$\frac{\sin(\alpha\omega)}{\cos(\alpha\omega)} = \operatorname{tg}(\alpha\omega) = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)}, \quad (3.10)$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha\omega) = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)}. \quad (3.11)$$

Существуют два возможных решения уравнения (3.10) или уравнения (3.11). Первое получается, если положить  $\alpha = 0$ , что дает [с использованием (3.11)]

$$0 = \frac{\sum_{n=1}^{N-1} h(n) \sin(\omega n)}{h(0) + \sum_{n=1}^{N-1} h(n) \cos(\omega n)}. \quad (3.12)$$

Это уравнение имеет единственное решение, соответствующее произвольному  $h(0)$  и  $h(n) = 0$  при  $n \neq 0$ , т. е. импульсная характеристика фильтра состоит из одиночного импульса — результат, не представляющий интереса. Другое возможное решение соответствует случаю  $\alpha \neq 0$ . Для этого случая уравнение (3.11) можно записать, перекрестно умножая члены, в виде

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cos(\omega n) \sin(\alpha\omega) - \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin(\omega n) \cos(\alpha\omega) = 0, \quad (3.13)$$

откуда

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n) \sin[(\alpha - n)\omega] = 0. \quad (3.14)$$

Поскольку уравнение (3.14) имеет вид ряда Фурье, то решение этого уравнения, если оно существует, является единственным.

Легко заметить, что решение уравнения (3.14) удовлетворяет следующим условиям:

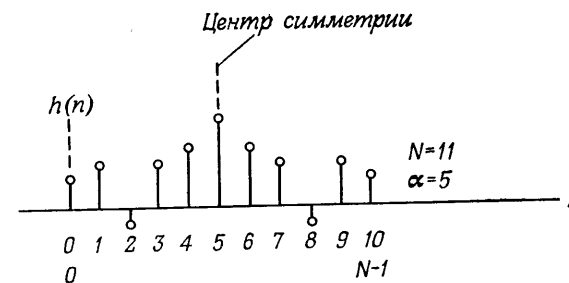
$$\alpha = \frac{N-1}{2}, \quad (3.15)$$

$$h(n) = h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (3.16)$$

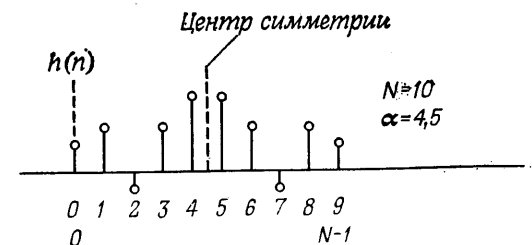
Следует подчеркнуть смысл условий (3.15) и (3.16). Условие (3.15) означает, что для каждого  $N$  существует только одна фазовая задержка  $\alpha$ , при которой может достигаться строгая линейность фазовой характеристики фильтра. Из условия (3.16) следует, что при заданном  $\alpha$ , удовлетворяющем условию (3.15), импульсная характеристика должна обладать вполне определенной симметрией.

Целесообразно рассмотреть использование условий (3.15) и (3.16) отдельно для случаев четного и нечетного  $N$ . Если  $N$  — нечетное, то  $\alpha$  — целое, т. е. задержка в фильтре равна целому числу интервалов дискретизации. Типичная импульсная характеристика фильтра с линейной фазой для случая  $N = 11$  (или  $\alpha = 5$ ) приведена на фиг. 3.1. Центр симметрии характеристики приходится на пятый отсчет.

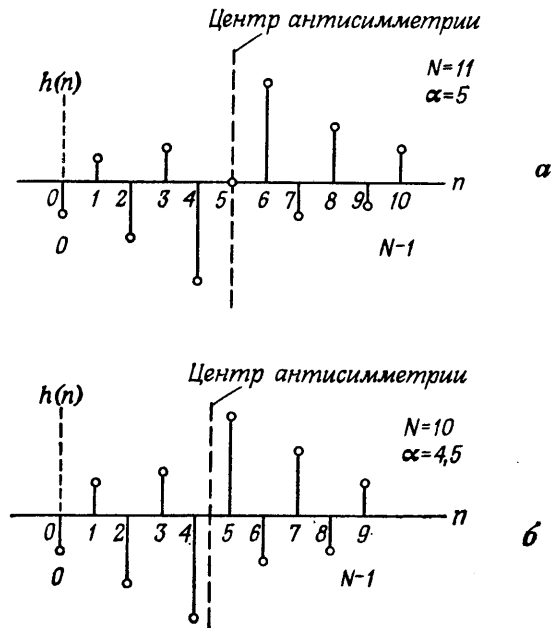
Типичная импульсная характеристика фильтра с линейной фазой при четном  $N$  показана на фиг. 3.2. В этом примере  $N = 10$



Фиг. 3.1. Типичная импульсная характеристика при нечетном  $N$  (четная симметрия).



Фиг. 3.2. Типичная импульсная характеристика при четном  $N$  (четная симметрия).



Фиг. 3.3. Импульсная характеристика при нечетном (а) и четном (б) значениях  $N$  (нечетная симметрия).

и, как следует из (3.15),  $\alpha = \frac{1}{2} = 4,5$ . Таким образом, задержка в фильтре составляет 4,5 интервала дискретизации. Это означает, что центр симметрии импульсной характеристики лежит посередине между двумя отсчетами, как показано на фиг. 3.2. В разд. 3.36 и 3.37 будет рассмотрено несколько важных видов фильтров с линейной фазой, в которых задержка преимущественно равна нецелому числу интервалов дискретизации (т. е. их импульсная характеристика имеет четное число отсчетов  $N$ ).

Согласно условию (3.7) линейности фазовой характеристика фильтра, требуется, чтобы фильтр имел постоянные как групповую, так и фазовую задержки. Если, как это часто бывает, достаточно, чтобы только групповая задержка<sup>1)</sup> была постоянной, можно определить еще один тип фильтра с линейной фазой, фазовая характеристика которого является кусочно-линейной функцией частоты  $\omega$ , т. е.

$$H(e^{j\omega}) = \pm |H(e^{j\omega})| e^{j(\beta - \alpha\omega)}. \quad (3.17)$$

<sup>1)</sup> Групповая задержка фильтра равна производной от фазовой характеристики по частоте в отличие от фазовой задержки, равной отношению фазы к частоте.

Рассуждая так же, как и при переходе от (3.8) к (3.14), можно показать, что новое единственное решение удовлетворяет следующим условиям:

$$\alpha = \frac{N-1}{2}, \quad (3.18a)$$

$$\beta = \pm \frac{\pi}{2}, \quad (3.18б)$$

$$h(n) = -h(N-1-n), \quad 0 \leq n \leq N-1. \quad (3.18в)$$

Фильтры, удовлетворяющие условиям (3.18), снова создают задержку в  $(N-1)/2$  интервалов дискретизации, но их импульсные характеристики в отличие от предыдущего случая антисимметричны относительно центра. Для примера на фиг. 3.3, а и б показаны импульсные характеристики фильтров с нечетным и четным  $N$ , удовлетворяющие условиям (3.18). Следует отметить, что для нечетных значений  $N$ , согласно (3.18в),  $h[(N-1)/2] = 0$ . Условия (3.18) будут использованы в разд. 3.36 и 3.37 при расчете широкополосных дифференциаторов и преобразователей Гильберта.

Итак, в зависимости от значения  $N$  (нечетные или четные) и вида симметрии импульсной характеристики (симметричная или антисимметричная характеристика) возможны четыре различных вида КИХ-фильтров с линейными фазовыми характеристиками.

### 3.5. Частотная характеристика КИХ-фильтров с линейной фазой

Записав частотную характеристику КИХ-фильтров с линейной фазой в виде

$$H(e^{j\omega}) = H^*(e^{j\omega}) e^{j(\beta - \alpha\omega)}, \quad (3.19)$$

где  $H^*(e^{j\omega})$  — действительная функция, а  $\alpha$  и  $\beta$  определяются формулами (3.18), выразим функцию  $H^*(e^{j\omega})$  через значения коэффициентов импульсной характеристики для каждого из четырех видов фильтров с линейной фазой. Соответствующие формулы будут получены в данном разделе. Позже они будут использованы при изложении различных методов расчета КИХ-фильтров с заданными частотными характеристиками.

*Фильтр вида 1. Симметричная импульсная характеристика, нечетное  $N$ .* Для этого случая  $H(e^{j\omega})$  можно представить в виде

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\omega(N-1)/2} + \sum_{n=(N+1)/2}^{N-1} h(n) e^{-j\omega n}. \quad (3.20)$$

Делая замену  $m = N - 1 - n$  во второй сумме, получим

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \\ &= \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) e^{-j\omega n} + h\left(\frac{N-1}{2}\right) e^{-j\omega(N-1)/2} + \\ &\quad + \sum_{m=0}^{(N-3)/2} h(N-1-m) e^{-j\omega(N-1-m)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Поскольку  $h(n) = h(N-1-n)$ , две суммы в (3.21) можно объединить, а член  $e^{-j\omega(N-1)/2}$  вынести за скобки, что дает

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega(N-1)/2} \left[ \sum_{n=0}^{(N-3)/2} h(n) \{e^{j\omega[(N-1)/2-n]} + e^{-j\omega[(N-1)/2-n]}\} + \right. \\ &\quad \left. + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (3.22)$$

или

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=0}^{(N-3)/2} 2h(n) \cos \left[ \omega \left( \frac{N-1}{2} - n \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Подставив  $m = (N-1)/2 - n$  получим

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= e^{-j\omega(N-1)/2} \left[ \sum_{m=0}^{(N-3)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos(\omega m) + \right. \\ &\quad \left. + h\left(\frac{N-1}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Окончательно при  $a(0) = h[(N-1)/2]$  и  $a(n) = 2h[(N-1)/2 - n]$ , где  $n = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ , выражение (3.24) принимает вид

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left[ \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n) \right], \quad (3.25)$$

что и дает искомую частотную характеристику. Таким образом, для фильтра вида 1

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n). \quad (3.26)$$

Фильтр вида 2. Симметричная импульсная характеристика, четное  $N$ . В этом случае  $H(e^{j\omega})$  принимает вид

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=0}^{N/2-1} 2h(n) \cos \left[ \omega \left( \frac{N}{2} - n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.27)$$

Подставляя в это выражение

$$b(n) = 2h\left(\frac{N}{2} - n\right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2},$$

получим

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.28)$$

Таким образом, для фильтра вида 2

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right]. \quad (3.29)$$

Необходимо отметить, что  $H^*(e^{j\omega}) = 0$  при  $\omega = \pi$  независимо от значений  $b(n)$  [или  $h(n)$ ]. Отсюда следует, что нельзя использовать фильтры этого вида для аппроксимации частотной характеристики, отличной от нуля при  $\omega = \pi$  (например, при проектировании фильтров верхних частот).

Фильтр вида 3. Антисимметричная импульсная характеристика, нечетное  $N$ .

В этом случае вывод формулы для  $H^*(e^{j\omega})$  почти такой же, как и для фильтров вида 1, за исключением того, что из-за антисимметрии  $\{h(n)\}$  сумма косинусов заменяется на сумму синусов, умноженную на  $j$ , т. е. вместо формулы (3.24) следует записать

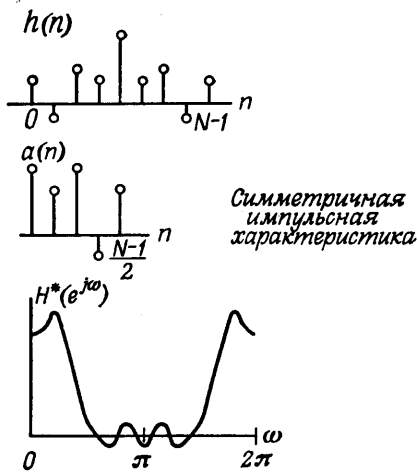
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{j\pi/2} \left[ \sum_{m=0}^{(N-3)/2} 2h\left(\frac{N-1}{2} - m\right) \cos(\omega m) \right], \quad (3.30)$$

где  $h[(N-1)/2] = 0$ , как было показано выше. Делая подстановку  $c(n) = 2h[(N-1)/2 - n]$  при  $n = 1, 2, \dots, (N-1)/2$ , получим

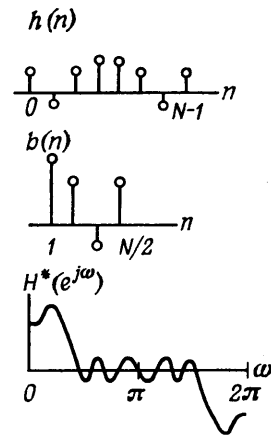
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{j\pi/2} \left[ \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(\omega n) \right]. \quad (3.31)$$

Таким образом, для фильтра вида 3

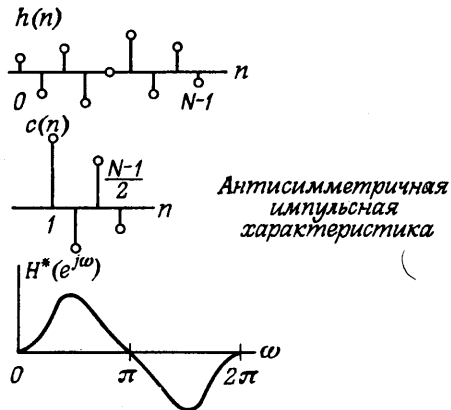
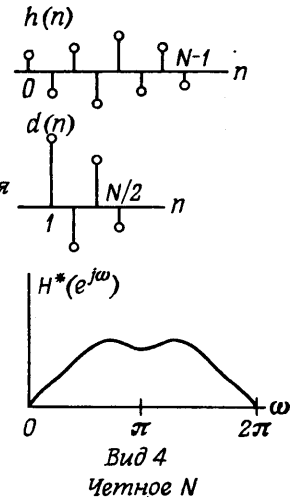
$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(\omega n). \quad (3.32)$$



Вид 1



Вид 2

Вид 3  
Нечетное N

Фиг. 3.4. Четыре вида фильтров с линейной фазовой характеристикой.

Видно, что  $H^*(e^{j\omega}) = 0$  на частотах  $\omega = 0$  и  $\omega = \pi$  независимо от значений  $c(n)$  [или значений  $h(n)$ , что то же самое]. Более того, множитель  $e^{j\pi/2} = j$  в формуле (3.31) показывает, что без учета множителя с линейным изменением фазы частотная характеристика является чисто мнимой функцией. Поэтому этот вид фильтров наиболее пригоден для проектирования преобразователей Гильберта и дифференциаторов.

**Фильтр вида 4. Антисимметричная импульсная характеристика, четное  $N$ .**

В этом случае есть аналогия с фильтрами вида 2. Заменяя сумму косинусов суммой синусов, умноженной на  $j$ , вместо (3.27) получим

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=0}^{(N/2)-1} 2h(n) \sin \left[ \omega \left( \frac{N}{2} - n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.33)$$

Подстановка в это выражение

$$d(n) = 2h \left( \frac{N}{2} - n \right), \quad n = 1, 2, \dots, \frac{N}{2},$$

дает

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left\{ \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right] \right\}. \quad (3.34)$$

Таким образом, для фильтра вида 4

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (3.35)$$

причем  $H^*(e^{j\omega}) = 0$  при  $\omega = 0$ . Следовательно, этот вид фильтров больше всего подходит для аппроксимации дифференциаторов и преобразователей Гильберта.

На фиг. 3.4 графически представлены все основные результаты, полученные в этом разделе, а именно типичные импульсные характеристики  $h(n)$ , соответствующие им сдвинутые последовательности [от  $a(n)$  до  $d(n)$  для каждого конкретного случая] и типичные частотные характеристики  $H^*(e^{j\omega})$  для каждого из четырех видов КИХ-фильтров с линейной фазой.

### 3.6. Расположение нулей КИХ-фильтров с линейной фазой

Расположение нулей КИХ-фильтров с линейной фазой сильно ограничено характером симметрии их импульсной характеристики. Координаты нулей таких фильтров легко найти, используя

z-преобразования импульсных характеристик, равные

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = h(0) + h(1) z^{-1} +$$

$$+ h(2) z^{-2} + \dots \pm h(2) z^{-(N-3)} \pm h(1) z^{-(N-2)} \pm h(0) z^{-(N-1)}, \quad (3.36)$$

где знаки + и - соответствуют симметричной и антисимметричной импульсным характеристикам. Перепишем выражение (3.36) в виде

$$H(z) = z^{-(N-1)/2} \{h(0) [z^{(N-1)/2} \pm z^{-(N-1)/2}] +$$

$$+ h(1) [z^{(N-3)/2} \pm z^{-(N-3)/2}] +$$

$$+ h(2) [z^{(N-5)/2} \pm z^{-(N-5)/2}] + \dots\}. \quad (3.37)$$

Заменяя здесь  $z$  на  $z^{-1}$ , получим

$$H(z^{-1}) = z^{(N-1)/2} \{h(0) [z^{-(N-1)/2} \pm z^{(N-1)/2}] +$$

$$+ h(1) [z^{-(N-3)/2} \pm z^{(N-3)/2}] +$$

$$+ h(2) [z^{-(N-5)/2} \pm z^{(N-5)/2}] + \dots\}. \quad (3.38)$$

Сопоставление формул (3.37) и (3.38) показывает, что

$$H(z^{-1}) = \pm z^{(N-1)} H(z). \quad (3.39)$$

Из соотношения (3.39) следует, что с точностью до задержки на  $(N-1)$  отсчетов и множителя  $(\pm 1)$   $H(z^{-1})$  и  $H(z)$  идентичны. Таким образом, нули  $H(z^{-1})$  идентичны нулям  $H(z)$ . Пусть  $H(z)$  имеет комплексный нуль в точке  $z_i = r_i e^{j\theta_i}$ , причем  $r_i \neq 1$ ,  $\theta_i \neq 0, \pi$ . Тогда, согласно (3.39), функция  $H(z)$  должна иметь также зеркально отраженный нуль в точке  $z_i^{-1} = (1/r_i) e^{-j\theta_i}$ . Поскольку импульсная характеристика фильтра действительная, каждый комплексный нуль  $H(z)$  образует с другим нулем комплексно сопряженную пару. Таким образом, если  $H(z)$  имеет комплексный нуль, не лежащий на единичной окружности ( $r_i \neq 1$ ) и на действительной оси ( $\theta_i \neq 0, \pi$ ), то  $H(z)$  содержит по крайней мере один базовый множитель вида

$$H_i(z) = (1 - z^{-1} r_i e^{j\theta_i}) (1 - z^{-1} r_i e^{-j\theta_i}) \times$$

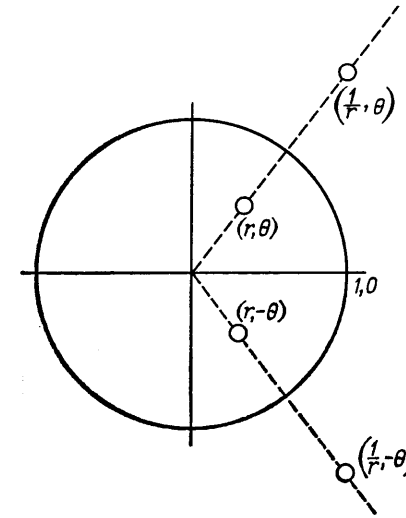
$$\times \left(1 - z^{-1} \frac{1}{r_i} e^{j\theta_i}\right) \left(1 - z^{-1} \frac{1}{r_i} e^{-j\theta_i}\right) \quad (3.40)$$

или

$$H_i(z) = 1 - 2 \left(\frac{r_i^2 + 1}{r_i}\right) \cos \theta_i z^{-1} + \left(r_i^2 + \frac{1}{r_i^2} + 4 \cos^2 \theta_i\right) z^{-2} -$$

$$- 2 \left(\frac{r_i^2 + 1}{r_i}\right) \cos \theta_i z^{-3} + z^{-4}. \quad (3.41)$$

Положение нулей такого базового блока показано на фиг. 3.5, а соответствующая ему импульсная характеристика — на фиг. 3.6.

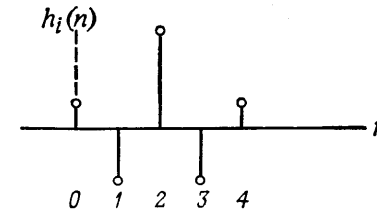


Фиг. 3.5. Положение нулей для фильтров с линейной фазовой характеристикой.

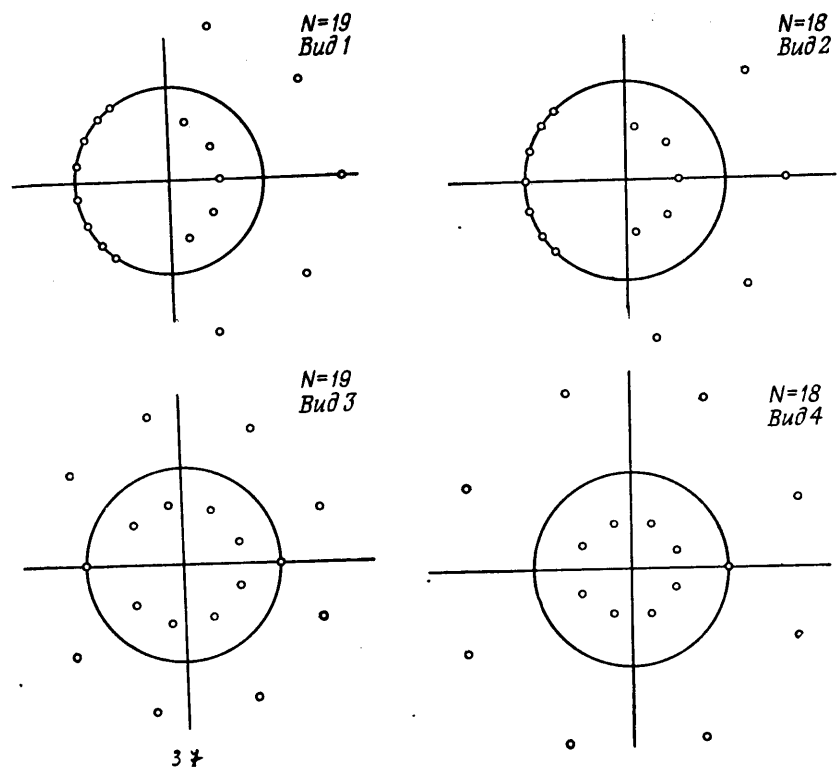
Выражение (3.41) было получено для случая  $r_i \neq 1$  и  $\theta_i \neq 0, \pi$ . При  $r_i = 1$  (но  $\theta_i \neq 0, \pi$ ) нуль находится на единичной окружности, а соответствующий ему комплексно сопряженный нуль является его зеркальным отображением. Таким образом, нули функции  $H(z)$ , лежащие на единичной окружности, являются одновременно нулями функции  $H(z^{-1})$  на той же окружности. Для таких нулей базовый множитель равен

$$H_i(z) = (1 - z^{-1} e^{j\theta_i}) (1 - z^{-1} e^{-j\theta_i}) = 1 - 2 \cos \theta_i z^{-1} + z^{-2}. \quad (3.42)$$

Если же  $r_i \neq 1$ , но  $\theta_i = 0$ , или  $\pi$ , нули становятся действительными. Они не образуют комплексно сопряженных пар,



Фиг. 3.6. Импульсная характеристика базового блока с нулями, изображенными на фиг. 3.5.



Фиг. 3.7. Положение нулей типичных фильтров с линейной фазовой характеристикой.

поэтому базовый множитель для этого случая будет равен

$$H_i(z) = (1 \pm r_i z^{-1}) \left(1 \pm \frac{1}{r_i} z^{-1}\right) = 1 \pm \left(r_i + \frac{1}{r_i}\right) z^{-1} + z^{-2}. \quad (3.43)$$

Здесь знак  $+$  соответствует  $\theta_i = \pi$ , а знак  $-$  соответствует  $\theta_i = 0$ .

Наконец, при  $r_i = 1$  и  $\theta_i = 0$  (или  $\pi$ ) нули будут находиться в точке  $z = +1$  или в точке  $z = -1$ . В этих случаях оба комплексно сопряженных нуля совпадают друг с другом и со своими зеркальными отображениями. Базовый множитель для этих случаев равен

$$H_i(z) = (1 \pm z^{-1}). \quad (3.44)$$

Множители вида (3.44) имеют важное значение, поскольку с их помощью описываются цепи с задержками на половину интервала

дискретизации. Следовательно, фильтр с четной длиной импульсной характеристики  $N$  должен иметь нечетное число множителей вида (3.44), тогда как фильтр с нечетным  $N$  — четное число таких множителей (либо ни одного).

На фиг. 3.7 иллюстрируется типичное расположение нулей КИХ-фильтров с линейной фазой для каждого из четырех видов фильтров, рассмотренных в разд. 3.5. Показанное расположение нулей соответствует выводам настоящего раздела.

### 3.7. Методы расчета КИХ-фильтров с линейными фазами

Хорошо известны три класса методов расчета КИХ-фильтров с линейной фазой: методы взвешивания с помощью окна, методы частотной выборки, а также методы расчета оптимальных (по Чебышеву) фильтров. Очень трудно рекомендовать какой-либо один из этих методов, поскольку в каждом конкретном случае выбор метода расчета определяется слишком большим числом факторов. Поэтому ниже будут рассмотрены преимущества и недостатки каждого из этих методов с тем, чтобы проектировщик сам смог решить, какой метод лучше всего использовать, чтобы удовлетворить заданным требованиям.

В гл. 12 и 13 читателю будет представлена возможность познакомиться с несколькими практическими примерами применения фильтров различных типов.

### 3.8. Первый метод расчета — метод взвешивания

Поскольку частотная характеристика любого цифрового фильтра  $H(e^{j\omega})$  является периодической функцией частоты, ее можно представить рядом Фурье:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}, \quad (3.45)$$

где

$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (3.46)$$

Видно, что коэффициенты Фурье  $h(n)$  совпадают с коэффициентами импульсной характеристики цифрового фильтра. Использование соотношения (3.45) для проектирования КИХ-фильтров связано с двумя трудностями. Во-первых, импульсная характеристика фильтра имеет бесконечную длину, поскольку суммирование в (3.45) производится в бесконечных пределах. Во-вторых,

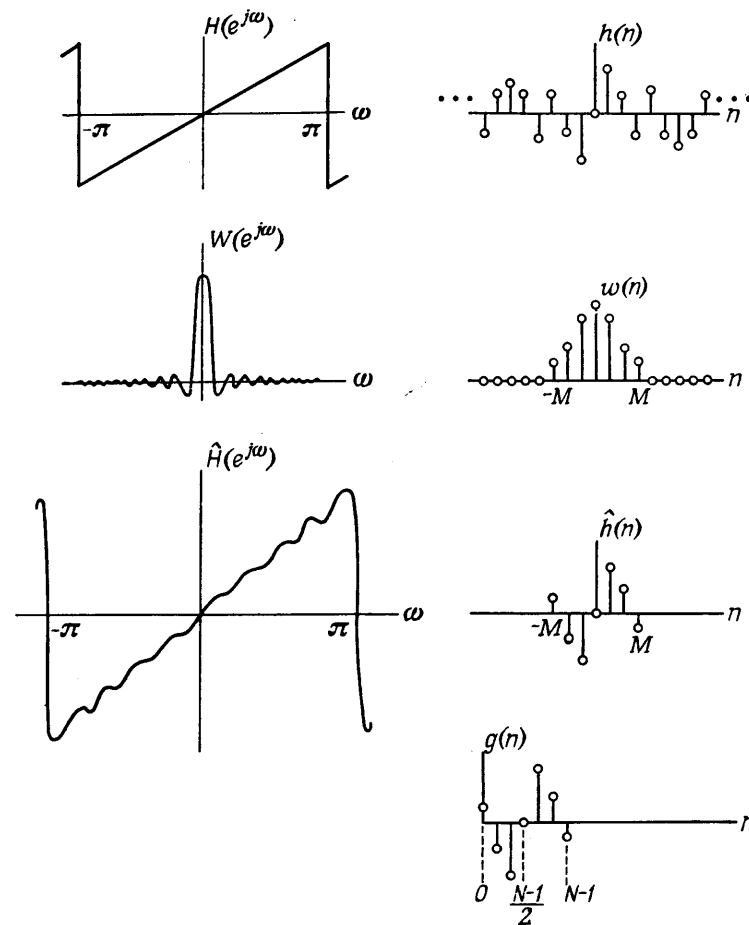


фильтр физически нереализуем, так как импульсная характеристика начинается в  $-\infty$ , т. е. никакая конечная задержка не делает фильтр физически реализуемым. Итак, фильтр, рассчитываемый на основе представления функции  $H(e^{j\omega})$  рядом Фурье, оказывается физически нереализуемым БИХ-фильтром.

Один из возможных методов получения КИХ-фильтра, аппроксимирующего заданную функцию  $H(e^{j\omega})$ , заключается в усечении бесконечного ряда Фурье (3.45) за  $n = \pm M$ . Однако простое усечение ряда приводит к хорошо известному явлению Гиббса, которое проявляется в виде выбросов и пульсаций определенного уровня до и после точки разрыва в аппроксимируемой частотной характеристике. Так, например, при аппроксимации стандартных фильтров типа идеального фильтра нижних частот или полосового фильтра максимальная амплитуда пульсаций частотной характеристики составляет около 9% и не уменьшается с увеличением длины импульсной характеристики, т. е. учет все большего числа членов ряда Фурье не приводит к уменьшению максимальной амплитуды пульсаций. Вместо этого по мере увеличения  $N$  уменьшается ширина выброса. Поскольку простое усечение ряда (3.45) не приводит к приемлемой аппроксимации идеального фильтра нижних частот (к чему необходимо стремиться), этот метод непригоден для проектирования КИХ-фильтров.

Лучшие результаты дает метод проектирования КИХ-фильтров, основанный на использовании весовой последовательности конечной длины  $w(n)$ , называемой окном, для модификации коэффициентов Фурье  $h(n)$  в формуле (3.45) с тем, чтобы управлять сходимостью ряда Фурье. Метод взвешивания иллюстрируется на фиг. 3.8. Сверху показаны заданная периодическая частотная характеристика  $H(e^{j\omega})$  и ее коэффициенты Фурье  $\{h(n)\}$ . Ниже изображена весовая последовательность конечной длины  $w(n)$  и ее преобразование Фурье  $W(e^{j\omega})$ . Для большинства приемлемых окон функция  $W(e^{j\omega})$  имеет главный лепесток, содержащий почти всю энергию окна, и боковые лепестки, которые обычно быстро затухают. Чтобы получить КИХ-аппроксимацию функции  $H(e^{j\omega})$ , формируется последовательность  $\hat{h}(n) = h(n) \cdot w(n)$ , в точности равная нулю за пределами интервала  $-M \leq n \leq M$ . Третья пара графиков на фиг. 3.8 представляет последовательность  $\hat{h}(n)$  и ее преобразование Фурье  $\hat{H}(e^{j\omega})$ , равное, очевидно, круговой свертке функций  $H(e^{j\omega})$  и  $W(e^{j\omega})$ , поскольку  $\hat{h}(n)$  является произведением  $h(n)$  и  $w(n)$ . Наконец, внизу на фиг. 3.8 приведена физически реализуемая последовательность  $g(n)$ , которая равна задержанной последовательности  $\hat{h}(n)$  и может быть использована в качестве искомой импульсной характеристики фильтра.

На простом примере, иллюстрируемом на фиг. 3.8, можно проследить влияние операции взвешивания коэффициентов Фурье



Фиг. 3.8. Иллюстрация метода взвешивания.

фильтра на его частотную характеристику. Прежде всего по обе стороны от точек разрыва заданной функции  $H(e^{j\omega})$  появляются переходные полосы. Ясно, что поскольку результирующая частотная характеристика фильтра равна круговой свертке идеальной частотной характеристики и частотной характеристики окна, то ширина переходных полос зависит от ширины главного лепестка функции  $W(e^{j\omega})$ . Кроме того, на всех частотах  $\omega$  возникают ошибки аппроксимации, имеющие вид пульсаций частотной характеристики, которые обусловлены боковыми лепестками функции  $W(e^{j\omega})$ . Ясно, наконец, и то, что получаемые фильтры ни

в каком смысле не являются оптимальными (даже если окна и удовлетворяют тому или иному критерию оптимальности), поскольку их частотные характеристики рассчитываются через свертку.

После общего рассмотрения метода взвешивания возникают два вопроса: какими свойствами должны обладать окна и насколько точно они могут быть реализованы на практике? Ответ на первый вопрос относительно прост. Желательно, чтобы окно обладало следующими свойствами:

1. Ширина главного лепестка частотной характеристики окна, содержащего по возможности большую часть общей энергии, должна быть малой.

2. Энергия в боковых лепестках частотной характеристики окна должна быстро уменьшаться при приближении  $\omega$  к  $\pi$ .

Было предложено много окон, аппроксимирующих заданные характеристики. В последующих разделах будут рассмотрены три окна, а именно прямоугольное окно, «обобщенное» окно Хэмминга и окно Кайзера. Эти окна обладают свойствами всех возможных видов окон и позволяют достаточно хорошо понять преимущества и недостатки метода взвешивания.

### 3.9. Прямоугольное окно

$N$ -точечное прямоугольное окно, соответствующее простому усечению (без модификации) ряда Фурье, описывается весовой функцией

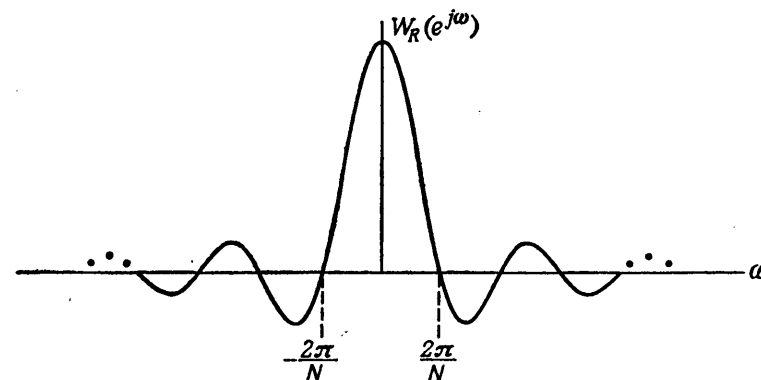
$$w_R(n) = \begin{cases} 1, 0, & -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0 & \text{при других } n. \end{cases} \quad (3.47)$$

(Здесь и в следующих разделах, посвященных окнам, предполагается, что  $N$  — нечетное. С помощью простой модификации аналогичные результаты могут быть получены и для четного  $N$ . Предполагается также, что последовательность окна имеет нулевую задержку.) Частотная характеристика прямоугольного окна описывается соотношением

$$W_R(e^{j\omega}) = \sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} e^{-j\omega n} = \frac{e^{j\omega[(N-1)/2]}(1-e^{-j\omega N})}{(1-e^{j\omega})} = \frac{e^{j\omega(N/2)} - e^{-j\omega(N/2)}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}}, \quad (3.48)$$

$$W_R(e^{j\omega}) = \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)}. \quad (3.49)$$

График частотной характеристики (3.49) представлен на фиг. 3.9 для случая  $N = 25$ .



Фиг. 3.9. Частотная характеристика прямоугольного окна.

### 3.10. «Обобщенное» окно Хэмминга

Второе из рассматриваемых окон, называемое обобщенным окном Хэмминга, имеет вид

$$w_H(n) = \begin{cases} \alpha + (1-\alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right), & -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \\ 0 & \text{при других } n, \end{cases} \quad (3.50)$$

причем  $\alpha$  лежит в пределах  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Случай  $\alpha = 0,54$  соответствует окну Ханна<sup>1)</sup>, случай  $\alpha = 0,54$  — окну Хэмминга<sup>2)</sup>.

Частотную характеристику рассматриваемого окна легко получить, если учесть, что оно может быть представлено в виде произведения прямоугольного окна и окна, определяемого формулой (3.50), но для всех  $n$ , т. е.

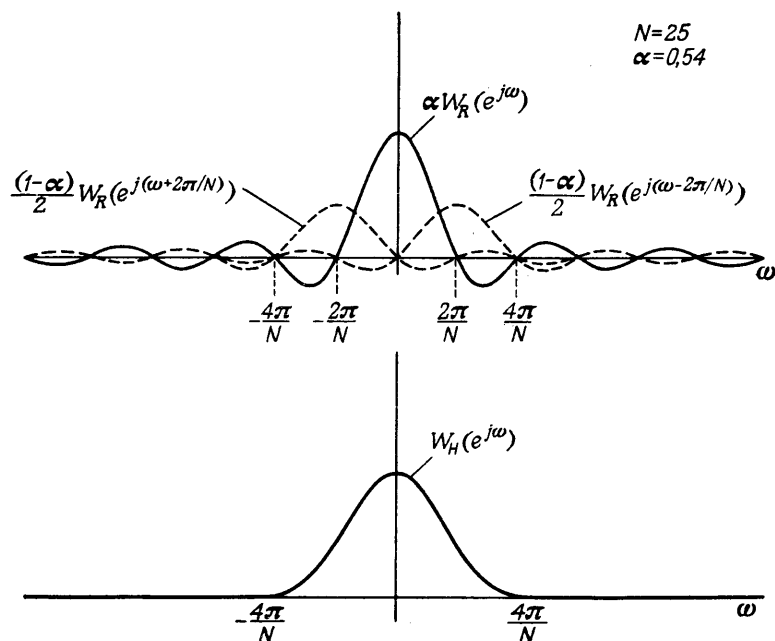
$$w_H(n) = w_R(n) \left[ \alpha + (1-\alpha) \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \right], \quad (3.51)$$

где  $w_R(n)$  — прямоугольное окно, определяемое формулой (3.47). Следовательно, частотная характеристика обобщенного окна Хэмминга равна круговой свертке частотной характеристики прямоугольного окна  $W_R(e^{j\omega})$  с последовательностью импульсов и может быть записана в виде

$$W_H(e^{j\omega}) = W_R(e^{j\omega}) * \left[ \alpha u_0(\omega) + \frac{1-\alpha}{2} u_0\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right) + \frac{1-\alpha}{2} u_0\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right) \right], \quad (3.52)$$

<sup>1)</sup> Часто это окно называют хэннингом (hanning). — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Заметим, что в литературе по цифровой обработке сигналов часто путают окна Хэмминга и хэннинг.



Фиг. 3.10. Частотная характеристика окна Хэмминга при  $\alpha = 0,54$ .

откуда

$$W_H(e^{j\omega}) = \alpha W_R(e^{j\omega}) + \frac{1-\alpha}{2} W_R \left[ e^{j\left(\omega - \frac{2\pi}{N}\right)} \right] + \frac{1-\alpha}{2} W_R \left[ e^{j\left(\omega + \frac{2\pi}{N}\right)} \right]. \quad (3.53)$$

На фиг. 3.10 наверху изображены графики трех компонент характеристики  $W_H(e^{j\omega})$ , а внизу — результирующая частотная характеристика (здесь принято  $\alpha = 0,54$  и  $N = 25$ ). Создается впечатление, что частотная характеристика окна Хэмминга не имеет пульсаций на частотах выше  $\omega = 4\pi/N$ , однако на самом деле это не так. Пульсации настолько малы, что при линейной шкале на фиг. 3.10 они не видны. Из сравнения фиг. 3.9 и 3.10 видно, что ширина главного лепестка частотной характеристики окна Хэмминга в два раза больше, чем для прямоугольного окна. Однако уровень боковых лепестков в случае окна Хэмминга значительно ниже, чем у характеристики прямоугольного окна. При  $\alpha = 0,54$ , т. е. для обычного окна Хэмминга, 99,96% общей энергии спектра содержится в главном лепестке, а максимумы боковых лепестков на 40 дБ ниже главного максимума. В отличие от

окна Хэмминга максимум боковых лепестков в спектре прямоугольного окна ниже главного максимума всего на 14 дБ.

Из фиг. 3.10 хорошо видно, каким образом при использовании окна Хэмминга достигается подавление боковых лепестков при одновременном расширении главного лепестка: боковые лепестки функций  $W_R[e^{j(\omega \pm 2\pi/N)}]$  находятся в противофазе с боковыми лепестками  $W_R(e^{j\omega})$ , поэтому общий уровень боковых лепестков значительно уменьшается. В то же время пропорционально увеличивается ширина главного лепестка частотной характеристики. Ниже будет показано, что при расчете фильтра нижних частот расширение главного лепестка соответствует расширению переходной полосы между полосами пропускания и непропускания, тогда как уменьшение уровня боковых лепестков соответствует меньшим пульсациям в полосе пропускания и лучшему подавлению в полосе непропускания фильтра.

### 3.11. Окно Кайзера

Задача расчета хороших окон фактически сводится к математической задаче отыскания ограниченных во времени функций, преобразования Фурье которых наилучшим образом аппроксимируют функции, ограниченные по частоте, т. е. имеют минимальную энергию за пределами заданного интервала частот. При решении этой задачи в замкнутой форме для непрерывных функций времени был введен класс так называемых *вытянутых сфероидальных волновых функций*. Эти функции имеют достаточно сложный вид. Поэтому Кайзер в качестве наилучшего окна предложил относительно простую аппроксимацию этих функций. Эта аппроксимация, названная окном Кайзера, записывается в виде

$$w_K(n) = \frac{I_0(\beta \sqrt{1 - [2n/(N-1)]^2})}{I_0(\beta)}, \quad -\left(\frac{N-1}{2}\right) \leq n \leq \frac{N-1}{2}, \quad (3.54)$$

где  $\beta$  — константа, определяющая компромисс между максимальным уровнем боковых лепестков и шириной главного лепестка (или долей общей энергии в главном лепестке) частотной характеристики окна, а  $I_0(x)$  — функция Бесселя нулевого порядка. Как именно величина  $\beta$  оказывает влияние на этот компромисс, будет проиллюстрировано ниже с помощью табл. 3.1.

Частотная характеристика дискретного окна Кайзера в замкнутой форме не получена, но Кайзер показал, что для непрерывной функции окна частотная характеристика пропорциональна

$$\frac{\sin[\beta \sqrt{(\omega/\omega_\beta)^2 - 1}]}{\sqrt{(\omega/\omega_\beta)^2 - 1}},$$

Таблица 3.1

$\beta$	$D$	Пульсации в полосе пропускания, дБ	Пульсации в полосе непропускания, дБ
2,120	1,50	$\pm 0,27$	-30
3,384	2,23	$\pm 0,0864$	-40
4,538	2,93	$\pm 0,0274$	-50
5,658	3,62	$\pm 0,00868$	-60
6,764	4,32	$\pm 0,00275$	-70
7,865	5,0	$\pm 0,000868$	-80
8,960	5,7	$\pm 0,000275$	-90
10,056	6,4	$\pm 0,000087$	-100

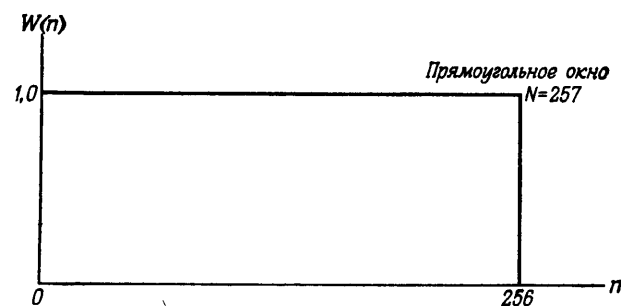
(Предоставлено Кайзером, Лаборатория фирмы Bell.)

где величина  $\omega_\beta$  приблизительно равна ширине главного лепестка частотной характеристики. Поскольку нельзя найти аналитического выражения для частотной характеристики окна Кайзера, для иллюстрации его свойств будут использованы графики частотной характеристики.

Окно Кайзера является по существу оптимальным окном в том смысле, что оно представляет последовательность конечной длины, которая имеет минимум энергии спектра за пределами некоторой заданной частоты. Еще одним оптимальным окном является окно Дольфа—Чебышева, обеспечивающее минимальную ширину главного лепестка частотной характеристики при фиксированном уровне боковых лепестков. Все боковые лепестки в спектре этого окна имеют одинаковый уровень. Однако, как уже говорилось, ни одно из этих окон не позволяет получить оптимальную в минимаксном смысле аппроксимацию произвольной идеальной частотной характеристики, поскольку в действительности характеристика фильтра является результатом свертки частотных характеристик окна и идеального фильтра. Таким образом, несмотря на наличие оптимальных окон, оптимальных фильтров, которые рассчитывались бы с их помощью, не существует.

### 3.12. Примеры фильтров нижних частот с различными окнами

В данном разделе приводится практический пример использования окон для расчета идеального фильтра нижних частот. Будут рассмотрены три окна: прямоугольное, Хэмминга и Кайзера. На фиг. 3.11—3.16 изображены графики этих трех окон и их частотные характеристики для случая  $N = 257$  (параметр  $\beta$  для

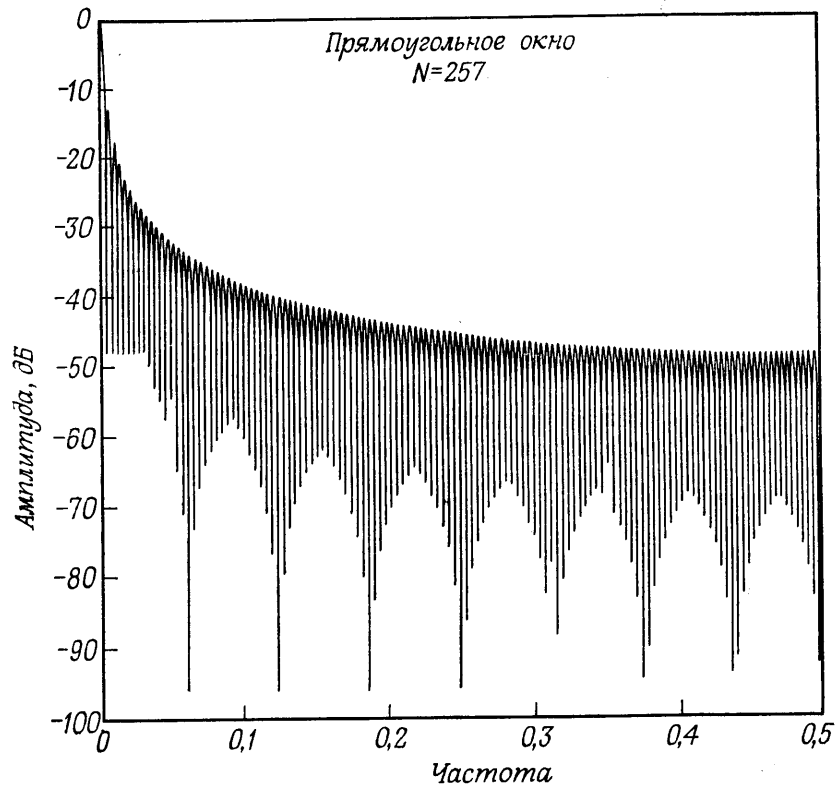


Фиг. 3.11. 257-точечное прямоугольное окно.

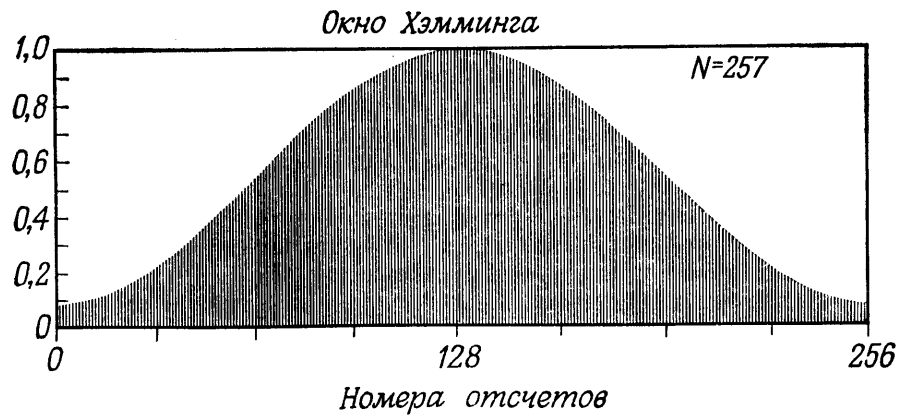
окна Кайзера равен 5,658). На фиг. 3.11, 3.13 и 3.15 представлены импульсные характеристики, а на фиг. 3.12, 3.14 и 3.16 — частотные характеристики<sup>1)</sup>. На фиг. 3.12 видно, что в соответствии с изложенным выше максимальный уровень боковых лепестков частотной характеристики равен для прямоугольного окна 0,217 (или -13,27 дБ в логарифмическом масштабе), а максимумы боковых лепестков медленно понижаются до уровня 0,004 (или до -48 дБ) на частоте, равной половине частоты дискретизации. Для сравнения, как видно из фиг. 3.14, максимальный уровень боковых лепестков частотной характеристики окна Хэмминга равен 0,0074 (или -42,7 дБ), а огибающая максимумов боковых лепестков падает до уровня около 0,000059 (или -65 дБ) на частоте, равной половине частоты дискретизации. Однако ширина главного лепестка частотной характеристики окна Хэмминга вдвое больше ширины главного лепестка частотной характеристики прямоугольного окна. Таким образом, при аппроксимации разрывов частотной характеристики идеального фильтра (как показано ниже на примере фильтра нижних частот) с использованием окна Хэмминга ширина переходной полосы у точки разрыва будет вдвое больше, чем для прямоугольного окна. Для окна Кайзера (фиг. 3.16) уровень наибольшего бокового лепестка составляет 0,00133 (или -57 дБ), а огибающая максимумов боковых лепестков падает до уровня около 0,00002 (или до -94 дБ) на частоте, вдвое меньшей частоты дискретизации. Однако такой низкий уровень боковых лепестков достигается за счет расширения главного лепестка частотной характеристики этого окна почти в три раза по сравнению со случаем прямоугольного окна.

На последующих нескольких рисунках изображены характеристики фильтров нижних частот, рассчитанных с использованием

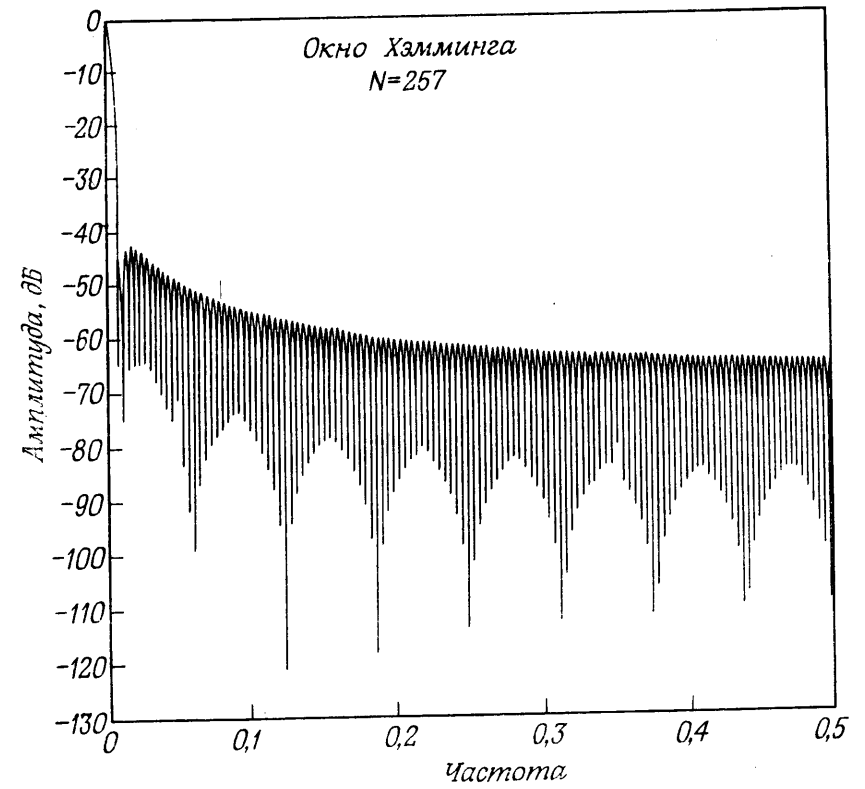
<sup>1)</sup> Имеющая место модуляция минимумов (см., например, фиг. 3.12) связана с небольшими погрешностями расчета нулей функции, и ее можно не учитывать.



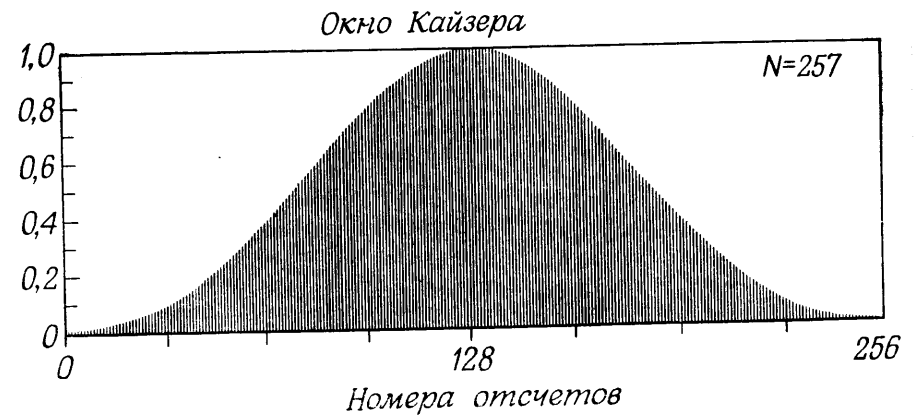
Фиг. 3.12. Частотная характеристика 257-точечного прямоугольного окна.



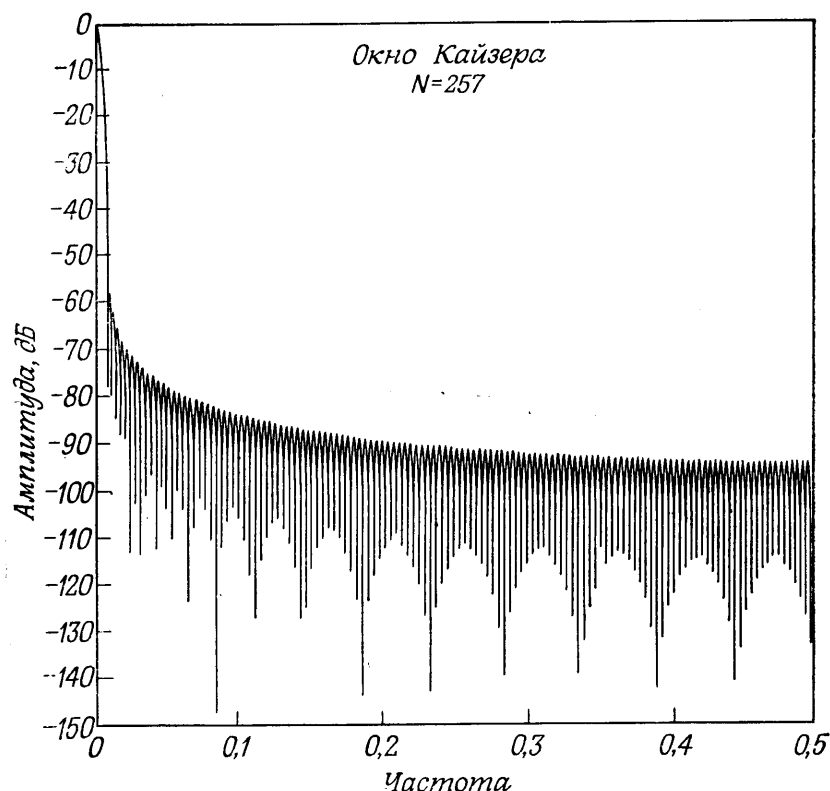
Фиг. 3.13. 257-точечное окно Хэмминга.



Фиг. 3.14. Частотная характеристика 257-точечного окна Хэмминга.



Фиг. 3.15. 257-точечное окно Кайзера.

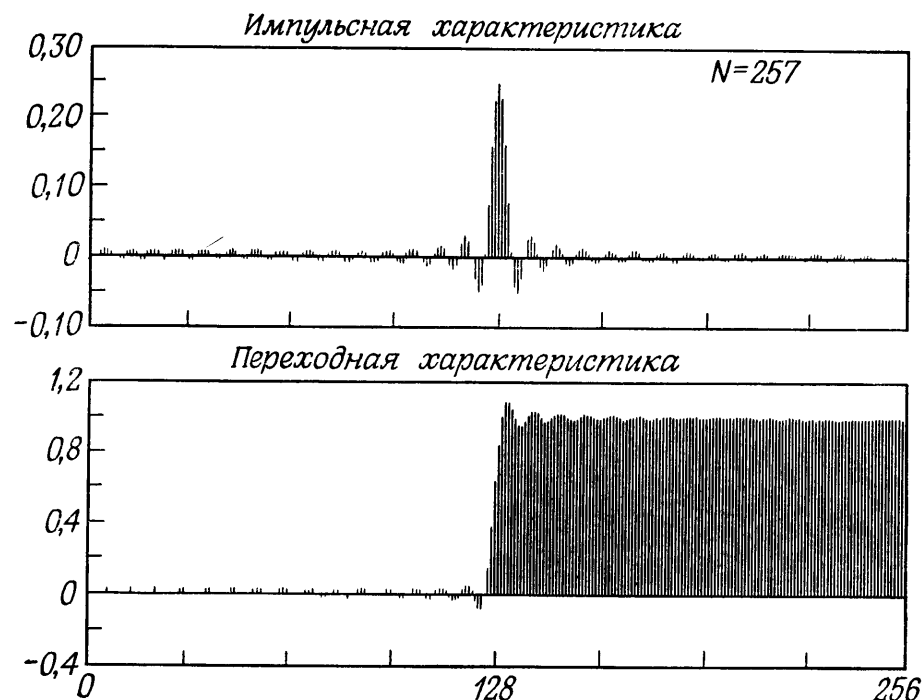


Фиг. 3.16. Частотная характеристика окна Кайзера.

каждого из трех описанных окон. На фиг. 3.17, 3.19 и 3.21 показаны результирующие импульсные и переходные характеристики, а на фиг. 3.18, 3.20 и 3.22 — полученные частотные характеристики фильтра. Проектируемый идеальный фильтр нижних частот имеет коэффициенты ряда Фурье (т. е. отсчеты импульсной характеристики) вида

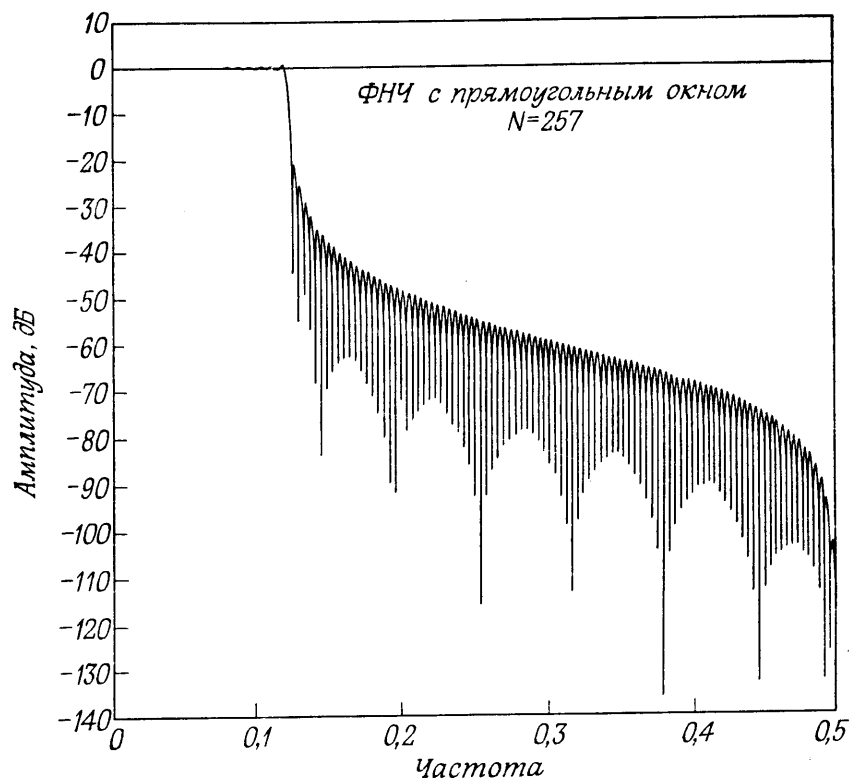
$$h(n) = \frac{\sin(2\pi F_c n)}{\pi n}, \quad -\infty < n < \infty \quad (3.55)$$

(во всех трех примерах  $F_c = 0,1245$ ). На фиг. 3.17 представлен результат умножения  $h(n)$  на прямоугольное окно. Видно, что характерный вид импульсной характеристики фильтра (3.55) сохранился. Использование окон Хэмминга и Кайзера (фиг. 3.19 и 3.21) приводит к ослаблению далеко отстоящих членов  $h(n)$ . На фиг. 3.18 показана частотная характеристика фильтра нижних



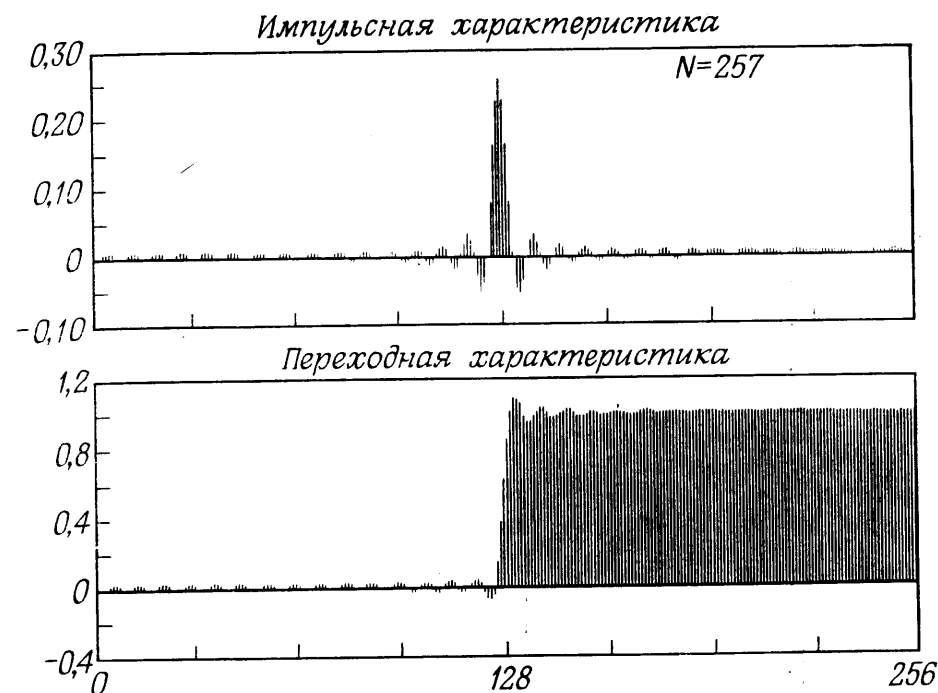
Фиг. 3.17. Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот с прямоугольным окном.

частот для случая прямоугольного окна. Отчетливо наблюдается эффект Гиббса, причем максимум первого бокового лепестка равен 0,09 (или  $-21$  дБ). Переходная полоса имеет ширину  $0,9375/N$  ( $N = 257$ ) и является в данном случае очень узкой. Однако из-за больших пульсаций, связанных с явлением Гиббса, для многих приложений этот фильтр непригоден. На фиг. 3.20 показана частотная характеристика фильтра нижних частот с окном Хэмминга. Для этого фильтра максимум амплитуды пульсаций в полосе пропускания составляет около 0,0018, а в полосе непропускания — 0,002 (или  $-53,6$  дБ). Ширина переходной полосы равна  $3,3125/N$ , т. е. она более чем в три раза больше ширины переходной полосы для прямоугольного окна. Наконец, для фильтра нижних частот с окном Кайзера (фиг. 3.22) максимум амплитуды пульсаций в полосах пропускания и непропускания составляет 0,0001, или  $-80$  дБ (для обеих полос), а ширина переходной полосы равна  $5,06/N$ .



Фиг. 3.18. Частотная характеристика фильтра нижних частот с прямоугольным окном.

Приведенные примеры показывают, что для улучшения аппроксимации идеального фильтра нижних частот приходится увеличивать ширину переходной полосы с тем, чтобы уменьшить максимальное значение ошибки аппроксимации (пульсаций). Для окна Кайзера, как уже было сказано выше, параметр  $\beta$  позволяет разработчику находить компромиссное решение для ширины переходной полосы  $\Delta F$  и максимального уровня пульсаций. В табл. 3.1 для нескольких  $\beta$  даны результирующие значения  $D = \Delta FN$  и пульсаций в полосах пропускания и непропускания (в дБ). Данные получены путем идеального интегрирования непрерывного окна Кайзера и при больших  $N$  являются достаточно хорошим приближением к дискретному случаю.



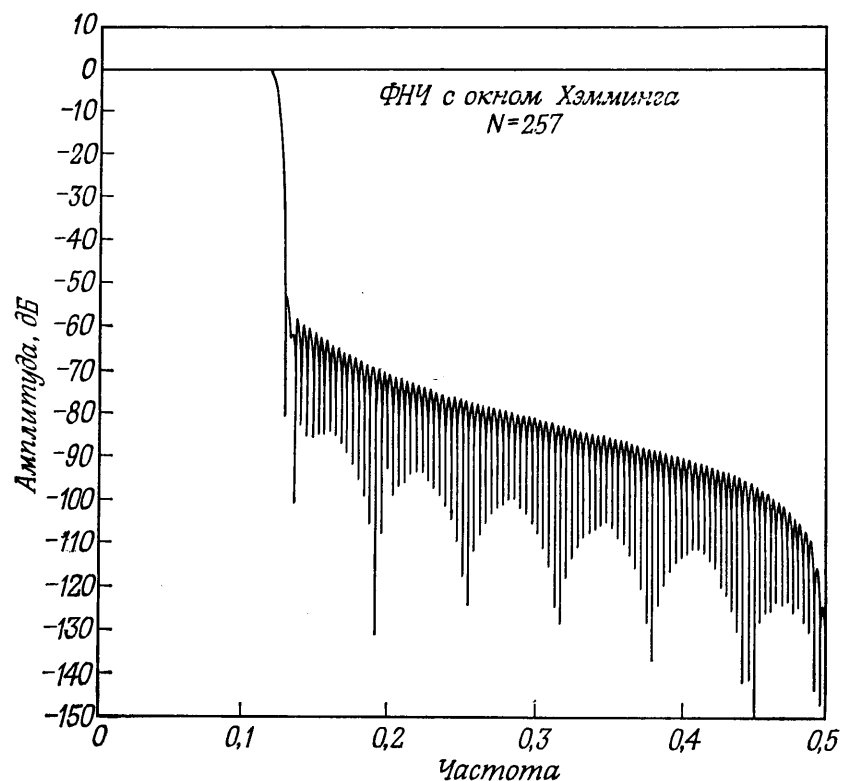
Фиг. 3.19. Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот с окном Хэмминга.

### 3.13. Особенности использования метода взвешивания

Метод взвешивания представляется весьма удобным для проектирования КИХ-фильтров, однако он обладает некоторыми особенностями, которые во многих случаях препятствуют применению окон. Прежде всего необходимо иметь выражения для коэффициентов ряда Фурье:

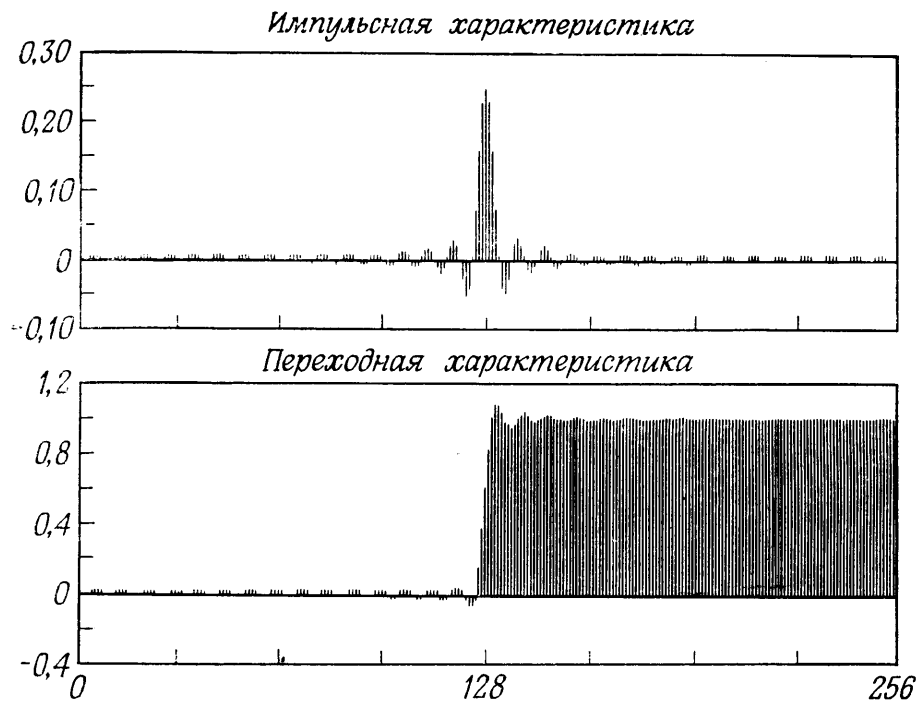
$$h(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega. \quad (3.56)$$

Когда характеристика  $H(e^{j\omega})$  имеет сложный вид или не может быть просто преобразована в замкнутое математическое выражение (а иногда и в случае, когда это возможно), формула (3.56) зачастую оказывается громоздкой или неудобной для интегрирования. Не имея явного выражения для вычисления невзвешенных коэффициентов, вообще трудно говорить об использовании окон.



Фиг. 3.20. Частотная характеристика фильтра нижних частот с окном Хэмминга.

Еще одна особенность метода взвешивания заключается в отсутствии достаточной гибкости при выполнении проектирования. Например, при расчете фильтра нижних частот трудно, как правило, точно определить граничную частоту полосы пропускания, поскольку окно «размывает» разрыв идеальной характеристики. На фиг. 3.23 показано, каким образом окно размывает частотную характеристику идеального фильтра нижних частот  $\hat{H}(e^{j\omega})$  с частотой среза  $F_c$ . Видно, что результирующая характеристика имеет две граничные частоты  $F_1$  и  $F_2$  для полос пропускания и непропускания соответственно. И хотя при разработке фильтров типа идеального фильтра нижних частот эффекты размытия удастся скомпенсировать, для фильтров с более сложными характеристиками этого достичь весьма непросто.



Фиг. 3.21. Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот с окном Кайзера.

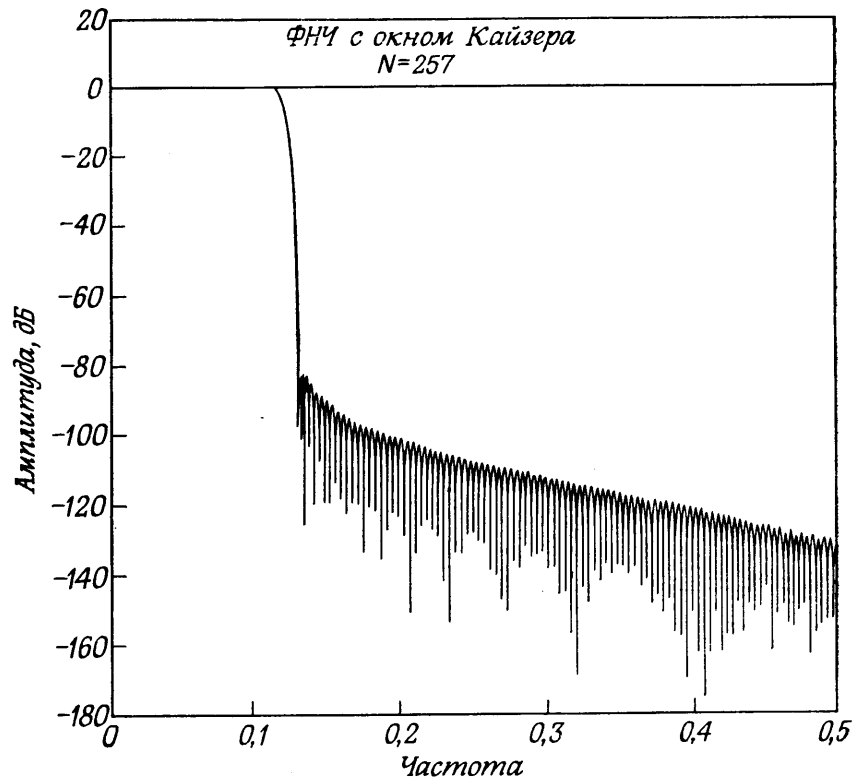
### 3.14. Несколько практических приемов использования окон

Ограничения метода взвешивания, рассмотренные в разд. 3.13, не препятствуют его широкому практическому применению. Обычно в каждом конкретном случае удается получить частное решение, однако всегда необходимо иметь в виду, что ограничения существуют, и понимать характер тех приближений, которые приходится делать, чтобы их преодолеть.

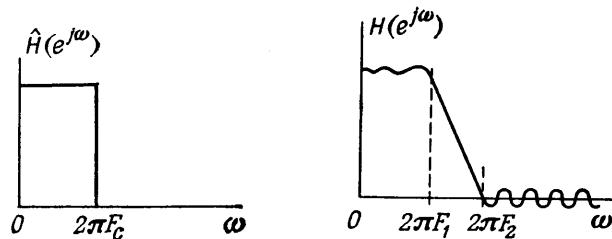
Чтобы определить невзвешенные коэффициенты Фурье в том случае, когда аналитическое выражение для  $h(n)$  громоздко или неудобно для интегрирования, интеграл можно аппроксимировать суммой. Вместо вычисления  $h(n)$  путем интегрирования на одном периоде функции  $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$  найдем приближенную последовательность  $\tilde{h}(n)$  по формуле

$$\tilde{h}(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H[e^{j(2\pi/M)k}] e^{j(2\pi/M)kn}. \quad (3.57)$$





Фиг. 3.22. Частотная характеристика фильтра нижних частот с окном Кайзера.



Фиг. 3.23. Эффект размытия частотной характеристики за счет окна.

Здесь значения  $H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$  рассчитываются в  $M$  точках  $\omega_k = 2\pi k/M$ . Ясно, что значения (3.57) можно эффективно вычислять с помощью  $M$ -точечного обратного ДПФ последовательности  $\tilde{H}(k) = H[e^{j(2\pi/M)k}]$ . Поскольку формула (3.57) является дискретизованным аналогом формулы (3.56), легко показать, что значения  $\tilde{h}(n)$  связаны со значениями  $h(n)$  формулой наложения

$$\tilde{h}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(n - kM). \quad (3.58)$$

Отсюда следует, что с ростом  $M$  различие между  $\tilde{h}(n)$  и  $h(n)$  уменьшается, особенно вблизи  $n = 0$ . Поскольку окно выделяет только  $N$  точек последовательности  $\tilde{h}(n)$ , должно выполняться условие  $M \gg N$ .

Целесообразно остановиться на простом, но эффективном алгоритме для вычисления функции  $I_0(x)$ . Эту функцию можно разложить в степенной ряд

$$I_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(x/2)^k}{k!} \right]^2$$

и вычислять (с заданной точностью) по следующей подпрограмме на ФОРТРАНе (представленной Кайзером):

```

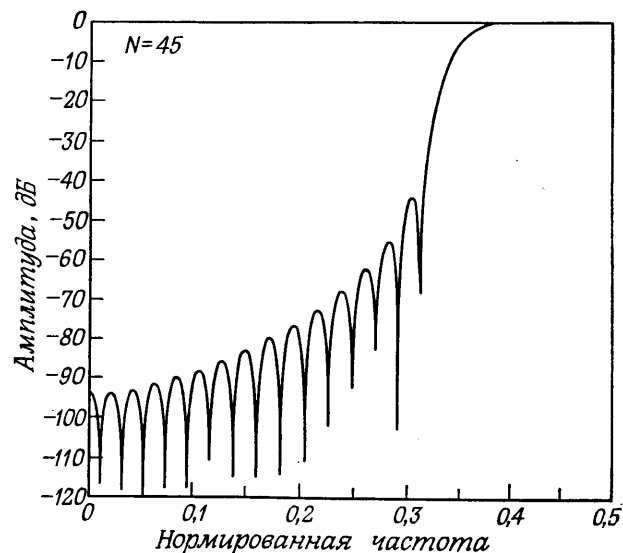
SUBROUTINE INO (X, N)
C   X BETWEEN 0. AND 20.
Y = X/2.
T = 1. E-08
E = 1.
DE = 1.
DO 1 I = 1, 25
DE = DE*Y/FLOAT (I)
SDE = DE**2
E = E + SDE
IF (E*T-SDE) 1,1,2
1 CONTINUE
2 X = E
N = I
RETURN
END

```

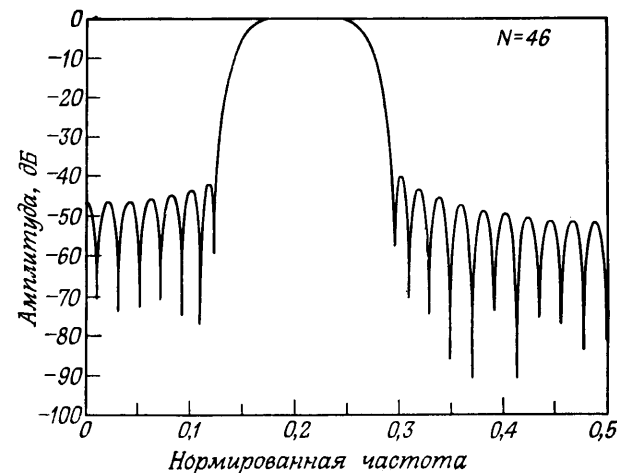
В этой подпрограмме используются пять членов разложения при  $x = 0,5$  и 25 членов при  $x \geq 19,0$  [ $N$  в операторе обращения к подпрограмме указывает на число членов, необходимое для вычисления  $I_0(x)$  с заданной точностью].

### 3.15. Дополнительные примеры фильтров, рассчитанных методом взвешивания

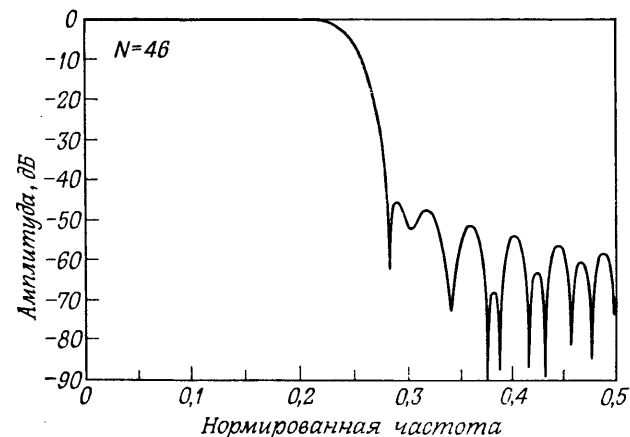
В этом разделе приведены примеры, иллюстрирующие несколько типичных КИХ-фильтров, рассчитанных методом взвешивания. На фиг. 3.24—3.26 представлены амплитудные характеристики (в логарифмическом масштабе) фильтра верхних частот, полосового фильтра и еще одного фильтра нижних частот. Фильтр верхних частот (фиг. 3.24) был рассчитан с использованием окна Ханна [ $\alpha = 0,5$  в формуле (3.50)] при длине импульсной характеристики в 45 отсчетов и частоте среза идеальной характеристики, равной 0,35. Максимум пульсаций в полосе пропускания составляет 0,00635, а в полосе непропускания также 0,00635 (или  $-43,94$  дБ). Переходная полоса равна 0,07233 (или  $3,25/N$ ). Полосовой фильтр (фиг. 3.25) был спроектирован с использованием окна Кайзера с  $\beta = 3,38$  при длине импульсной характеристики  $N = 46$  и идеальных верхней и нижней частотах среза, равных 0,27 и 0,15. Максимум пульсаций в полосе пропускания составляет 0,0078, в нижней полосе непропускания он равен 0,00792 (или  $-42$  дБ), а в верхней полосе непропускания составляет 0,00909 (или  $-40,8$  дБ). В последнем примере (фиг. 3.26) рассмотрен фильтр нижних частот, рассчитанный с использованием окна Дольфа—Чебышева. Длина импульсной характеристики этого фильтра



Фиг. 3.24. Частотная характеристика фильтра верхних частот с окном Ханна.



Фиг. 3.25. Частотная характеристика полосового фильтра с окном Кайзера.



Фиг. 3.26. Частотная характеристика фильтра нижних частот с окном Дольфа—Чебышева.

$N$  равна 46 отсчетам, а идеальная частота среза равна 0,25. Максимум пульсаций в полосе пропускания составляет 0,00688, а в полосе непропускания он равен 0,0054 (или  $-45,3$  дБ). Переходная полоса фильтра равна 0,065 (или  $2,97/N$ ).

Приведенные примеры являются результатом аналитического вычисления бесконечных импульсных характеристик идеальных фильтров и последующей весовой обработки с применением соответствующих окон. Одним из главных преимуществ метода взве-

шивания является относительная простота расчета импульсных характеристик с минимальным числом вычислительных операций. Основной недостаток метода состоит в том, что получаемые КИХ-фильтры не удовлетворяют всем известным критериям оптимальности и, следовательно, в большинстве случаев они могут быть существенно улучшены.

### 3.16. Общая характеристика окон

Общий подход к проектированию КИХ-фильтров с применением окон оказался вполне приемлемым. Ему свойственны определенные достоинства и недостатки. Выше были рассмотрены прямоугольное окно, окно Хэмминга и окно Кайзера. Существуют и другие, хорошо известные и широко используемые окна, такие, как окно Дольфа—Чебышева, треугольное окно и окно Блэкмана. Последнее представляет собой обобщенное окно Хэмминга, но с пятью членами вместо трех. Мы особенно не пытались составить каталог всех этих окон, поскольку методы, обсуждаемые ниже, в большинстве приложений оказываются предпочтительнее метода взвешивания. Главная причина относительно успешного применения метода взвешивания заключается в его простоте и легкости использования, а также в том, что почти всегда можно найти замкнутые выражения для вычисления коэффициентов окна.

### 3.17. Второй метод проектирования — метод частотной выборки

КИХ-фильтр может быть однозначно задан как коэффициентами импульсной характеристики  $\{h(n)\}$ , так и коэффициентами ДПФ импульсной характеристики  $\{H(k)\}$ . Напомним, что обе эти последовательности связаны соотношениями

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(2\pi/N)nh}, \text{ ДПФ,} \quad (3.59)$$

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)nh}, \text{ ОДПФ.} \quad (3.60)$$

Кроме того, известно, что коэффициенты ДПФ КИХ-последовательности, равные  $H(k)$ , можно рассматривать как значения  $z$ -преобразования импульсной характеристики фильтра, найденные в  $N$  равноотстоящих точках на единичной окружности, т. е.

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi/N)k}} \quad (3.61)$$

Таким образом,  $z$ -преобразование импульсной характеристики КИХ-фильтра можно легко выразить через коэффициенты ДПФ его импульсной характеристики, если подставить (3.60) в выражение для  $z$ -преобразования:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)nh} \right] z^{-n}. \quad (3.62)$$

Меняя порядок суммирования и суммируя по  $n$ , получим

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \sum_{n=0}^{N-1} [e^{j(2\pi/N)kh} z^{-1}]^n = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{N} \frac{1 - e^{j2\pi kh} z^{-N}}{1 - e^{j(2\pi/N)kh} z^{-1}}. \quad (3.63)$$

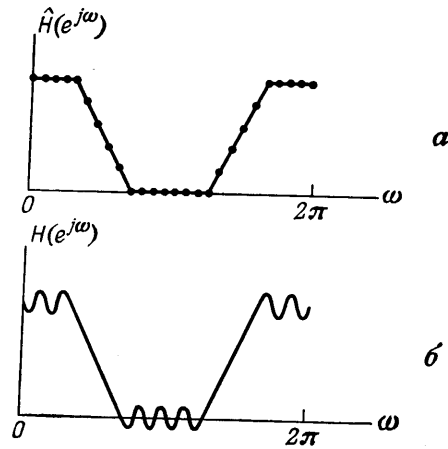
Поскольку  $e^{j2\pi kh} = 1$ , то соотношение (3.63) принимает вид

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1 - z^{-1} e^{j(2\pi/N)kh}}, \quad (3.64)$$

что и является искомым результатом.

Из соотношения (3.64) следует, что для аппроксимации произвольной непрерывной частотной характеристики следует произвести ее дискретизацию по частоте в  $N$  равноотстоящих точках на единичной окружности (взять частотную выборку) и найти непрерывную частотную характеристику, интерполируя отсчеты частотной характеристики. В этом случае ошибка аппроксимации на частотах взятия выборки будет в точности равна нулю и иметь конечную величину в промежуточных точках. Чем более гладкой является аппроксимируемая частотная характеристика, тем меньше ошибка аппроксимации между частотными отсчетами. Пример такой аппроксимации показан на фиг. 3.27, а и б. На фиг. 3.27, а изображена заданная частотная характеристика (сплошная линия) и выборка из частотных отсчетов (точки). На фиг. 3.27, б представлен результат непрерывной интерполяции частотных отсчетов.

Описанную процедуру можно было бы использовать непосредственно для расчета КИХ-фильтров, однако для улучшения качества аппроксимации, т. е. для уменьшения ошибки аппроксимации, часть частотных отсчетов целесообразно сделать независимыми переменными. Значения этих независимых переменных обычно рассчитывают методами оптимизации на вычислительной машине таким образом, чтобы минимизировать некоторую простую функцию ошибки аппроксимации (например, наибольшую ошибку аппроксимации). В качестве независимых переменных можно выбрать, например, частотные отсчеты, расположенные в переходной полосе между двумя полосами, внутри которых частотная характеристика определена (т. е. в случае фильтра нижних частот между полосами пропускания и непропускания).



Фиг. 3.27. Иллюстрация метода частотной выборки.

Чтобы понять, почему при такой методике оптимизации часто лишь несколько из  $N$  частотных отсчетов могут существенно уменьшить ошибку аппроксимации, необходимо вычислить значения  $H(z)$  на единичной окружности. Получаемая при этом интерполяционная формула для расчета частотной характеристики фильтра в функции непрерывной частоты имеет вид

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j(\pi k/N)} \sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)}. \quad (3.65)$$

Отсюда следует, что частотная характеристика фильтра является линейной комбинацией частотных интерполирующих функций вида

$$S(\omega, k) = e^{-j(\pi k/N)} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} = \pm e^{-j(\pi k/N)} \frac{\sin[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} \quad (3.66)$$

со значениями частотных отсчетов  $H(k)$  в качестве коэффициентов. Таким образом, вклад каждого частотного отсчета в общую частотную характеристику пропорционален его значению  $H(k)$ , умноженному на функцию  $\sin(N\omega/2)/\sin(\omega/2)$ , смещаемую по частоте на  $\pi k/N$ . Оказалось, что интерполирующие функции [т. е.  $\sin(N\omega/2)/\sin(\omega/2)$ ], связанные с частотными отсчетами из переходной полосы, обеспечивают хорошее подавление пульсаций в примыкающих частотных полосах. Таким образом, оптимизируя значения только тех заданных частотных отсчетов, которые лежат в предварительно выбранных переходных полосах, можно получить фильтры с очень хорошими характеристиками.

### 3.18. Решение задачи оптимизации

Чтобы найти оптимальные значения заданных частотных отсчетов, нужно составить и решить систему уравнений, математически описывающих задачу оптимизации. Вместо того чтобы сразу рассматривать эту задачу в общем виде, запишем необходимые уравнения для простого примера, а затем полученные результаты обобщим на произвольный случай.

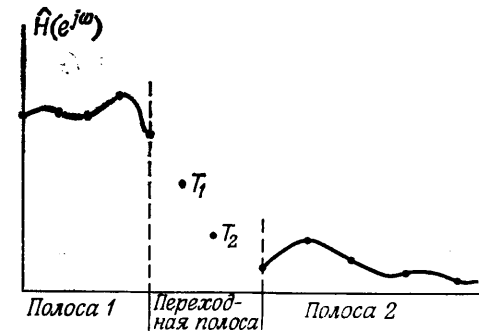
На фиг. 3.28 иллюстрируется типичный способ задания фильтра при расчете его методом частотной выборки. Частотная характеристика фильтра задана в полосах 1 и 2 и не задана в переходной полосе между ними. Сплошной кривой на фиг. 3.28 представлена заданная частотная характеристика  $\hat{H}(e^{j\omega})$ , а точками отмечены частотные отсчеты. Обозначим для удобства частотные отсчеты в переходной полосе через  $T_1$  и  $T_2$ . Именно эти отсчеты необходимо оптимизировать.

На фиг. 3.28 показана только половина частотных отсчетов, так как, чтобы импульсная характеристика фильтра была действительной, последовательность частотных отсчетов  $H(k)$  должна иметь относительно своего центра комплексно сопряженную симметрию. Кроме того, чтобы фильтр обладал строго линейной фазовой характеристикой, на значения  $\{H(k)\}$  накладываются дополнительные ограничения. Каковы именно эти дополнительные ограничения, будет рассмотрено в разд. 3.21 и 3.22. Пока предположим, что  $H(e^{j\omega})$  можно выразить в виде

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \sum_{k=0}^{KM} H(k) S(\omega, k) = \quad (3.67)$$

$$= e^{-j\omega(N-1)/2} H^*(e^{j\omega}), \quad (3.68)$$

где  $S(\omega, k)$  — результирующая частотная интерполирующая функция, а  $(KM + 1)$  равно числу частотных отсчетов, которые



Фиг. 3.28. Задание фильтра при расчете его методом частотной выборки.

требуется определить. Из формул (3.67) и (3.68) следует, что

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{KM} H(k) S(\omega, k). \quad (3.69)$$

Ниже при составлении уравнений будет использована действительная функция  $H^*(e^{j\omega})$ , поскольку множитель с линейным изменением фазы в (3.68) при проектировании фильтра можно не учитывать.

Для примера на фиг. 3.28 функцию  $H^*(e^{j\omega})$  можно представить в более простой форме

$$H^*(e^{j\omega}) = B(\omega) + T_1 A_1(\omega) + T_2 A_2(\omega). \quad (3.70)$$

Здесь  $B(\omega)$  учитывает вклад в  $H^*(e^{j\omega})$  всех задаваемых частотных отсчетов, а  $A_1(\omega)$  и  $A_2(\omega)$  — вклады от двух незадаваемых частотных отсчетов с амплитудами  $T_1$  и  $T_2$ .

Чтобы найти эти незадаваемые частотные отсчеты, необходимо для частот в пределах полос 1 и 2 составить систему ограничивающих уравнений. Типичными ограничениями для такой системы уравнений могут быть следующие:

$$1. |H^*(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega})| \leq \varepsilon \text{ для } \omega \text{ в полосе 1.}$$

$$2. \text{Минимизируется максимум } |H^*(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega})| \text{ для } \omega \text{ в полосе 2 подбором } T_1 \text{ и } T_2.$$

Здесь  $\varepsilon$  — заданная погрешность. Другой способ задания ограничений заключается в следующем:

Минимизируется максимум  $|W(e^{j\omega}) [H^*(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega})]|$  в полосах 1 и 2 подбором  $T_1$  и  $T_2$ .

Здесь  $W(e^{j\omega})$  — известная весовая функция ошибки аппроксимации частотной характеристики.

Приведенные ограничения могут быть формализованы, если с помощью соотношения (3.70) записать каждое из этих ограничений для большого числа частот в пределах заданного диапазона. Так, например, из первой системы ограничений вытекают следующие неравенства:

$$\left. \begin{aligned} T_1 A_1(\omega_m) + T_2 A_2(\omega_m) &\leq \varepsilon - B(\omega_m) + \hat{H}(e^{j\omega_m}), \\ -T_1 A_1(\omega_m) - T_2 A_2(\omega_m) &\leq \varepsilon + B(\omega_m) - \hat{H}(e^{j\omega_m}), \end{aligned} \right\} \omega_m \text{ в полосе 1,}$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 A_1(\omega_m) + T_2 A_2(\omega_m) - T_3 &\leq -B(\omega_m) + \hat{H}(e^{j\omega_m}), \\ -T_1 A_1(\omega_m) - T_2 A_2(\omega_m) - T_3 &\leq B(\omega_m) - \hat{H}(e^{j\omega_m}), \end{aligned} \right\} \omega_m \text{ в полосе 2,}$$

где  $T_3$  представляет максимум ошибки аппроксимации в полосе 2. Полученная система неравенств имеет вид, пригодный для решения методами линейного программирования. Аналогично для

второй системы ограничений можно записать вторую систему неравенств относительно переменных  $T_1$ ,  $T_2$  и  $T_3$ . В общем случае, когда частотная характеристика задана на нескольких участках, разделенных переходными полосами, в которых частотные отсчеты не задаются, можно составить систему линейных неравенств относительно этих неизвестных частотных отсчетов и решить ее методами линейного программирования. Поскольку метод линейного программирования в этой главе встретится еще не один раз, следующий раздел будет посвящен краткому рассмотрению этого мощного математического аппарата для решения систем линейных неравенств. Итак, при расчете фильтров методом частотной выборки используются лишь те коэффициенты ДПФ импульсной характеристики фильтра (образующие частотную выборку), которые находятся в интересующих нас полосах, а остальные коэффициенты ДПФ, попадающие в переходные полосы, считаются незадаваемыми. Относительно этих неизвестных коэффициентов составляет система линейных неравенств, описывающая ограничения, накладываемые на частотную характеристику. Решая эту систему методами линейного программирования, получают значения незадаваемых частотных отсчетов.

### 3.19. Линейное программирование

Математически задача линейного программирования в общем виде формулируется следующим образом:

найти такие  $\{x_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N$ , которые при условиях

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.71)$$

$$\sum_{j=1}^N c_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (M < N), \quad (3.72)$$

обеспечивают минимум суммы

$$\sum_{j=1}^N a_j x_j. \quad (3.73)$$

Здесь  $c_{ij}$ ,  $b_i$  и  $a_j$  — константы.

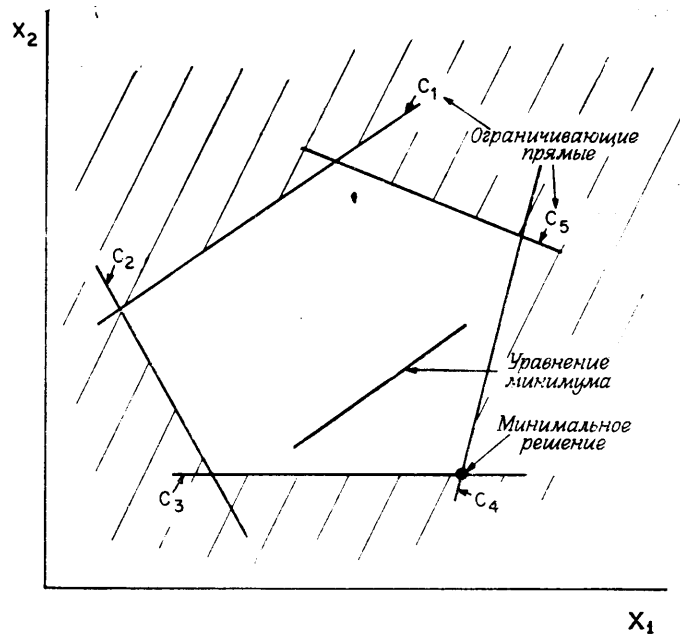
Сформулированная задача является главной и, как можно показать, используя принцип двойственности, математически эквивалентна следующей «двойственной задаче»:

найти такие  $\{y_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M$ , которые при условиях

$$\sum_{i=1}^M c_{ij} y_i \leq a_j, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.74)$$

обеспечивают максимум суммы

$$\sum_{i=1}^M b_i y_i. \quad (3.75)$$



Фиг. 3.29. Геометрическая интерпретация метода линейного программирования.

Одно из свойств метода линейного программирования состоит в том, что если решение задачи существует, то оно является единственным. Известно несколько детально разработанных способов решения с использованием  $(M + N)$  итераций. Кроме того, существуют простые способы определения, является ли решение неограниченным или слабо ограниченным.

На фиг. 3.29 дана простая геометрическая интерпретация метода линейного программирования для двумерного случая. Каждое из ограничений, обозначенных буквами  $C_1 \div C_5$ , представляет линейное неравенство относительно  $x_1$  и  $x_2$ . Следовательно, можно провести прямую линию, соответствующую каждому из этих линейных неравенств, и отбросить половину области решения, для которой неравенство не выполняется (эта область на фиг. 3.29 заштрихована). После проведения всех ограничивающих прямых на плоскости  $x_1, x_2$  остается лишь небольшая допустимая область решения задачи минимизации (как правило, это выпуклый многоугольник). Задав некоторое значение минимума, проведем на плоскости  $x_1, x_2$  прямую, линейное уравнение которой удовлетворяет выбранному минимуму. При последовательном уменьшении значения минимума эта прямая в конце концов пройдет через одну из вершин многоугольника (в данном случае через точку пересече-

чения линий  $C_3$  и  $C_4$ ), и в этой точке будет получено искомое решение, т. е. абсолютный минимум, удовлетворяющий всем ограничениям. Следует отметить, что этот метод обычно не используется для определения минимума в алгоритмах линейного программирования.

Важной характерной особенностью задачи линейного программирования является то, что минимум обычно соответствует одной из вершин многоугольника, образуемого ограничивающими линиями, т. е. точке, в которой  $M$  из заданных неравенств становятся равенствами. Таким образом, для отыскания минимума достаточно иметь эффективный алгоритм анализа вершин многоугольника. Этот метод называется *симплекс-методом*. Его описание можно найти в литературе по линейному программированию.

### 3.20. Фильтры с частотной выборкой вида 1 и 2

При расчете фильтров методом частотной выборки используются отсчеты заданной частотной характеристики в  $N$  равноотстоящих точках на единичной окружности. До сих пор использовались отсчеты в точках

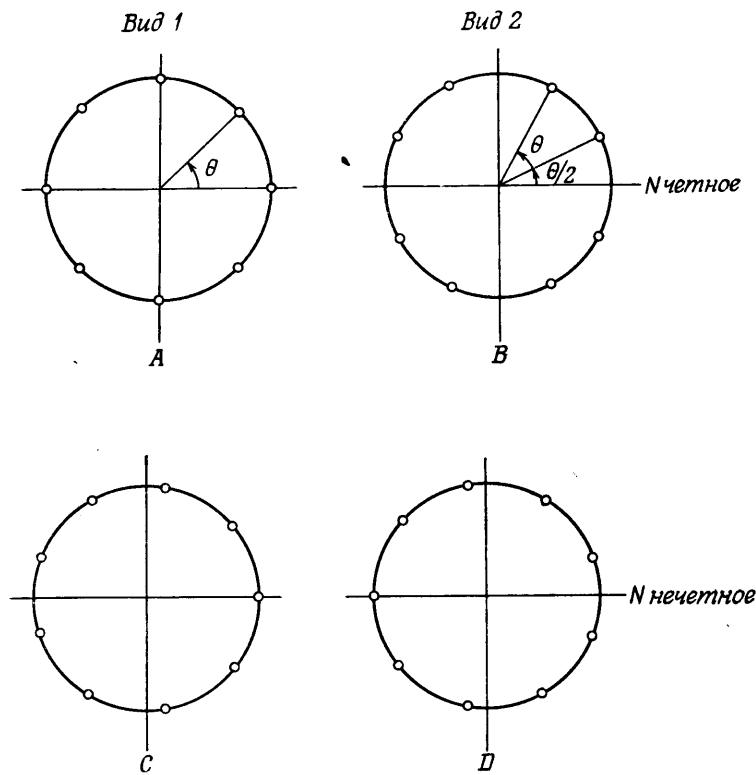
$$f_k = \frac{k}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.76)$$

соответствующих  $N$  частотам, для которых вычисляется  $N$ -точечное ДПФ. Возможен другой набор равноотстоящих частот, также пригодный для расчета фильтров методом частотной выборки. Этот новый набор частот задается равенством

$$f_k = \frac{(k+1/2)}{N}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.77)$$

Точное расположение обоих наборов частот, заданных соотношением (3.76) для фильтров вида 1 и соотношением (3.77) для фильтров вида 2, показано на фиг. 3.30 для случаев четного и нечетного  $N$ . Видно, что для фильтров вида 1 точка отсчета частот выборки соответствует  $f = 0$ , а для фильтров вида 2 она соответствует  $f = \theta/2$ , причем величина  $\theta = 1/N$  для фильтров обоих видов равна угловому расстоянию между соседними отсчетами.

Использование фильтров вида 2 с частотной выборкой предоставляет разработчику дополнительные возможности при расчете фильтров с заданной частотной характеристикой. Так, граничная частота полосы фильтра может оказаться намного ближе к точке, используемой в фильтре вида 2, чем в фильтре вида 1, так что в этом случае для решения задачи оптимизации предпочтительнее фильтр вида 2 с частотной выборкой. Поскольку при оптимизации несущественно, как расположены отсчеты, то для вычисления коэффициентов фильтра можно использовать фильтр любого вида при условии, что для каждого из них имеется действительная



Фиг. 3.30. Четыре способа расположения отсчетов частотной выборки.

функция  $H^*(e^{j\omega})$  [см. формулу (3.69)]. Поэтому в следующих разделах будут получены выражения для  $H^*(e^{j\omega})$  при четном и нечетном  $N$  для фильтров с частотной выборкой вида 1 и 2, имеющих линейную фазовую характеристику.

### 3.21. Фильтры вида 1 с частотной выборкой и линейной фазой

Выше было показано, что частотная характеристика фильтра вида 1 с частотной выборкой описывается выражением

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2}}{N} \sum_{h=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j(\pi h/N)} \sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)}. \quad (3.78)$$

Для фильтров с линейной фазой [с задержкой на  $(N-1)/2$  отсчетов] частотные отсчеты  $H(k)$  можно записать в виде

$$H(k) = |H(k)| e^{j\theta(k)}, \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (3.79)$$

причем

$$|H(k)| = |H(N-k)|, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.80)$$

Кроме того, при четном  $N$

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2}\right), & k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \\ \frac{2\pi}{N} (N-k) \left(\frac{N-1}{2}\right), & k=\frac{N}{2}+1, \dots, N-1, \\ 0, & k=\frac{N}{2}, \end{cases} \quad (3.81)$$

$$H\left(\frac{N}{2}\right) = 0, \quad (3.82)$$

а при нечетном  $N$

$$\theta(k) = \begin{cases} -\frac{2\pi}{N} k \left(\frac{N-1}{2}\right), & k=0, 1, \dots, \frac{N-1}{2}, \\ \frac{2\pi}{N} (N-k) \left(\frac{N-1}{2}\right), & k=\frac{N+1}{2}, \dots, N-1. \end{cases} \quad (3.83)$$

Уравнение (3.82) отражает тот факт, что, как ранее было показано, для фильтра с линейной фазой и четным  $N$  функция  $H(e^{j\omega}) = 0$  при  $\omega = \pi$ .

Используя выражения (3.81) и (3.82), приведем (3.79) к виду (для четного  $N$ )

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)| e^{-j(2\pi/N)k[(N-1)/2]}, & k=0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \\ 0, & k=\frac{N}{2}, \\ |H(k)| e^{j(2\pi/N)(N-k)[(N-1)/2]}, & k=\frac{N}{2}+1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (3.84)$$

Подставив выражение для  $H(k)$  в (3.78) и сократив члены, получим

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2}}{N} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \times \left[ \sum_{k=0}^{N/2-1} \frac{|H(k)| (-1)^k}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} - \sum_{k=N/2+1}^{N-1} \frac{|H(k)| (-1)^k}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} \right]. \quad (3.85)$$

Подстановка  $l = N - k$  во вторую сумму выражения (3.85)

дает

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2}}{N} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \times \\ \times \left\{ \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \frac{|H(k)|(-1)^k}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} - \sum_{l=1}^{(N/2)-1} \frac{|H(N-l)|(-1)^l}{\sin[\omega/2 - \pi(N-l)/N]} \right\}. \quad (3.86)$$

Объединяя члены и учитывая формулу (3.80), находим

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2}}{N} \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left\{ \frac{H(0)}{\sin(\omega/2)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} |H(k)|(-1)^k \left[ \frac{1}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{1}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)} \right] \right\}. \quad (3.87)$$

Наконец, используя тригонометрические тождества, получаем искомый результат:

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} \left( \frac{|H(0)| \sin(\omega N/2)}{N \sin(\omega/2)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{(N/2)-1} \frac{|H(k)|}{N} \left\{ \frac{\sin[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{\sin[N(\omega/2 + \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)} \right\} \right). \quad (3.88)$$

Выражение (3.88) без учета множителя  $e^{-j\omega(N-1)/2}$  представляет искомую действительную функцию  $H^*(e^{j\omega})$  для фильтра вида 1 с частотной выборкой, имеющего линейную фазу и четное  $N$ .

Аналогичные выкладки для фильтра вида 1 и нечетного  $N$  дают

$$H^*(e^{j\omega}) = \left( \frac{H(0)}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{|H(k)|}{N} \left\{ \frac{\sin[N(\omega/2 - \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 - \pi k/N)} + \frac{\sin[N(\omega/2 + \pi k/N)]}{\sin(\omega/2 + \pi k/N)} \right\} \right). \quad (3.89)$$

### 3.22. Фильтры вида 2 с частотной выборкой и линейной фазой

Для фильтров вида 2 с частотной выборкой значения частотных отсчетов  $H(k)$  равны

$$H(k) = H(z) \Big|_{z=e^{j(2\pi/N)(k+1/2)}}. \quad (3.90)$$

Соотношение (3.90) можно использовать для определения связи между частотными отсчетами  $H(k)$  и импульсной характери-

кой фильтра  $h(n)$ :

$$H(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j(2\pi/N)n(k+1/2)} = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{h(n) e^{-j(\pi n/N)}}_{g(n)} e^{-j(2\pi/N)nk}. \quad (3.91)$$

Итак, отсчеты  $H(k)$  равны ДПФ последовательности

$$g(n) = h(n) e^{-j(\pi n/N)}. \quad (3.92)$$

Таким образом,  $g(n)$  представляет собой обратное ДПФ от  $H(k)$ , т. е.

$$g(n) = h(n) e^{-j(\pi n/N)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)nk} \quad (3.93)$$

или

$$h(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)(k+1/2)n}. \quad (3.94)$$

Выражение (3.94) можно использовать для расчета  $z$ -преобразования импульсной характеристики фильтра:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(k) e^{j(2\pi/N)(k+1/2)n} \right] z^{-n}. \quad (3.95)$$

Отсюда, меняя порядок суммирования и суммируя по  $n$ , получим

$$H(z) = \frac{1+z^{-N}}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k)}{1-z^{-1}e^{j(2\pi/N)(k+1/2)}}. \quad (3.96)$$

Вычислим значения  $H(z)$  на единичной окружности:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega(N-1)/2}}{N} \left\{ \sum_{k=0}^{N-1} \frac{H(k) e^{-j(\pi/N)(k+1/2)} \cos(\omega N/2)}{j \sin[\omega/2 - (\pi/N)(k+1/2)]} \right\}. \quad (3.97)$$

Для фильтра вида 2 с линейной фазой [с задержкой на  $(N-1)/2$  отсчетов] частотные отсчеты  $H(k)$  можно записать в виде

$$H(k) = \\ = \begin{cases} |H(k)| e^{-j(2\pi/N)[(N-1)/2](k+1/2)}, & k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1, \\ |H(k)| e^{j(2\pi/N)[(N-1)/2](N-k-1/2)}, & k = \frac{N}{2}, \dots, N-1, \end{cases} \quad (3.98)$$



при четном  $N$  или

$$H(k) = \begin{cases} |H(k)| e^{-j(2\pi/N)[(N-1)/2](k+1/2)}, & k=0, 1, \dots, \frac{N-3}{2}, \\ \left| H\left(\frac{N-1}{2}\right) \right|, & k = \frac{N-1}{2}, \\ |H(k)| e^{j(2\pi/N)[(N-1)/2](N-k-1/2)}, & k = \frac{N+1}{2}, \dots, N-1, \end{cases} \quad (3.99)$$

при нечетном  $N$ . Здесь

$$|H(k)| = |H(N-1-k)|, \quad k=0, 1, \dots, N-1. \quad (3.100)$$

Выражения (3.98) — (3.100) можно подставить в формулу (3.97), как это делалось выше при рассмотрении фильтра вида 1. В результате получают следующие выражения для  $H^*(e^{j\omega})$ :

$$H^*(e^{j\omega}) = \left[ \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \frac{|H(k)|}{N} \left( \frac{\sin \{N[\omega/2 - (\pi/N)(k+1/2)]\}}{\sin [\omega/2 - (\pi/N)(k+1/2)]} + \frac{\sin \{N[\omega/2 + (\pi/N)(k+1/2)]\}}{\sin [\omega/2 + (\pi/N)(k+1/2)]} \right) \right] \quad (3.101)$$

для четного  $N$  и

$$H^*(e^{j\omega}) = \left\{ \frac{|H[(N-1)/2]|}{N} \frac{\sin(\omega N/2)}{\sin(\omega/2)} + \sum_{k=0}^{(N-3)/2} \left[ \frac{|H(k)|}{N} \left( \frac{\sin \{N[\omega/2 - (\pi/N)(k+1/2)]\}}{\sin [\omega/2 - (\pi/N)(k+1/2)]} + \frac{\sin \{N[\omega/2 + (\pi/N)(k+1/2)]\}}{\sin [\omega/2 + (\pi/N)(k+1/2)]} \right) \right] \right\} \quad (3.102)$$

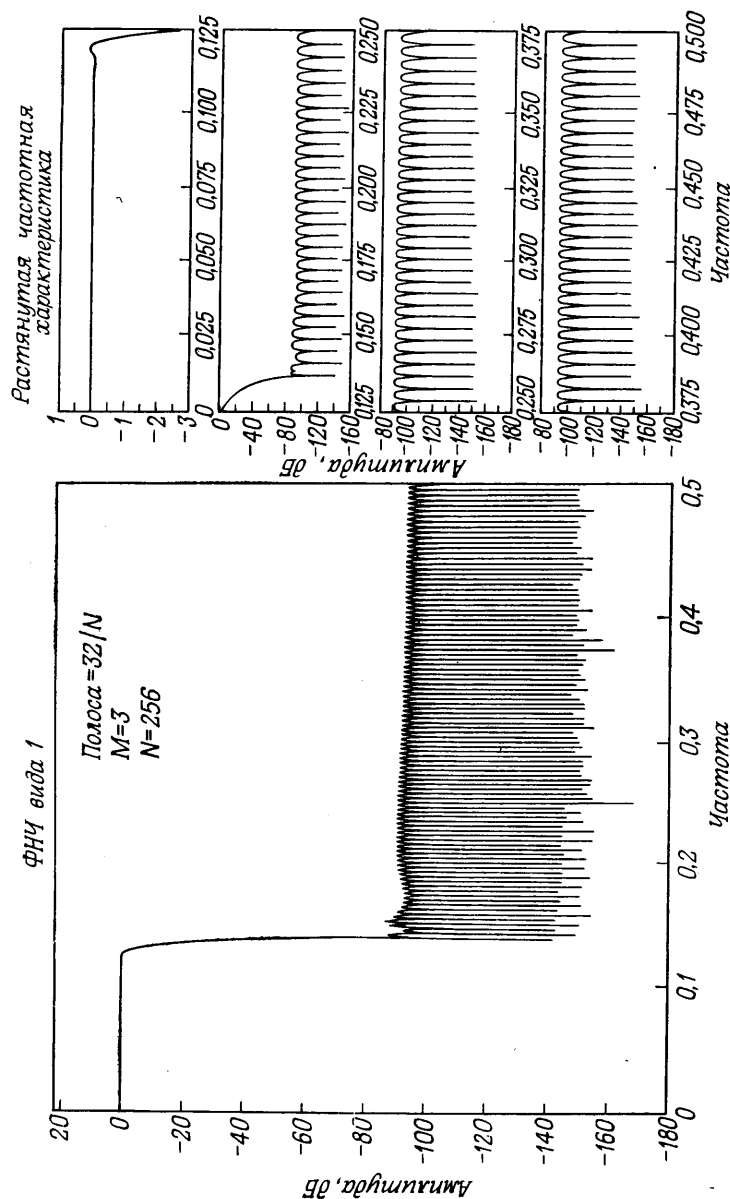
для нечетного  $N$ .

Таким образом, каждую из четырех формул (3.88), (3.89), (3.101), (3.102) можно использовать при выполнении процедуры оптимизации в процессе расчета цифровых КИХ-фильтров с линейной фазой. Выбор вида фильтра с частотной выборкой, четного или нечетного  $N$  производится разработчиком и зависит прежде всего от назначения рассчитываемого фильтра. В разд. 3.23 представлены некоторые практические результаты расчета фильтров методом частотной выборки.

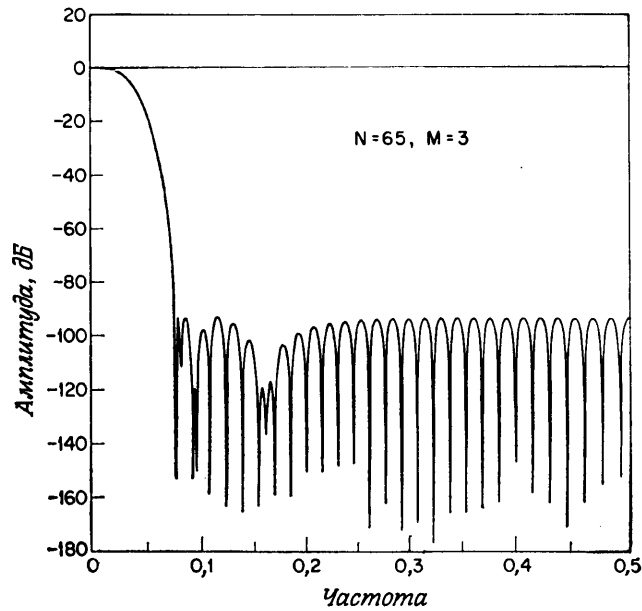
### 3.23. Некоторые самые общие результаты расчета фильтров методом частотной выборки

#### 1. Фильтры нижних частот

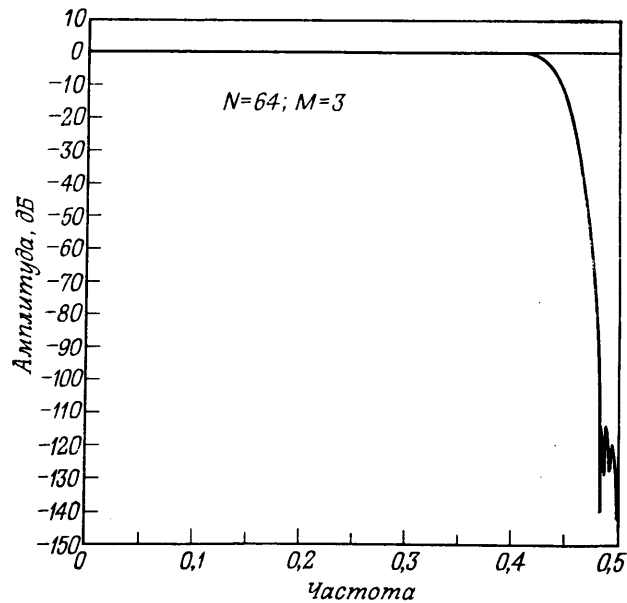
Метод частотной выборки можно использовать для расчета широкого класса фильтров. На фиг. 3.31—3.33 представлено несколько типичных фильтров нижних частот, рассчитанных этим



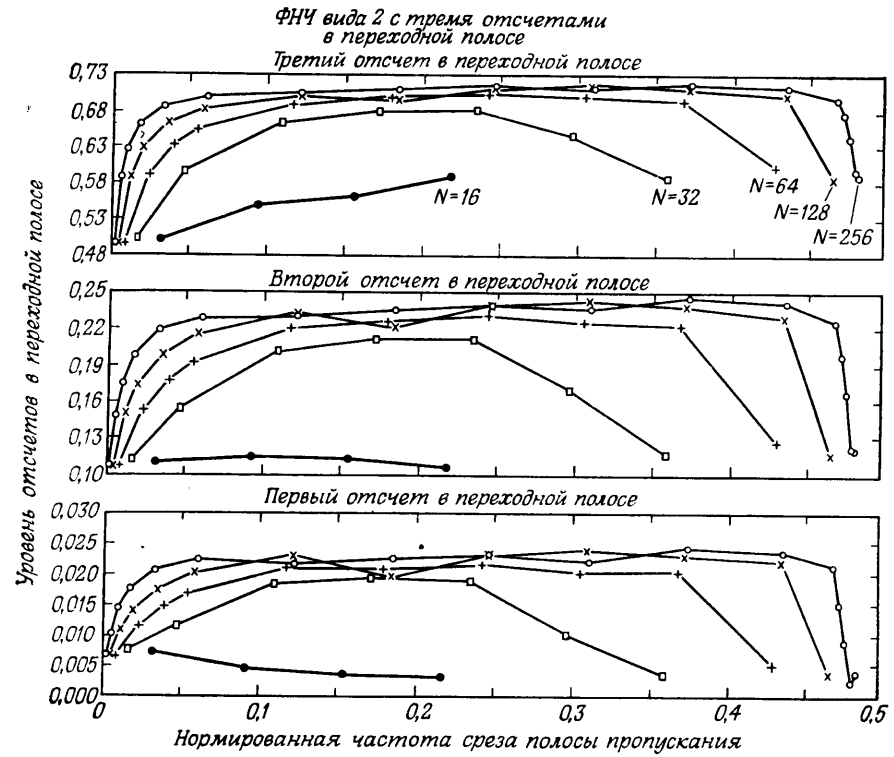
Фиг. 3.34. Частотная характеристика фильтра нижних частот, рассчитанного методом частотной выборки.



Фиг. 3.32. Частотная характеристика узкополосного фильтра нижних частот, рассчитанного методом частотной выборки.



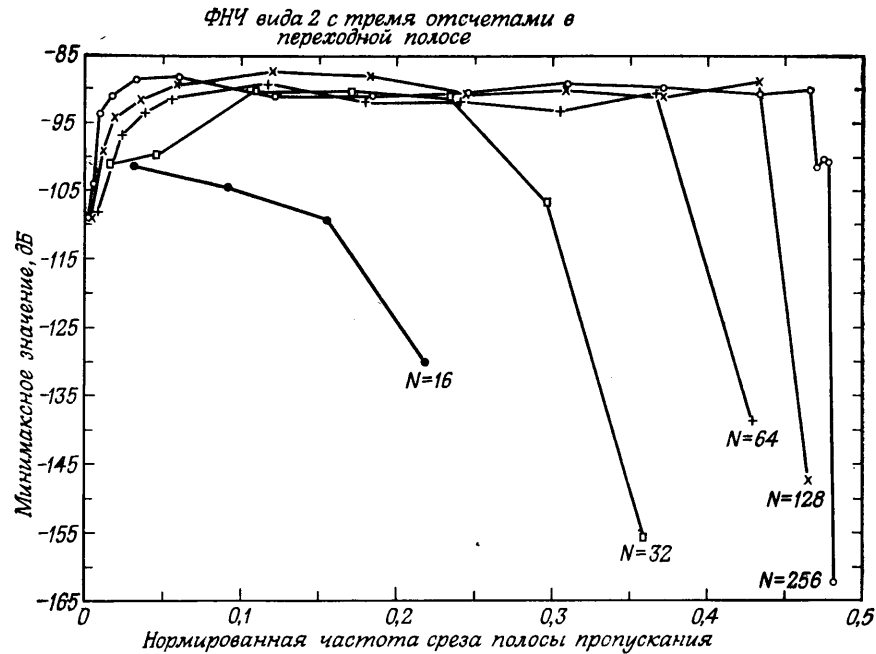
Фиг. 3.33. Частотная характеристика широкополосного фильтра нижних частот, рассчитанного методом частотной выборки.



Фиг. 3.34. Значения частотных отсчетов в переходной полосе для широкого класса фильтров нижних частот, рассчитанных методом частотной выборки.

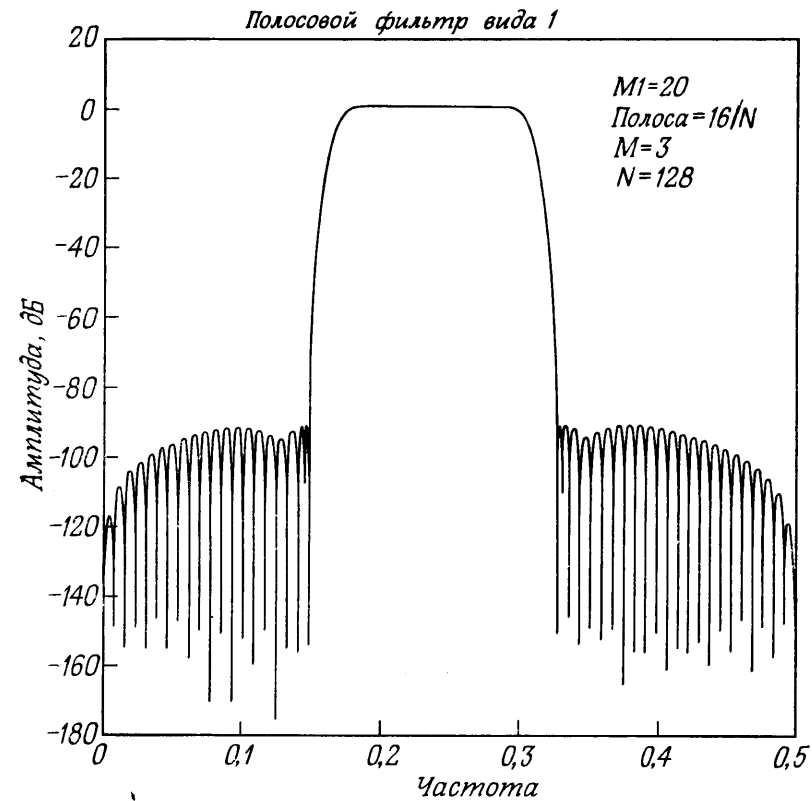
методом. Критерий оптимизации во всех приводимых примерах состоял в минимизации максимума пульсаций в полосе непропускания. Фиг. 3.31 соответствует фильтру вида 1 с частотной выборкой ( $N = 256$ ) и с тремя подбираемыми частотными отсчетами в переходной полосе. Максимум пульсаций в полосе непропускания составляет около 0,05. На фиг. 3.32 показана характеристика узкополосного фильтра нижних частот ( $N = 65$ ) с частотой среза, равной 0,0306. Здесь подбираются три отсчета в переходной полосе; максимум пульсаций в полосе непропускания близок к 0,00002 (или  $-93$  дБ). На фиг. 3.33 изображена характеристика широкополосного фильтра нижних частот ( $N = 64$ ) с частотой среза, равной 0,4355. Здесь также подбираются три частотных отсчета; в результате максимум пульсаций в полосе непропускания составляет около 0,000002 (или  $-115$  дБ).

В общем случае при проектировании фильтров нижних частот с одним подбираемым отсчетом в переходной полосе (с минимиза-



Фиг. 3.35. Ослабление в полосе не пропускания для широкого класса фильтров нижних частот, рассчитанных методом частотной выборки.

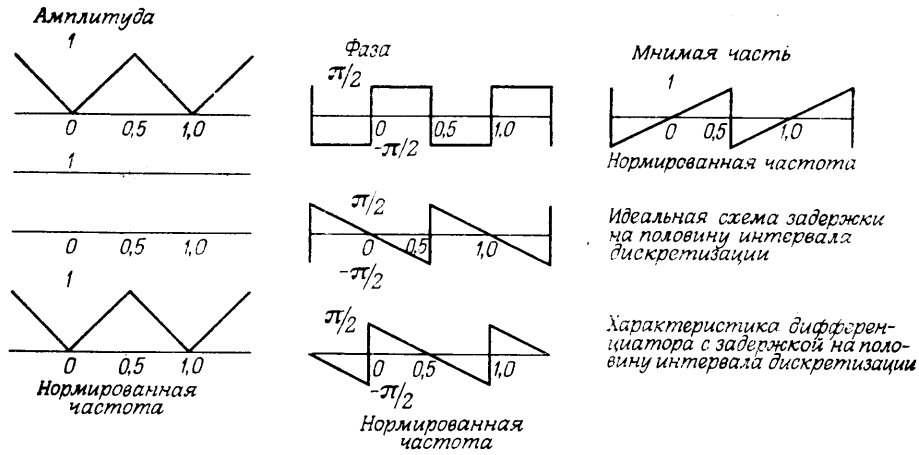
цией максимума пульсаций в полосе не пропускания) можно достичь подавления вне полосы пропускания от 44 до 54 дБ. С двумя подбираемыми отсчетами в переходной полосе можно достичь подавления от 65 до 75 дБ, а возможное подавление при трех подбираемых отсчетах в переходной полосе составляет 85—95 дБ. На фиг. 3.34 и 3.35 приведены значения трех отсчетов в переходной полосе и максимума пульсаций для фильтров вида 2 при различных  $N$  в функции полосы пропускания фильтра. Интересно отметить, что как для узкополосных, так и для широкополосных фильтров результаты обычно *лучше* (т. е. подавление в полосе не пропускания сильнее), чем для фильтров со средними значениями полос пропускания. Это можно объяснить следующим образом. При малой ширине нормализованной полосы приходится подавлять очень маленькие пульсации, поэтому отсчеты в переходной полосе обеспечивают отличное подавление этих пульсаций. При большой величине нормализованной полосы остается очень небольшая часть диапазона частот, в котором приходится подавлять пульсации, поэтому отсчеты в переходной полосе вновь обеспечат эффективное подавление в полосе не пропускания.



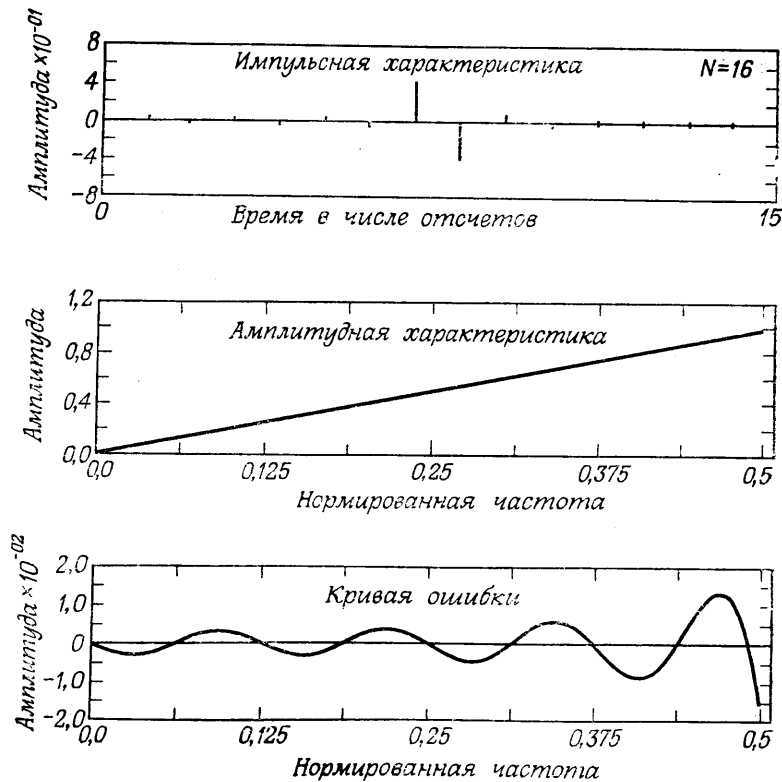
Фиг. 3.36. Частотная характеристика полосового фильтра, рассчитанного методом частотной выборки.

## 2. Полосовые фильтры

Полосовые фильтры можно рассчитывать практически так же, как фильтры нижних частот. На фиг. 3.36 изображена характеристика полосового фильтра вида 1 ( $N=128$ ) с тремя подбираемыми частотными отсчетами, расположенными симметрично по обе стороны от полосы пропускания. Максимум пульсаций в полосе не пропускания составляет около 0,000025 (или -91 дБ), а огибающая пульсаций спадает до уровня  $10^{-6}$  (или до уровня -120 дБ) на нулевой частоте и частоте, равной половине частоты дискретизации.



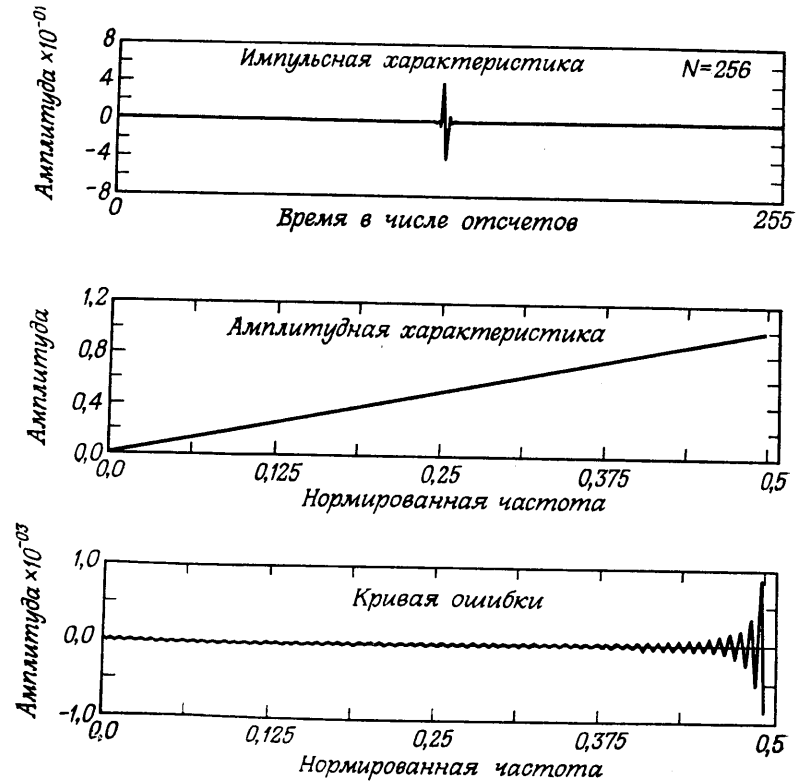
Фиг. 3.37. Характеристики идеального дифференциатора с задержкой на половину интервала дискретизации, полученного последовательным соединением идеального дифференциатора и идеальной схемы задержки на половину интервала дискретизации.



Фиг. 3.38. Характеристики 16-точечного дифференциатора.

### 3. Широкополосные дифференциаторы

Широкополосные дифференциаторы используются во многих системах. Амплитудная, фазовая и эквивалентная мнимая характеристики идеального дифференциатора показаны на фиг. 3.37. При  $\omega = \pi$  мнимая часть частотной характеристики имеет разрыв. При аппроксимации этот разрыв не может занимать нулевую полосу, т. е. вблизи  $\omega = \pi$  должна располагаться переходная полоса. Соединяя последовательно идеальный широкополосный дифференциатор с идеальной схемой задержки на половину интервала дискретизации, можно устранить разрыв частотной характеристики дифференциатора при  $\omega = \pi$  (фиг. 3.37). В центре на фиг. 3.37 изображены амплитудная и фазовая характеристики идеальной схемы задержки на половину интервала дискретизации, внизу представлены результирующие характеристики последовательно соединенных идеального широкополосного дифференциатора



Фиг. 3.39. Характеристики 256-точечного дифференциатора.

тора и идеальной схемы задержки на половину интервала дискретизации. Видно, что при  $\omega = \pi$  уже нет разрыва фазы, поэтому здесь больше не нужна переходная полоса. На частоте  $\omega = 0$  есть скачок фазы на  $\pi$  радиан, но в этой точке амплитудная характеристика равна нулю. Таким образом, аппроксимация широкополосных дифференциаторов осуществляется весьма просто с использованием КИХ-фильтров, для которых при четном числе отсчетов в импульсной характеристике легко получить задержку на половину интервала дискретизации.

Характеристики двух типичных дифференциаторов, рассчитанных описанным способом, изображены на фиг. 3.38 и 3.39 для  $N = 16$  и  $N = 256$ . При  $N = 16$  максимум модуля ошибки составляет  $\sim 0,015$  (ошибка фазы, конечно, равна нулю), тогда как при  $N = 256$  максимум модуля ошибки составляет  $\sim 0,0008$ .

### 3.24. Заключение к описанию метода частотной выборки

Основная идея метода частотной выборки состоит в том, что искому частотную характеристику можно аппроксимировать ее отсчетами, взятыми в  $N$  равноотстоящих точках, а затем путем интерполяции получить результирующую частотную характеристику, которая будет проходить через исходные отсчеты. Ошибка интерполяции для фильтров с достаточно гладкими частотными характеристиками обычно имеет небольшую величину. В случае селективных фильтров, когда заданная частотная характеристика резко меняется от полосы к полосе, частотные отсчеты в переходных полосах остаются незадаанными переменными, значения которых подбираются с помощью алгоритма оптимизации таким образом, чтобы минимизировать некоторую функцию ошибки аппроксимации характеристики фильтра. Для выполнения необходимой минимизации можно также использовать простые методы линейного программирования. Кроме того, было показано, что возможны два различных вида фильтров с частотной выборкой в зависимости от того, где находится начальный отсчет выборки; были получены выражения для частотных характеристик фильтров обоих видов, используемые при решении задачи оптимизации.

### 3.25. Третий метод проектирования — проектирование оптимальных фильтров с минимаксной ошибкой

При подходе к расчету КИХ-фильтра с линейной фазой как к задаче аппроксимации по Чебышеву имеется возможность получить ряд условий, при которых, как можно доказать, решение является оптимальным (в том смысле, что минимизируется максимальная ошибка аппроксимации на всем интервале аппроксимации) и единственным. Кроме того, легко показать, каким образом

с помощью нескольких стандартных процедур оптимизации, в том числе с использованием линейного программирования, можно находить коэффициенты фильтра, обеспечивающие оптимальное (минимаксное) решение. В последующих разделах будет сформулирована задача расчета оптимального КИХ-фильтра и рассмотрены методы ее решения. Поскольку получаемые при этом решения имеют очень большое практическое значение, в последующих разделах будут рассмотрены различные классы оптимальных фильтров и их свойства, а именно фильтры нижних частот, полосовые фильтры, дифференциаторы, преобразователи Гильберта и, наконец, многополосные фильтры и фильтры с произвольными характеристиками.

### 3.26. Аппроксимация по Чебышеву со взвешиванием<sup>1)</sup>

В разд. 3.5 было показано, что частотная характеристика фильтров четырех различных видов с линейной фазой может быть записана в виде

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega(N-1)/2} e^{j(\pi/2)L} H^*(e^{j\omega}). \quad (3.103)$$

Значения  $L$  и выражения для  $H^*(e^{j\omega})$  для каждого из четырех видов фильтров приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

	$L$	$H^*(e^{j\omega})$
Фильтр вида 1. $N$ нечетное, симметричная импульсная характеристика	0	$\sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n)$
Фильтр вида 2. $N$ четное, симметричная импульсная характеристика	0	$\sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$
Фильтр вида 3. $N$ нечетное, антисимметричная импульсная характеристика	1	$\sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(\omega n)$
Фильтр вида 4. $N$ четное, антисимметричная импульсная характеристика	1	$\sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin\left[\omega\left(n - \frac{1}{2}\right)\right]$

<sup>1)</sup> Многие результаты этого и нескольких последующих разделов основаны на работе Т. Паркса и Дж. Макклеллана.

Используя простые тригонометрические тождества, каждое выражение для  $H^*(e^{j\omega})$  из табл. 3.2 можно записать в виде произведения фиксированной функции  $\omega$  [обозначим ее через  $Q(e^{j\omega})$ ] и члена, представляющего собой сумму косинусов [обозначим его через  $P(e^{j\omega})$ ]. В результате выражения для  $H^*(e^{j\omega})$  из табл. 3.2 принимают вид

Фильтр вида 1  
Без изменений.

Фильтр вида 2

$$\sum_{n=1}^{N/2} b(n) \cos \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right] = \cos \left( \frac{\omega}{2} \right) \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \tilde{b}(n) \cos(\omega n). \quad (3.104a)$$

Фильтр вида 3

$$\sum_{n=1}^{(N-1)/2} c(n) \sin(\omega n) = \sin(\omega) \sum_{n=0}^{(N-3)/2} \tilde{c}(n) \cos(\omega n). \quad (3.104б)$$

Фильтр вида 4

$$\sum_{n=1}^{N/2} d(n) \sin \left[ \omega \left( n - \frac{1}{2} \right) \right] = \sin \left( \frac{\omega}{2} \right) \sum_{n=0}^{(N/2)-1} \tilde{d}(n) \cos(\omega n). \quad (3.104в)$$

В табл. 3.3 приведены результирующие выражения для функций  $Q(e^{j\omega})$  и  $P(e^{j\omega})$  для каждого из четырех видов фильтров, в которых  $\tilde{a}(n) = a(n)$ . Для фильтров вида 2, 3 и 4 принято, что

Таблица 3.3

	$Q(e^{j\omega})$	$P(e^{j\omega})$
Фильтр вида 1	1	$\sum_{n=0}^{(N-1)/2} \tilde{a}(n) \cos(\omega n)$
Фильтр вида 2	$\cos(\omega/2)$	$\sum_{n=0}^{(N/2)-1} \tilde{b}(n) \cos(\omega n)$
Фильтр вида 3	$\sin(\omega)$	$\sum_{n=0}^{(N-3)/2} \tilde{c}(n) \cos(\omega n)$
Фильтр вида 4	$\sin(\omega/2)$	$\sum_{n=0}^{(N/2)-1} \tilde{d}(n) \cos(\omega n)$

$Q(e^{j\omega})$  должно быть равно нулю при  $\omega = 0$  или при  $\omega = \pi$  (либо на обеих частотах).

Чтобы показать, как задачу расчета оптимального КИХ-фильтра с линейной фазой сформулировать в виде задачи чебышевской аппроксимации, необходимо ввести заданную (действительную) частотную характеристику фильтра  $D(e^{j\omega})$  и весовую функцию ошибки аппроксимации  $W(e^{j\omega})$ , что позволяет разработчику выбирать различную величину ошибки для разных частотных полос. Взвешенная ошибка аппроксимации  $E(e^{j\omega})$  по определению равна

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [D(e^{j\omega}) - H^*(e^{j\omega})]. \quad (3.105)$$

Записав  $H^*(e^{j\omega})$  в виде произведения  $P(e^{j\omega})$  и  $Q(e^{j\omega})$ , представим  $E(e^{j\omega})$  как

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) [D(e^{j\omega}) - P(e^{j\omega}) Q(e^{j\omega})]. \quad (3.106)$$

Поскольку  $Q(e^{j\omega})$  является вполне определенной функцией частоты, ее можно вынести за скобки, что дает

$$E(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) Q(e^{j\omega}) \left[ \frac{D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})} - P(e^{j\omega}) \right]. \quad (3.107)$$

Формула (3.107) справедлива во всех точках, за исключением, возможно, точки  $\omega = 0$  и (или) точки  $\omega = \pi$ . Определив функции  $\hat{W}(e^{j\omega})$  и  $\hat{D}(e^{j\omega})$  как

$$\hat{W}(e^{j\omega}) = W(e^{j\omega}) Q(e^{j\omega}) \quad (3.108)$$

и

$$\hat{D}(e^{j\omega}) = \frac{D(e^{j\omega})}{Q(e^{j\omega})}, \quad (3.109)$$

выражение для функции ошибки можно записать в виде

$$E(e^{j\omega}) = \hat{W}(e^{j\omega}) [\hat{D}(e^{j\omega}) - P(e^{j\omega})]. \quad (3.110)$$

Теперь задачу чебышевской аппроксимации можно сформулировать как задачу поиска таких коэффициентов  $\tilde{a}(n)$ ,  $\tilde{b}(n)$ ,  $\tilde{c}(n)$  или  $\tilde{d}(n)$ , которые минимизируют максимум модуля ошибки  $E(e^{j\omega})$  в тех частотных полосах, где выполняется аппроксимация. Используя символ  $\|E(e^{j\omega})\|$  для обозначения минимальной ошибки [т. е. нормы  $E(e^{j\omega})$  в пространстве  $L_\infty$ ], задачу чебышевской аппроксимации математически можно сформулировать следующим образом:

$$\|E(e^{j\omega})\| = \min_{\text{(коэффициенты)}} [\max_{\omega \in A} |E(e^{j\omega})|], \quad (3.111)$$

где  $A$  — совокупность всех интересующих нас частотных полос.

Для получения решения уравнения (3.111) можно использовать хорошо известное свойство этого класса задач чебышевской

аппроксимации, описываемое следующей обобщенной теоремой Чебышева.

**Теорема.** Если  $P(e^{j\omega})$  представляет собой линейную комбинацию из  $r$  косинусных функций, т. е.

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos(\omega n),$$

то необходимое и достаточное условие того, что  $P(e^{j\omega})$  является единственной и наилучшей аппроксимацией со взвешиванием непрерывной функции  $\hat{D}(e^{j\omega})$  в компактной подобласти из области  $(0, \pi)$ , состоит в том, что взвешенная функция ошибки  $E(e^{j\omega})$  имеет по крайней мере  $(r+1)$  экстремальных частот в подобласти  $A$ , т. е. в этой подобласти должно существовать  $(r+1)$  точек  $\omega_i$ , таких, что  $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_r < \omega_{r+1}$  и  $E(e^{j\omega_i}) = -E(e^{j\omega_{i+1}})$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , и  $|E(e^{j\omega_i})| = \max_{\omega \in A} |E(e^{j\omega})|$ .

Сформулированная выше обобщенная теорема Чебышева чрезвычайно важна, поскольку дает необходимые и достаточные условия для получения решения, оптимального в чебышевском смысле. В настоящее время на основе той или иной интерпретации этой теоремы разработан ряд методов получения оптимального решения. В последующих разделах будет описано несколько методов оптимизации с тем, чтобы проследить за развитием этих методов и в то же время лучше понять природу оптимального фильтра. Прежде чем перейти к конкретным алгоритмам расчета оптимальных фильтров, рассмотрим сначала важный вопрос о максимальном числе экстремумов частотной характеристики КИХ-фильтра с линейной фазой.

### 3.27. Ограничение на число экстремумов частотной характеристики фильтра с линейной фазой

Согласно обобщенной теореме Чебышева, функция ошибки оптимального КИХ-фильтра с линейной фазой имеет не менее  $(r+1)$  экстремумов, где  $r$  — число косинусных функций, используемых при аппроксимации. Поскольку в большинстве интересующих нас случаев экстремумы функции  $H^*(e^{j\omega})$  являются также и экстремумами функции  $E(e^{j\omega})$  [т. е. обе производные  $dW(e^{j\omega})/d\omega$  и  $dD(e^{j\omega})/d\omega$  равны нулю, когда  $dH^*(e^{j\omega})/d\omega = 0$ ], важно знать максимальное число экстремумов  $H^*(e^{j\omega})$ . Добавив к этому числу количество экстремумов  $E(e^{j\omega})$ , которые не являются экстремумами  $H^*(e^{j\omega})$ , можно найти общее число экстремумов функции  $E(e^{j\omega})$ .

Итак, рассмотрим  $H^*(e^{j\omega})$  для фильтров вида 1:

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \tilde{a}(n) \cos(\omega n). \quad (3.112)$$

Чтобы найти максимальное число экстремумов  $H^*(e^{j\omega})$  на интервале  $0 \leq \omega \leq \pi$ , удобно представить выражение (3.112) в виде обычного полинома по степеням  $\cos \omega$ . Каждый член вида  $\cos(\omega n)$  может быть выражен как

$$\cos(\omega n) = \sum_{m=0}^n \alpha_{mn} (\cos \omega)^m, \quad (3.113)$$

где  $\alpha_{mn}$  — действительные коэффициенты, которые даны в обычных справочниках. Подставив выражение (3.113) в (3.112), получим

$$\begin{aligned} H^*(e^{j\omega}) &= \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \tilde{a}(n) \left[ \sum_{m=0}^n \alpha_{mn} (\cos \omega)^m \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{(N-1)/2} \bar{a}(n) (\cos \omega)^n. \end{aligned} \quad (3.114)$$

Здесь коэффициенты  $\{\bar{a}(n)\}$  учитывают все члены, содержащие  $(\cos \omega)^n$ . Чтобы найти точки экстремумов функции  $H^*(e^{j\omega})$ , продифференцируем ее:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} [H^*(e^{j\omega})] &= \sum_{n=0}^{(N-1)/2} n \bar{a}(n) (\cos \omega)^{n-1} (-\sin \omega) = \\ &= \sin \omega \sum_{m=0}^{(N-3)/2} \bar{b}(m) (\cos \omega)^m. \end{aligned} \quad (3.115)$$

Здесь коэффициенты  $\bar{b}(m) = -(m+1)\bar{a}(m+1)$ . Чтобы найти максимальное число экстремумов [т. е. значений  $\omega$ , при которых выражение (3.115) обращается в нуль], удобно преобразовать (3.115) в обычный полином по переменной  $x$ , воспользовавшись подстановкой  $x = \cos \omega$ . Результирующая функция  $G(x)$  будет равна

$$G(x) = \frac{d}{d\omega} [H^*(e^{j\omega})]_{\omega=\arccos x} = \sqrt{1-x^2} \sum_{m=0}^{(N-3)/2} \bar{b}(m) x^m, \quad (3.116)$$

т. е.  $G(x) = F_1(x) F_2(x)$ , где

$$F_1(x) = \sqrt{1-x^2}, \quad (3.117a)$$

$$F_2(x) = \sum_{m=0}^{(N-3)/2} \bar{b}(m) x^m. \quad (3.117b)$$

Ясно, что  $F_1(x) = 0$  только при  $x = +1$  (что соответствует  $\omega = 0$ ) и  $x = -1$  (что соответствует  $\omega = \pi$ ). Функция  $F_2(x)$  является полиномом степени  $(N-3)/2$ , следовательно, она может иметь самое большее  $(N-3)/2$  нулей в открытом интервале  $-1 < x < 1$ . Поэтому  $G(x)$  может иметь не более  $(N+1)/2$  нулей в закрытом интервале  $-1 \leq x \leq 1$ . Таким образом, для фильтра вида 1 с линейной фазой  $N_e$  число экстремумов  $H^*(e^{j\omega})$  удовлетворяет условию

$$\text{фильтр вида 1: } N_e \leq \frac{N+1}{2}. \quad (3.118a)$$

Чтобы не повторять аналогичные выкладки, сразу приведем результаты для фильтров вида 2, 3 и 4. Проверить их предоставим читателю. Число экстремумов  $H^*(e^{j\omega})$  для фильтров вида 2, 3 и 4 подчиняется следующим ограничениям:

$$\text{фильтр вида 2: } N_e \leq \frac{N}{2}, \quad (3.118б)$$

$$\text{фильтр вида 3: } N_e \leq \frac{N-1}{2}, \quad (3.118в)$$

$$\text{фильтр вида 4: } N_e \leq \frac{N}{2}. \quad (3.118г)$$

Неравенства (3.118) ограничивают лишь число экстремумов функции  $H^*(e^{j\omega})$ . Легко показать, что при решении задачи аппроксимации для совокупности разрозненных полос функция ошибки может иметь экстремумы на границах каждой полосы, тогда как функция  $H^*(e^{j\omega})$  в этих точках обычно не экстремальна. Исключением из этого правила является случай, когда границы полосы находятся при  $\omega = 0$  или  $\omega = \pi$ , где  $H^*(e^{j\omega})$  также часто имеет экстремум. Так, например, функция ошибки для фильтра нижних частот вида 1 (при решении задачи аппроксимации в двух полосах) может иметь самое большее  $(N+5)/2$  экстремумов, т. е.  $(N+1)/2$  экстремумов функции  $H^*(e^{j\omega})$  и два дополнительных экстремума на границах полос пропускания и непропускания. Функция ошибки для полосового фильтра вида 1 (при решении задачи аппроксимации в трех полосах) может иметь самое большее  $(N+9)/2$  экстремумов, т. е.  $(N+1)/2$  экстремумов  $H^*(e^{j\omega})$  и четыре дополнительных экстремума на границах полос пропускания и непропускания.

Важно знать заранее максимальное число экстремумов функции ошибки  $E(e^{j\omega})$ , поскольку эта величина определяет конкретный способ расчета оптимальных фильтров. Так, для расчета оптимальных фильтров с максимально возможным числом экстремумов пригодны лишь два хорошо известных метода. Ясно, что использование обоих этих методов расчета ограничено тем, что в соответствии с обобщенной теоремой Чебышева в общем случае фильтры, функции ошибки которых имеют максимальное число

экстремумов, относятся к частному случаю этой теоремы и, следовательно, представляют лишь подкласс более широкого класса оптимальных фильтров. В последующих разделах будут рассмотрены алгоритмы расчета различных оптимальных фильтров. С методической точки зрения целесообразно начать с описания двух алгоритмов, которые пригодны для расчета лишь подкласса оптимальных фильтров, т. е. фильтров, функции ошибки которых имеют максимально возможное число экстремумов. После этого будет рассмотрен алгоритм Ремеза и описано использование методов линейного программирования для расчета произвольного оптимального КИХ-фильтра с линейной фазой.

### 3.28. Решение нелинейных уравнений для КИХ-фильтров с максимумом пульсаций

В разд. 3.27 было показано, что число частот, на которых функция  $H^*(e^{j\omega})$  может иметь экстремумы, строго зависит от вида импульсной характеристики проектируемого фильтра с линейной фазой. Значение  $H^*(e^{j\omega})$  в каждом экстремуме определяется весовой функцией  $W(e^{j\omega})$ , заданной частотной характеристикой  $D(e^{j\omega})$  и величиной  $\delta$ , представляющей максимум ошибки аппроксимации. Распределив частоты экстремумов  $H^*(e^{j\omega})$  по частотным диапазонам, в которых решается задача аппроксимации, и потребовав, чтобы характеристика результирующего фильтра имела максимальное число экстремальных частот, можно получить единственный оптимальный фильтр. Поскольку функция ошибки аппроксимации фильтров этого типа имеет максимальное число колебаний, или пульсаций, эти фильтры получили название фильтров с максимумом пульсаций. Фильтры нижних частот этого типа называются также фильтрами с дополнительной пульсацией, поскольку они имеют только на одну пульсацию больше минимального числа пульсаций, обеспечивающего оптимальность.

Метод получения системы нелинейных уравнений, описывающих фильтр с максимумом пульсаций, состоит в следующем (он был первоначально предложен Херманом и Шуслером). На каждой из  $N_e$  неизвестных экстремальных частот ошибка  $E(e^{j\omega})$  достигает максимального значения, равного  $\pm \delta$ , причем производная от  $E(e^{j\omega})$ , или, что то же самое, от  $H^*(e^{j\omega})$ , равна нулю. Таким образом, получаем  $N_e$  уравнений вида

$$H^*(e^{j\omega_i}) = \frac{\pm \delta}{W(e^{j\omega_i})} + D(e^{j\omega_i}), \quad i = 1, 2, \dots, N_e,$$

$$\frac{d}{d\omega} [H^*(e^{j\omega})] |_{\omega=\omega_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_e.$$

Эти уравнения образуют систему из  $2N_e$  нелинейных уравнений с  $2N_e$  неизвестными [включающими  $N_e$  коэффициентов импульсной характеристики и  $N_e$  частот, на которых  $H^*(e^{j\omega})$  имеет экст-