

Ясно, что $F_1(x) = 0$ только при $x = +1$ (что соответствует $\omega = 0$) и $x = -1$ (что соответствует $\omega = \pi$). Функция $F_2(x)$ является полиномом степени $(N-3)/2$, следовательно, она может иметь самое большее $(N-3)/2$ нулей в открытом интервале $-1 < x < 1$. Поэтому $G(x)$ может иметь не более $(N+1)/2$ нулей в закрытом интервале $-1 \leq x \leq 1$. Таким образом, для фильтра вида 1 с линейной фазой N_e число экстремумов $H^*(e^{j\omega})$ удовлетворяет условию

$$\text{фильтр вида 1: } N_e \leq \frac{N+1}{2}. \quad (3.118a)$$

Чтобы не повторять аналогичные выкладки, сразу приведем результаты для фильтров вида 2, 3 и 4. Проверить их предоставим читателю. Число экстремумов $H^*(e^{j\omega})$ для фильтров вида 2, 3 и 4 подчиняется следующим ограничениям:

$$\text{фильтр вида 2: } N_e \leq \frac{N}{2}, \quad (3.118б)$$

$$\text{фильтр вида 3: } N_e \leq \frac{N-1}{2}, \quad (3.118в)$$

$$\text{фильтр вида 4: } N_e \leq \frac{N}{2}. \quad (3.118г)$$

Неравенства (3.118) ограничивают лишь число экстремумов функции $H^*(e^{j\omega})$. Легко показать, что при решении задачи аппроксимации для совокупности разрозненных полос функция ошибки может иметь экстремумы на границах каждой полосы, тогда как функция $H^*(e^{j\omega})$ в этих точках обычно не экстремальна. Исключением из этого правила является случай, когда границы полосы находятся при $\omega = 0$ или $\omega = \pi$, где $H^*(e^{j\omega})$ также часто имеет экстремум. Так, например, функция ошибки для фильтра нижних частот вида 1 (при решении задачи аппроксимации в двух полосах) может иметь самое большее $(N+5)/2$ экстремумов, т. е. $(N+1)/2$ экстремумов функции $H^*(e^{j\omega})$ и два дополнительных экстремума на границах полос пропускания и непропускания. Функция ошибки для полосового фильтра вида 1 (при решении задачи аппроксимации в трех полосах) может иметь самое большее $(N+9)/2$ экстремумов, т. е. $(N+1)/2$ экстремумов $H^*(e^{j\omega})$ и четыре дополнительных экстремума на границах полос пропускания и непропускания.

Важно знать заранее максимальное число экстремумов функции ошибки $E(e^{j\omega})$, поскольку эта величина определяет конкретный способ расчета оптимальных фильтров. Так, для расчета оптимальных фильтров с максимально возможным числом экстремумов пригодны лишь два хорошо известных метода. Ясно, что использование обоих этих методов расчета ограничено тем, что в соответствии с обобщенной теоремой Чебышева в общем случае фильтры, функции ошибки которых имеют максимальное число

экстремумов, относятся к частному случаю этой теоремы и, следовательно, представляют лишь подкласс более широкого класса оптимальных фильтров. В последующих разделах будут рассмотрены алгоритмы расчета различных оптимальных фильтров. С методической точки зрения целесообразно начать с описания двух алгоритмов, которые пригодны для расчета лишь подкласса оптимальных фильтров, т. е. фильтров, функции ошибки которых имеют максимально возможное число экстремумов. После этого будет рассмотрен алгоритм Ремеза и описано использование методов линейного программирования для расчета произвольного оптимального КИХ-фильтра с линейной фазой.

3.28. Решение нелинейных уравнений для КИХ-фильтров с максимумом пульсаций

В разд. 3.27 было показано, что число частот, на которых функция $H^*(e^{j\omega})$ может иметь экстремумы, строго зависит от вида импульсной характеристики проектируемого фильтра с линейной фазой. Значение $H^*(e^{j\omega})$ в каждом экстремуме определяется весовой функцией $W(e^{j\omega})$, заданной частотной характеристикой $D(e^{j\omega})$ и величиной δ , представляющей максимум ошибки аппроксимации. Распределив частоты экстремумов $H^*(e^{j\omega})$ по частотным диапазонам, в которых решается задача аппроксимации, и потребовав, чтобы характеристика результирующего фильтра имела максимальное число экстремальных частот, можно получить единственный оптимальный фильтр. Поскольку функция ошибки аппроксимации фильтров этого типа имеет максимальное число колебаний, или пульсаций, эти фильтры получили название фильтров с максимумом пульсаций. Фильтры нижних частот этого типа называются также фильтрами с дополнительной пульсацией, поскольку они имеют только на одну пульсацию больше минимального числа пульсаций, обеспечивающего оптимальность.

Метод получения системы нелинейных уравнений, описывающих фильтр с максимумом пульсаций, состоит в следующем (он был первоначально предложен Херманом и Шуслером). На каждой из N_e неизвестных экстремальных частот ошибка $E(e^{j\omega})$ достигает максимального значения, равного $\pm \delta$, причем производная от $E(e^{j\omega})$, или, что то же самое, от $H^*(e^{j\omega})$, равна нулю. Таким образом, получаем N_e уравнений вида

$$H^*(e^{j\omega_i}) = \frac{\pm \delta}{W(e^{j\omega_i})} + D(e^{j\omega_i}), \quad i = 1, 2, \dots, N_e,$$

$$\frac{d}{d\omega} [H^*(e^{j\omega})] |_{\omega=\omega_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N_e.$$

Эти уравнения образуют систему из $2N_e$ нелинейных уравнений с $2N_e$ неизвестными [включающими N_e коэффициентов импульсной характеристики и N_e частот, на которых $H^*(e^{j\omega})$ имеет экст-

ремы]. Систему из $2N_e$ уравнений можно решить методом последовательных приближений, используя процедуру нелинейной оптимизации, такую, как, например, хорошо известный алгоритм Флетчера—Пауэлла.

Относительно этой процедуры следует сделать два замечания. Во-первых, величина δ (т. е. максимум ошибки) имеет фиксированное значение и не минимизируется при оптимизации фильтра. Таким образом, форма $H^*(e^{j\omega})$ задана заранее, и лишь частоты, на которых $H^*(e^{j\omega})$ достигает экстремальных значений, неизвестны. Во-вторых, в процедуре оптимизации не учитываются границы различных полос фильтра. Таким образом, алгоритм оптимизации не работает в определенных диапазонах частот, так что не требуется точно указывать, где именно будут располагаться полосы фильтра. Это отсутствие возможности регулирования границ полос ограничивает область применения обсуждаемого и описываемого ниже алгоритмов.

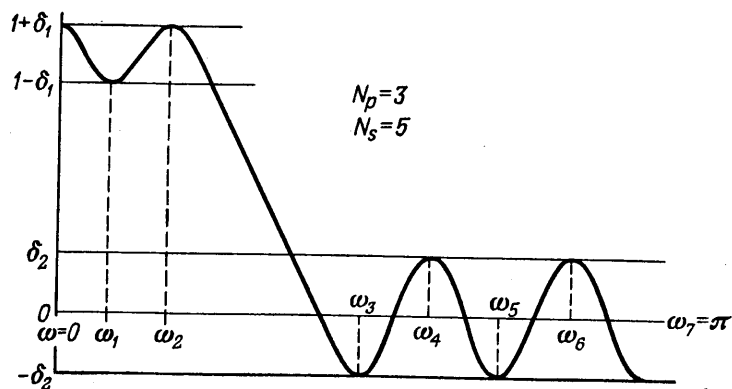
Для иллюстрации использования системы уравнений при оптимизации рассмотрим пример расчета фильтра вида 1 нижних частот с $N = 15$, максимумом пульсаций $\delta_1 = \delta_2$ и при условии, что используется весовая функция

$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \delta_2/\delta_1, & \omega \text{ — в полосе пропускания,} \\ 1, & \omega \text{ — в полосе непропускания.} \end{cases}$$

Заданная частотная характеристика равна

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \omega \text{ — в полосе пропускания,} \\ 0, & \omega \text{ — в полосе непропускания.} \end{cases}$$

На фиг. 3.40 показана функция $H^*(e^{j\omega})$ для этого примера. Экстремальными являются частоты $\omega = 0, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6$



Фиг. 3.40. Начальные условия при расчете фильтра нижних частот с максимумом пульсаций.

и $\omega_7 = \pi$. При $\omega = 0$ и $\omega = \pi$ для фильтров вида 1 производная от $H^*(e^{j\omega})$ равна нулю при любых значениях коэффициентов импульсной характеристики. В данном примере число экстремальных частот $N_e = 8$, из них $N_p = 3$ лежат в полосе пропускания и $N_s = 5$ — в полосе непропускания. Таким образом, для заданных условий получаем следующую систему уравнений:

Ограничения на функцию

$$H^*(e^{j0}) = 1 + \delta_1$$

$$H^*(e^{j\omega_1}) = 1 - \delta_1$$

$$H^*(e^{j\omega_2}) = 1 + \delta_1$$

$$H^*(e^{j\omega_3}) = -\delta_2$$

$$H^*(e^{j\omega_4}) = +\delta_2$$

$$H^*(e^{j\omega_5}) = -\delta_2$$

$$H^*(e^{j\omega_6}) = +\delta_2$$

$$H^*(e^{j\pi}) = -\delta_2$$

Ограничения на производную

$$\frac{d}{d\omega} H^*(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_1} = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} H^*(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_2} = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} H^*(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_3} = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} H^*(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_4} = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} H^*(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_5} = 0$$

$$\frac{d}{d\omega} H^*(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=\omega_6} = 0$$

Определив из этой системы уравнений значения неизвестных частот и коэффициентов импульсной характеристики, можно найти границы полос пропускания и непропускания, вычисляя частоту выше ω_2 , на которой $H^*(e^{j\omega})$ в точности равна $1 - \delta_1$ (граница полосы пропускания), и частоту ниже ω_3 , на которой $H^*(e^{j\omega})$ равна точно $+\delta_2$ (граница полосы непропускания).

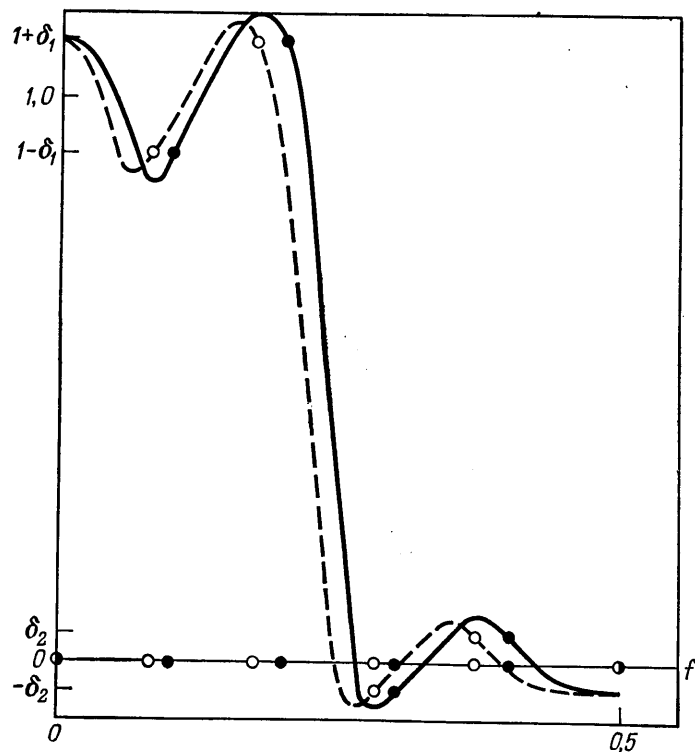
Описанная процедура оптимизации была использована для расчета фильтров нижних частот и полосовых фильтров со значениями N вплоть до 61. В разд. 3.29 рассматривается другой метод проектирования фильтров с максимумом пульсаций, который позволяет эффективно рассчитывать фильтры со значительно более длинными импульсными характеристиками.

3.29. Расчет КИХ-фильтров с максимумом пульсаций на основе полиномиальной интерполяции

Второй, более эффективный метод проектирования фильтров с максимумом пульсаций был предложен Хофштеттером, Опенгеймом и Зигелем. Он основан на вычислении последовательных приближений полинома $[H^*(e^{j\omega})]$, имеющего экстремумы заданной величины. Расчет начинается с задания исходных значений экстремальных частот функции $H^*(e^{j\omega})$. После этого

используется хорошо известная интерполяционная формула Лагранжа для полинома, который на выбранных частотах имел бы чередующиеся максимумы и минимумы и обладал бы пульсацией максимально допустимого уровня. Экспериментально показано, что исходные значения экстремальных частот не влияют на окончательную сходимость алгоритма, но определяют число итераций, требуемых для получения окончательного решения.

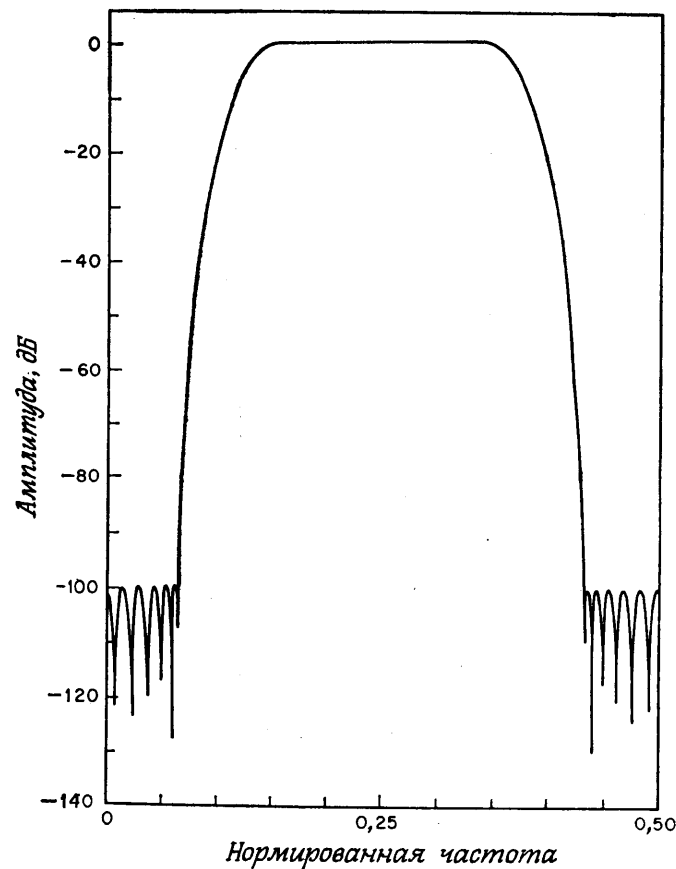
Рассмотрим в качестве примера расчет фильтра вида 1 нижних частот. На фиг. 3.41 изображена частотная характеристика фильтра нижних частот с $N = 11$ и максимумом пульсаций $\delta = \delta_2$. Весовая функция $W(e^{j\omega})$ и заданная частотная характеристика $D(e^{j\omega})$ — такие же, как в примере из разд. 3.28. Число экстремальных частот N_e равно шести. Из них $N_p = 3$ частот находится в полосе пропускания, а $N_s = 3$ — в полосе непропускания. Зачервленными точками на частотной оси фиг. 3.41 отмечены ис-



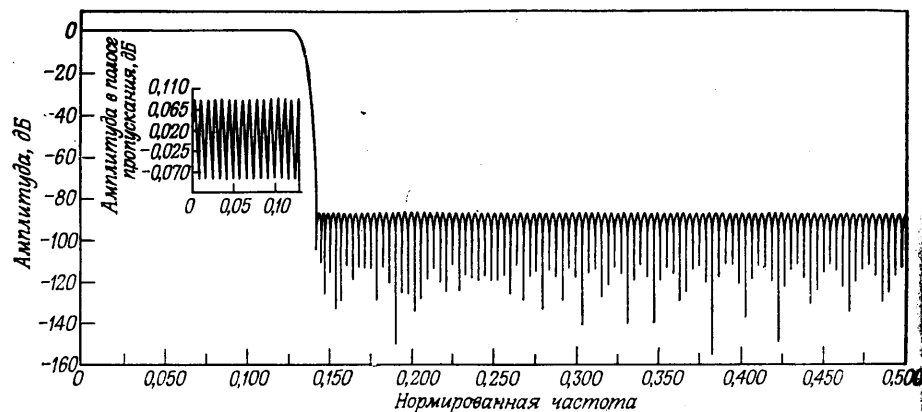
Фиг. 3.41. Итеративный расчет фильтра нижних частот с максимумом пульсаций (по Хофштеттеру, Оппенгейму и Зигелю).

● начальные значения f ; ○ второй ряд значений частот f ; — исходный полином Лагранжа; - - - второй полином Лагранжа.

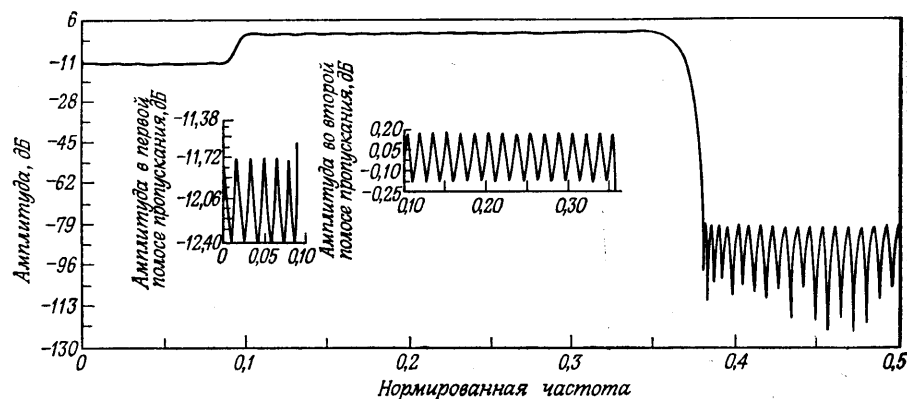
ходные значения экстремальных частот $H^*(e^{j\omega})$. Сплошной линией изображен исходный полином Лагранжа, полученный таким подбором коэффициентов, чтобы значения полинома на исходных экстремальных частотах совпадали с заданными значениями экстремумов. Как видно из фиг. 3.41, пульсации полученного полинома превосходят заданный уровень. Следующий шаг состоит в том, чтобы найти частоты, на которых первый интерполяционный полином Лагранжа имеет экстремумы. Эти частоты, изображенные на фиг. 3.41 кружками, являются гораздо лучшим приближением к частотам, на которых экстремумы частотной характеристики достигнут заданного уровня. Новый набор экстремальных частот используется для построения другого полинома Лагранжа (он показан на фиг. 3.41 пунктирной линией), имею-



Фиг. 3.42. Частотная характеристика полосового фильтра с максимумом пульсаций (по Хофштеттеру, Оппенгейму и Зигелю).



Фиг. 3.43. Частотная характеристика фильтра нижних частот с максимумом пульсаций (по Хофштеттеру, Опенгейму и Зигелю).



Фиг. 3.44. Частотная характеристика многополосного фильтра с максимумом пульсаций (по Хофштеттеру, Опенгейму и Зигелю).

щего заданные значения на этих частотах. Ясно, что алгоритм имеет итеративный характер. После определения частот экстремумов нового полинома переходят к следующей итерации. Этот алгоритм сильно напоминает хорошо известный алгоритм многократной замены Ремеза в чебышевской теории аппроксимации.

Характеристики нескольких типичных фильтров с максимумом пульсаций, рассчитанных Хофштеттером с соавторами с использованием рассматриваемого алгоритма, показаны на фиг. 3.42—3.44. На фиг. 3.42 изображена частотная характеристика в логарифмическом масштабе полосового фильтра вида 1

с $N = 41$ (т. е. с $N_e = 21$), с 6 экстремумами $H^*(e^{j\omega})$ в каждой из полос непропускания и с 9 экстремумами в полосе пропускания. Максимум пульсаций в полосах непропускания $\delta_2 = 0,00001$ (или -100 дБ), тогда как в полосе пропускания он равен $0,005$. На фиг. 3.43 изображена частотная характеристика фильтра нижних частот вида 1 с $N = 251$, 33 экстремумами $H^*(e^{j\omega})$ в полосе пропускания и 94 экстремумами в полосе непропускания. Максимум пульсаций в полосе пропускания $\delta_1 = 0,01$, а в полосе непропускания $\delta_2 = 0,00004$ (или -88 дБ). Наконец, на фиг. 3.44 приведена частотная характеристика модифицированного фильтра нижних частот вида 1 с двумя различными полосами пропускания и одной полосой непропускания. Для этого фильтра $N = 121$, а экстремумы распределены следующим образом: 12 — в первой полосе пропускания, 31 — во второй и 18 — в полосе непропускания. Заданный уровень частотной характеристики в первой полосе пропускания равен $0,25$, а во второй, как обычно, он равен 1. Максимумы ошибок в первой и во второй полосах пропускания равны $\delta_{11} = 0,01$ и $\delta_{12} = 0,02$. Максимум ошибки в полосе непропускания $\delta_2 = 0,0001$.

Несмотря на то что этот улучшенный алгоритм существенно расширяет возможности проектирования фильтров с большими N , ему все же присущ недостаток, связанный с тем, что нельзя заранее задать граничные частоты полос фильтра; они вычисляются на основе окончательного решения. Более того, и данный, и описанный выше методы позволяют рассчитывать лишь фильтры с максимумом пульсаций, которые, как обсуждалось выше, являются лишь подклассом класса оптимальных фильтров. В следующих разделах будут рассмотрены методы проектирования произвольных оптимальных (в минимаксном смысле) фильтров.

3.30. Использование алгоритма замены Ремеза для расчета оптимальных фильтров

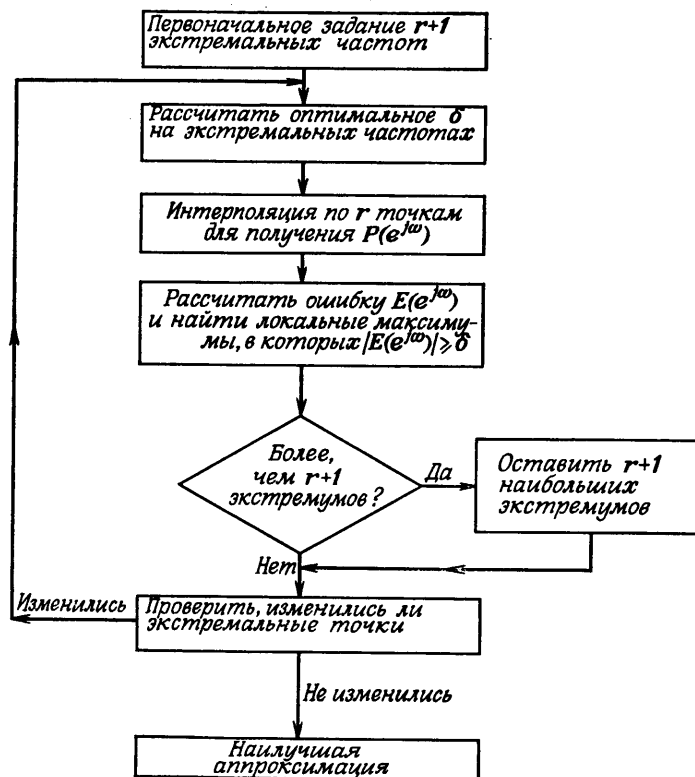
Выше было показано, что задачу проектирования оптимального КИХ-фильтра с линейной фазой можно сформулировать как задачу чебышевской аппроксимации, причем аппроксимирующая функция $[P(e^{j\omega})$ в формуле (3.110)] является суммой r независимых косинусоидальных функций. Необходимые и достаточные условия того, что взвешенная функция ошибки $E(e^{j\omega})$ вида (3.110) обеспечивает единственное решение с наилучшей аппроксимацией заданной частотной характеристики $\hat{D}(e^{j\omega})$, сформулированы в обобщенной теореме Чебышева.

В общем виде процедура проектирования оптимального фильтра, основанная на обобщенной теореме Чебышева, включает следующие этапы:

1. Задание частотной характеристики $D(e^{j\omega})$, весовой функции $W(e^{j\omega})$ и длины импульсной характеристики фильтра N .
2. Формулировка соответствующей эквивалентной задачи аппроксимации, т. е. задание $\hat{D}(e^{j\omega})$, $\hat{W}(e^{j\omega})$ и $P(e^{j\omega})$.
3. Решение задачи аппроксимации с использованием алгоритма многократной замены Ремеза.
4. Расчет импульсной характеристики фильтра.

На этапе 1 разработчик имеет возможность влиять на алгоритм проектирования фильтра, задавая тип фильтра и начальные условия. Этап 2, а именно формулировка соответствующей эквивалентной задачи аппроксимации, уже обсуждался в разд. 3.26.

На фиг. 3.45 изображена блок-схема использования алгоритма замены Ремеза для решения задачи аппроксимации, т. е. для выполнения этапа 3. Для нахождения в соответствии с обобщенной теоремой Чебышева $r+1$ экстремальных частот используется



Фиг. 3.45. Блок-схема алгоритма Ремеза (взята у Паркса и Макклеллана).

густая сетка точек на оси частот. Сначала выбираются $r+1$ исходных экстремальных частот, на которых функция ошибки должна принимать значения δ с меняющимся знаком. С точки зрения исходной формулировки задачи последнее требование означает, что для выбранной совокупности экстремальных частот $\{\omega_k\}$, $k=0, 1, \dots, r$, необходимо решить следующую систему уравнений вида:

$$\hat{W}(e^{j\omega_k}) [\hat{D}(e^{j\omega_k}) - P(e^{j\omega_k})] = (-1)^k \delta, \quad k=0, 1, \dots, r, \quad (3.119)$$

или в матричной форме (в предположении, что $P(e^{j\omega}) =$

$$= \sum_{n=0}^{r-1} \alpha(n) \cos \omega n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \omega_0 & \cos 2\omega_0 & \dots & \cos [(r-1)\omega_0] \\ 1 & \cos \omega_1 & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 1 & \cos \omega_r & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{W}(e^{j\omega_0})} \\ \vdots \\ \frac{(-1)^r}{\hat{W}(e^{j\omega_r})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha(0) \\ \alpha(1) \\ \vdots \\ \alpha(r-1) \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{D}(e^{j\omega_0}) \\ \hat{D}(e^{j\omega_1}) \\ \vdots \\ \hat{D}(e^{j\omega_r}) \end{bmatrix}. \quad (3.120)$$

Непосредственное решение системы (3.120) — довольно сложный и длительный процесс; гораздо проще найти δ аналитически:

$$\delta = \frac{a_0 \hat{D}(e^{j\omega_0}) + a_1 \hat{D}(e^{j\omega_1}) + \dots + a_r \hat{D}(e^{j\omega_r})}{a_0 / \hat{W}(e^{j\omega_0}) - a_1 / \hat{W}(e^{j\omega_1}) + \dots + (-1)^r a_r / \hat{W}(e^{j\omega_r})}, \quad (3.121)$$

где

$$a_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^r \frac{1}{(x_k - x_i)} \quad (3.122)$$

и

$$x_i = \cos \omega_i. \quad (3.123)$$

После вычисления δ для интерполяции $P(e^{j\omega})$ по ее значениям в r точках $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{r-1}$, равным

$$C_k = \hat{D}(e^{j\omega_k}) - (-1)^k \frac{\delta}{\hat{W}(e^{j\omega_k})}, \quad k=0, 1, \dots, r-1, \quad (3.124)$$

используется интерполяционная формула Лагранжа в барицентрической форме:

$$P(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{\beta_k}{x - x_k} \right) C_k}{\sum_{k=0}^{r-1} \left(\frac{\beta_k}{x - x_k} \right)}, \quad (3.125)$$

где

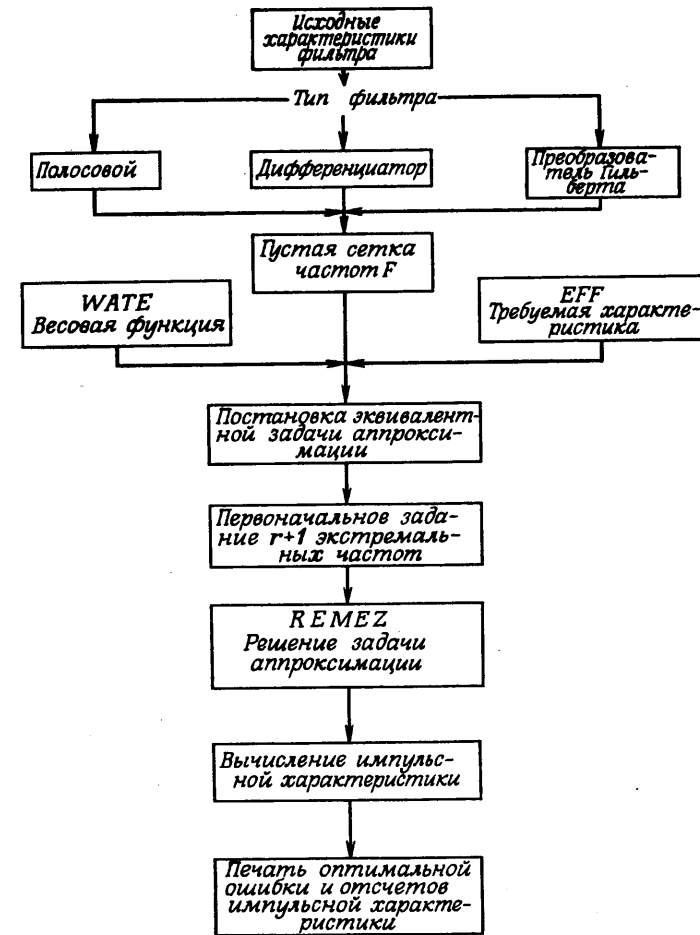
$$\beta_k = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{r-1} \frac{1}{(x_k - x_i)} \quad (3.126)$$

и $x = \cos \omega$.

Заметим, что функция $P(e^{j\omega})$ будет также интерполироваться до значения $\hat{D}(e^{j\omega_r}) - [(-1)^r \delta / \hat{W}(e^{j\omega_r})]$, так как она удовлетворяет уравнению (3.119). На следующем этапе вычисляется $E(e^{j\omega})$ на густой сетке частот. Если $|E(e^{j\omega})| \leq \delta$ для всех частот этой густой сетки, то получена оптимальная аппроксимация. Если же $|E(e^{j\omega})| > \delta$ для некоторых частот этой густой сетки, то необходимо выбрать новую совокупность $(r+1)$ экстремальных частот. Новые частоты выбираются в точках экстремумов полученной кривой ошибки, в результате чего δ будет увеличиваться и в конечном счете сойдется к ее верхней границе, что соответствует решению задачи. В случае если на какой-либо итерации окажется более чем $(r+1)$ экстремумов функции $E(e^{j\omega})$, для следующей итерации в качестве экстремальных используются те $(r+1)$ частот, на которых модуль ошибки $|E(e^{j\omega})|$ был наибольшим.

Этап 4 проектирования оптимальных фильтров, заключающийся в расчете импульсной характеристики, сводится к вычислению отсчетов $P(e^{j\omega})$ на 2^M равноотстоящих частотах (где $2^M \gg N$) и использованию ДПФ для получения последовательности $\{\alpha(n)\}$, из которой можно затем найти коэффициенты импульсной характеристики. Каждому из четырех видов фильтров с линейной фазой соответствует своя формула, однозначно связывающая $h(n)$ с $\alpha(n)$.

С учетом вышесказанного была составлена общая программа расчета КИХ-фильтров с линейной фазой (она приведена в приложении в конце настоящей главы). На фиг. 3.46 представлена блок-схема этой программы. Она имеет вводную часть (соответствующую этапу 1 проектирования), предназначенную для расчета разнообразных многополосных фильтров, включая фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные, а также дифференциаторы и преобразователи Гильберта. Перечислим возможности и ограничения приведенной в приложении программы:



Фиг. 3.46. Блок-схема алгоритма расчета фильтров.

1. Длина импульсной характеристики фильтра (метка NFILT) ограничена пределами $3 \leq \text{NFILT} \leq 256$.
2. Типы фильтров (метка JTYPE):
 - а) многополосный полосовой или режекторный фильтр (JTYPE = 1);
 - б) дифференциатор (JTYPE = 2);
 - в) преобразователь Гильберта (JTYPE = 3).
3. Число полос, задаваемых верхней и нижней частотами среза, не превышает 10.

4. Частотная характеристика в каждой из полос задается независимо.

5. Весовая функция в каждой из полос также задается независимо.

Сетка частот F , используемая в алгоритме, иллюстрированном на фиг. 3.46, представляет густую сетку частот в каждой из полос, где выполняется аппроксимация. С помощью подпрограмм WATE и EFF по заданным характеристикам автоматически производится вычисление весовой функции и частотной характеристики. Подпрограмма REMEZ работает в точности так, как было описано в данном разделе. Чтобы помочь разработчику освоить приведенную программу, в приложении даны примеры расчета по этой программе нескольких различных фильтров.

Прежде чем перейти к обсуждению свойств некоторых классов оптимальных фильтров, в разд. 3.31 будет показано, каким образом для расчета оптимальных КИХ-фильтров с линейной фазой можно использовать также методы линейного программирования.

3.31. Расчет оптимальных КИХ-фильтров методами линейного программирования

В оптимальном КИХ-фильтре с линейной фазой максимум ошибки аппроксимации $E(e^{j\omega})$ минимизируется на всех частотах ω . Обозначив максимальную ошибку через δ , можно записать систему линейных неравенств, описывающих эту минимаксную задачу:

$$-\delta \leq \hat{W}(e^{j\omega_i}) [\hat{D}(e^{j\omega_i}) - P(e^{j\omega_i})] \leq \delta, \quad \omega_i \in F. \quad (3.127)$$

Здесь F — густая сетка частот в полосах, где выполняется аппроксимация. Поскольку $P(e^{j\omega})$ является линейной комбинацией r косинусоидальных функций, неравенства (3.127) можно формально записать в виде задачи линейного программирования: минимизировать δ при условиях

$$\left. \begin{aligned} -\hat{W}(e^{j\omega_i}) \sum_{m=0}^{r-1} \alpha(m) \cos(m\omega_i) - \delta &\leq -\hat{W}(e^{j\omega_i}) \hat{D}(e^{j\omega_i}), \\ \hat{W}(e^{j\omega_i}) \sum_{m=0}^{r-1} \alpha(m) \cos(m\omega_i) - \delta &\leq \hat{W}(e^{j\omega_i}) \hat{D}(e^{j\omega_i}), \end{aligned} \right\} \omega_i \in F.$$

Для решения этой системы неравенств можно использовать методы линейного программирования. Но так как метод линейного программирования весьма близок к методу однократной замены и в то же время значительно более громоздок по сравнению с методом Ремеза (который является методом многократной замены),

то для рассматриваемого класса задач он почти не используется. С другой стороны, в разд. 3.39 будет показано, что в случаях, когда приходится учитывать ограничения и во временной области, именно линейное программирование может оказаться единственным простым методом решения задачи проектирования.

3.32. Характеристики оптимальных фильтров нижних частот вида 1

При проектировании оптимального фильтра нижних частот необходимо задать величину N , частоту среза полосы пропускания F_p , частоту среза полосы непропускания F_s и отношение уровней пульсаций $K = \delta_1/\delta_2$, описывающее заданную весовую функцию

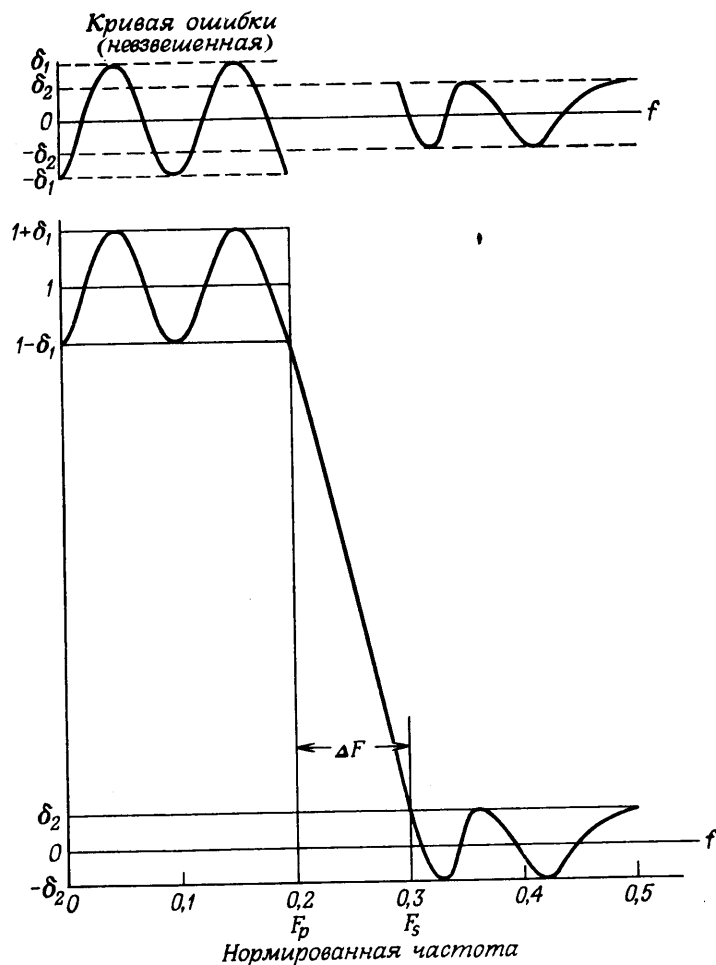
$$W(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{1}{K} = \frac{\delta_2}{\delta_1}, & 0 \leq \omega \leq 2\pi F_p, \\ 1, & 2\pi F_s \leq \omega \leq \pi. \end{cases} \quad (3.128)$$

Здесь δ_1 и δ_2 — амплитуды пульсаций в полосе пропускания и непропускания соответственно. На фиг. 3.47 показана частотная характеристика фильтра нижних частот вида 1. Вспомогательный параметр ΔF задается формулой

$$\Delta F = F_s - F_p \quad (3.129)$$

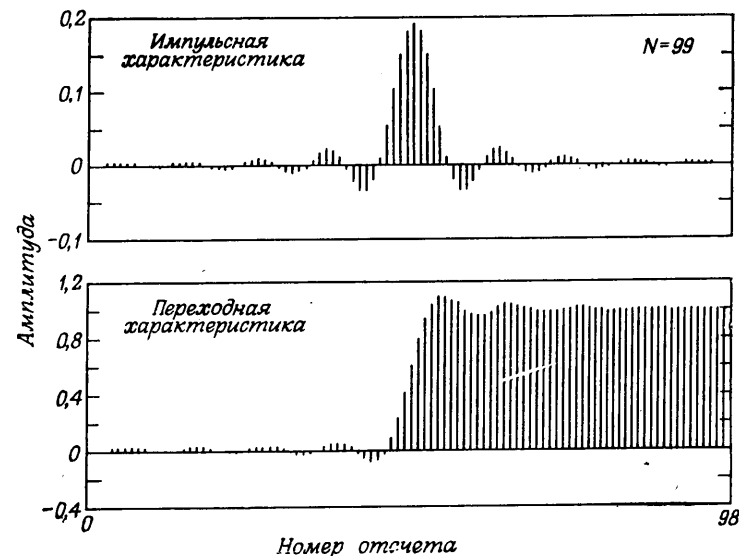
и служит мерой ширины переходной полосы фильтра. На фиг. 3.48 и 3.49 изображены временные и частотная характеристики фильтра нижних частот вида 1 с $N = 99$, $F_p = 0,0808$, $F_s = 0,1111$ и $K = 1,0$. Результирующие значения δ_1 и δ_2 равны 0,001724 в обеих полосах.

Ранее было показано, что кривая ошибки оптимального фильтра нижних частот может иметь либо $r + 1$, либо $r + 2$ экстремумов, где $r = (N + 1)/2$ для фильтра вида 1 и $r = N/2$ для фильтра вида 2. Чтобы выяснить, при каких условиях число экстремумов оптимального фильтра достигает максимума, важно понять сущность этого фильтра. Экспериментально установлено, что достаточно простым и информативным способом описания поведения оптимального фильтра является график зависимости ширины переходной полосы фильтра ΔF от частоты среза полосы пропускания F_p при фиксированных значениях N , δ_1 и δ_2 . Подобный график для фильтра вида 1 с $N = 11$ и $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$ изображен на фиг. 3.50. Видно, что кривая зависимости ΔF от F_p имеет колебательный характер с чередующимися острыми минимумами и пологими максимумами. Оказалось, что минимумы кривой (с метками от ER1 до ER5) соответствуют фильтрам с максимумом

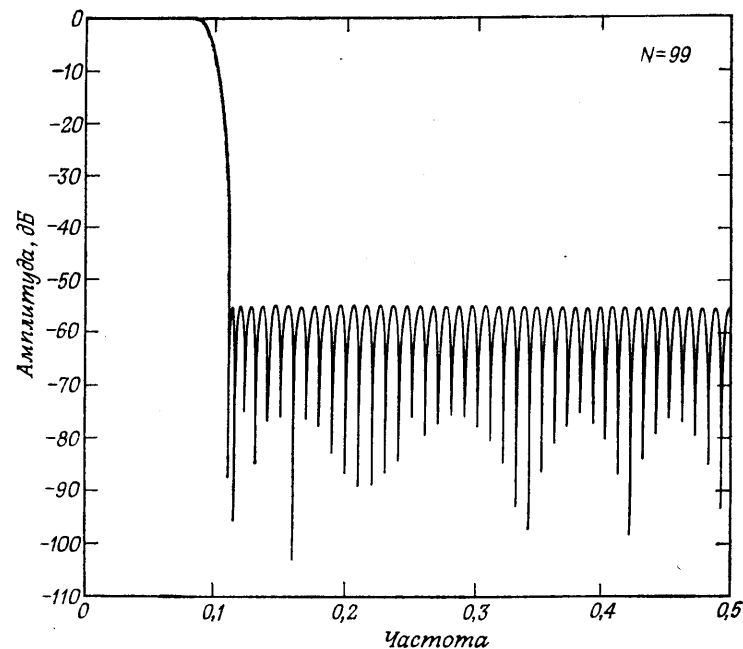


Фиг. 3.47. Частотная характеристика оптимального фильтра нижних частот с минимаксной ошибкой.

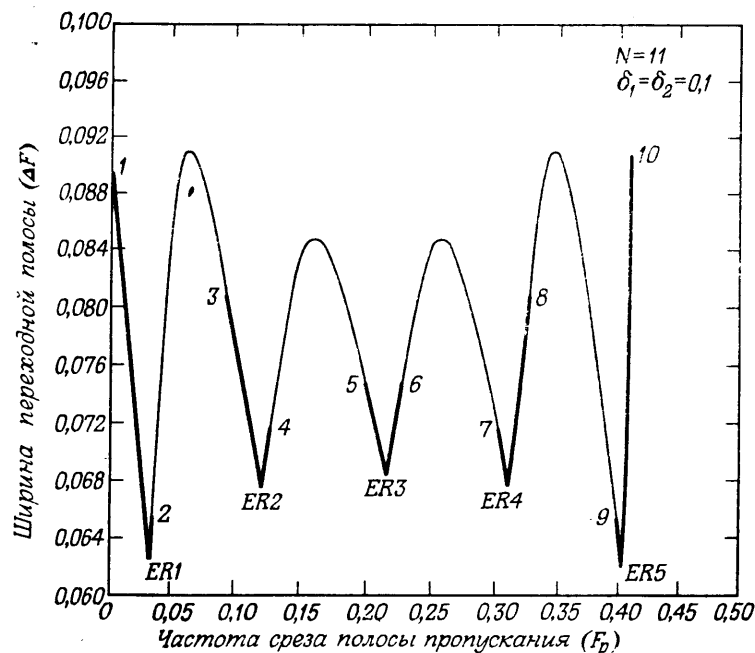
пульсаций (с дополнительной пульсацией) при заданных N , δ_1 и δ_2 . Напомним, что кривые ошибок фильтров с дополнительной пульсацией имеют $(N + 5)/2$ экстремумов равной амплитуды. Для фиксированных значений δ_1 и δ_2 существует ровно $(N - 1)/2$ таких фильтров с дополнительной пульсацией. Оказалось, что в промежутках между решениями, соответствующими дополнительной пульсации, существуют решения, соответствующие оптимальным фильтрам двух типов: масштабируемым фильтрам



Фиг. 3.48. Импульсная и переходная характеристики фильтра нижних частот с минимаксной ошибкой.



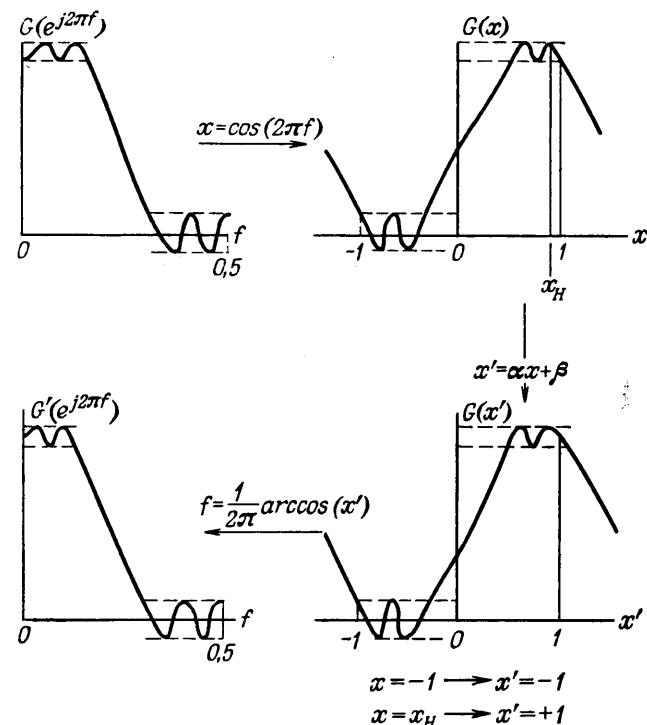
Фиг. 3.49. Частотная характеристика оптимального фильтра нижних частот с минимаксной ошибкой.



Фиг. 3.50. Зависимость ширины переходной полосы оптимального фильтра нижних частот от частоты среза полосы пропускания.

с дополнительной пульсацией и фильтрам, кривые ошибок которых имеют точно $(N + 3)/2$ экстремумов равной амплитуды.

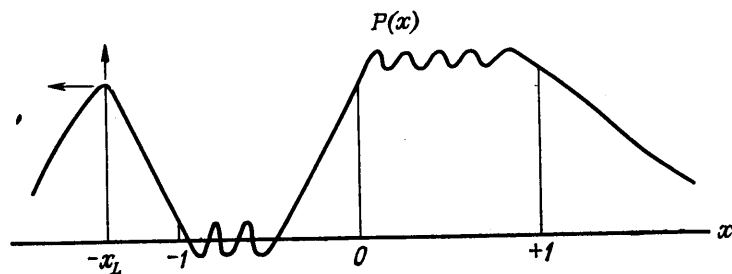
Кривые ошибок масштабируемых фильтров с дополнительной пульсацией (им соответствуют жирные линии на фиг. 3.50) имеют $(N + 3)/2$ экстремумов равной амплитуды, а также один экстремум меньшей амплитуды при $f = 0$ или $f = 0,5$. Эти фильтры можно получить из смежного фильтра с дополнительной пульсацией с помощью простого масштабирования, иллюстрируемого фиг. 3.51. Наверху слева показана частотная характеристика фильтра с дополнительной пульсацией, кривая ошибки которого имеет $(N + 5)/2$ экстремумов. Частотная характеристика имеет вид тригонометрического полинома в функции частоты f . Применяя преобразование $x = \cos(2\pi f)$, получим частотную характеристику в виде обычного полинома по x , показанную на фиг. 3.51 наверху справа. Далее можно использовать простое изменение масштаба x типа $x' = \alpha x + \beta$, при котором точка $x = -1$ отображается в точку $x' = -1$, а $x = x_H$ отображается в точку $x' = 1$. Выбираемое значение x_H лежит между $+1$ и предшествующим экстремумом. При этом результирующий по-



Фиг. 3.51. Операция масштабирования для оптимальных фильтров нижних частот.

лином по x' (см. кривую на фиг. 3.51 справа внизу) имеет $(N + 3)/2$ экстремумов равной амплитуды, тогда как при $x' = 1$ величина ошибки будет меньше, чем в других экстремумах. Применяя обратное преобразование $f = \arccos x'/2\pi$, получим частотную характеристику (см. на фиг. 3.51 слева внизу), соответствующую масштабируемому фильтру с дополнительной пульсацией, который имеет $(N + 3)/2$ экстремумов равной амплитуды и меньший экстремум при $f = 0$. Поскольку оптимальный фильтр должен иметь не менее $(N + 3)/2$ экстремумов равной амплитуды, масштабирование можно использовать только до тех пор, пока предпоследний масштабируемый экстремум не окажется в точке $x' = 1$. Масштабирование за этим пределом приводит к неоптимальному фильтру.

Кривые ошибок всех оптимальных фильтров, для которых решения располагаются между решениями для масштабируемых фильтров с дополнительной пульсацией, имеют точно $(N + 3)/2$

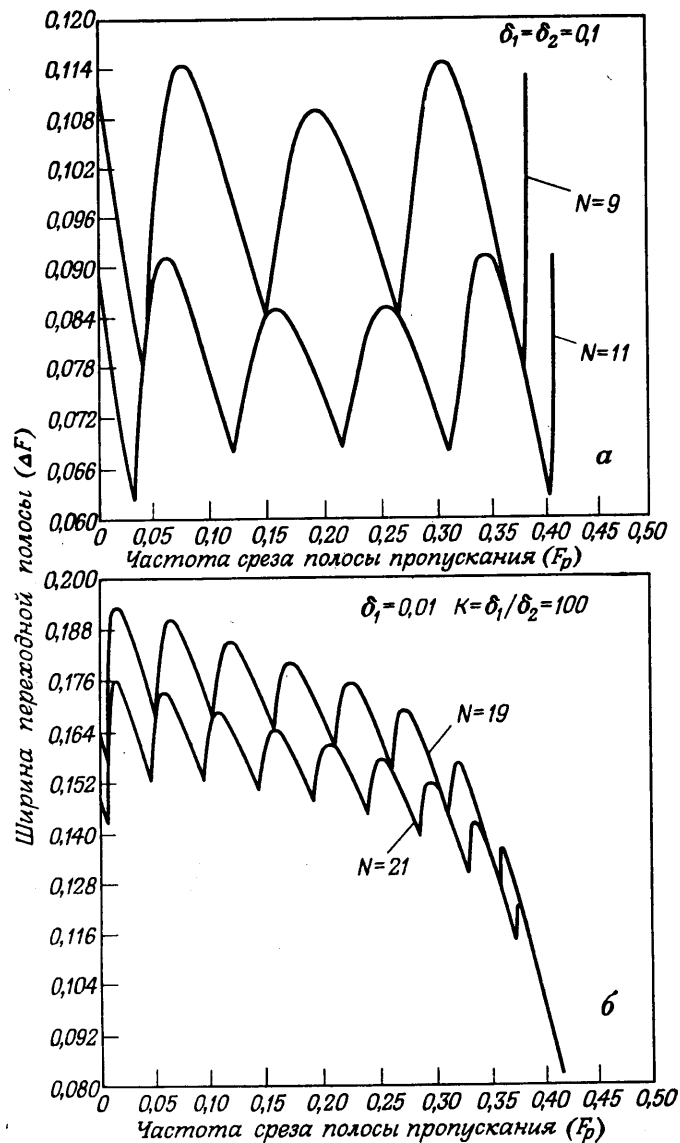


Фиг. 3.52. «Невидимая» пульсация.

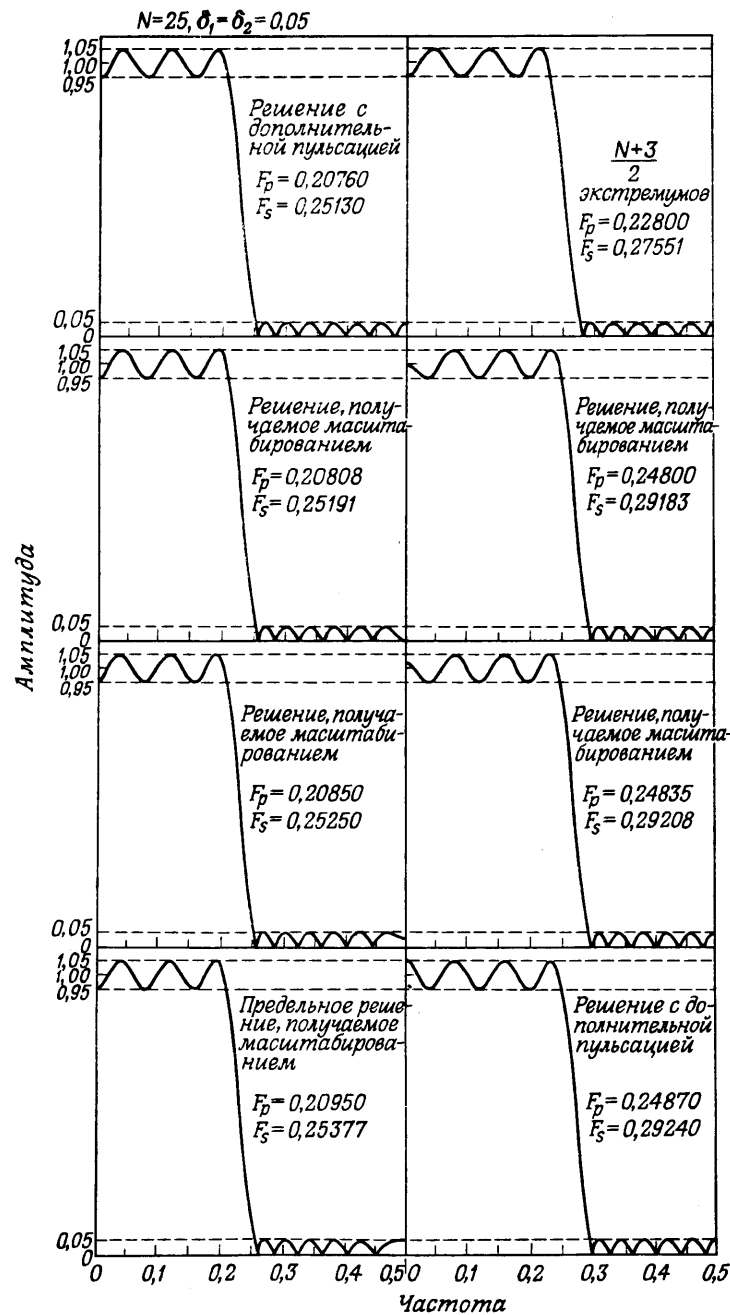
экстремумов равной амплитуды. Объяснить их наличие с помощью какой-либо простой операции масштабирования не удалось. Однако, используя обычный полином по x , можно объяснить особенности этих фильтров, меняя положение и амплитуду «невидимой» пульсации за пределами диапазона $-1 \leq x \leq +1$. Как показано на фиг. 3.52, при возрастании F_p положение невидимой пульсации стремится к $-\infty$, а амплитуда — к $+\infty$. Конечное положение и амплитуда невидимой пульсации соответствуют $\pm \infty$ — точке, где N -точечный фильтр эквивалентен $(N - 2)$ -точечному фильтру с дополнительной пульсацией, поскольку все его пульсации находятся в диапазоне $-1 \leq x \leq +1$. Этот эффект иллюстрируется на фиг. 3.53, где показаны кривые зависимости ширины переходной полосы от частоты среза полосы пропускания для $N = 9$ и 11 при $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$. Каждому решению для фильтра с дополнительной пульсацией при $N = 9$ соответствует, как и было предсказано выше, решение для фильтра без дополнительной пульсации при $N = 11$.

Если увеличивать F_p далее предела, при котором невидимая пульсация оказывается в $-\infty$, она появится в $+\infty$ и будет перемещаться в направлении точки $x = +1$. В конце концов невидимая пульсация станет видимой (в точке $x = +1$), что даст масштабируемое решение для фильтра с дополнительной пульсацией. Приведенное выше в некоторой степени качественное описание поведения различных типов оптимальных фильтров было проверено экспериментально; это оказалось чрезвычайно полезным для понимания сущности оптимальных фильтров.

На фиг. 3.54 представлены все типы оптимальных фильтров, которые могут быть получены путем изменения частоты среза фильтра. Первый из них соответствует решению с дополнительной пульсацией при $N = 25$ и $\delta_1 = \delta_2 = 0,05$. Ниже приведены частотные характеристики двух различных масштабированных фильтров, равные нулю и $0,03$ при $f = 0,5$ для первого и второго фильтров соответственно. Последний фильтр в первом столбце соответствует решению с максимально возможным изменением масшта-



Фиг. 3.53. Зависимость ширины переходной полосы от частоты среза полосы пропускания для нескольких оптимальных фильтров нижних частот.



Фиг. 3.54. Различные типы оптимальных фильтров нижних частот.

ба, т. е. фильтру с частотной характеристикой, равной 0,05 при $f = 0,5$, кривая ошибки которого имеет $(N + 3)/2$ экстремумов одинаковой амплитуды. Первый фильтр во втором столбце соответствует точке, лежащей приблизительно посередине между двумя решениями с дополнительной пульсацией. Два следующих фильтра соответствуют масштабированным решениям с дополнительной пульсацией, но с величиной ошибки при $f = 0$, отличающейся от остальных экстремумов. У первого из них величина ошибки при $f = 0$ составляет около $-0,005$, тогда как у второго она близка к $0,015$. Последний фильтр во втором столбце соответствует решению с дополнительной пульсацией.

3.33. Некоторые дополнительные свойства оптимальных фильтров нижних частот вида 1

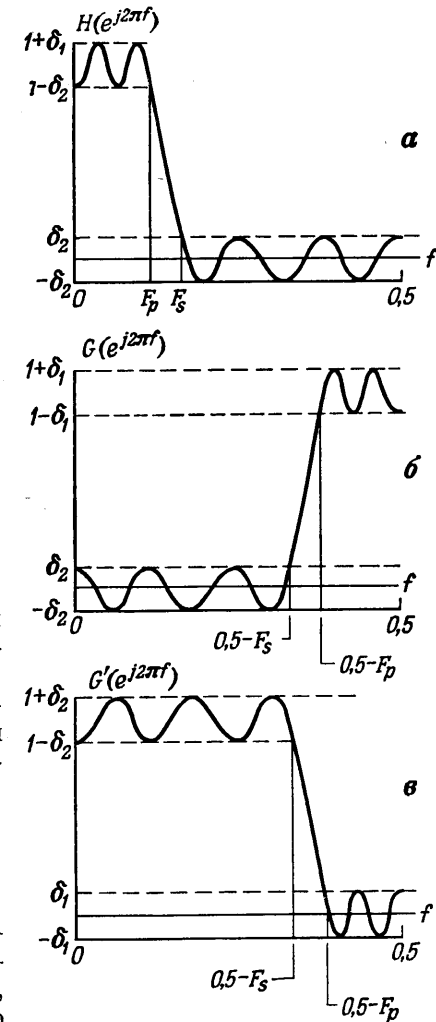
Целесообразно рассмотреть некоторые дополнительные свойства оптимальных фильтров:

- 1) симметрию параметров фильтра;
- 2) поведение ширины переходной полосы при больших K ;
- 3) аналитические решения для чебышевской аппроксимации.

В данном разделе будет описано, как эти свойства связаны с задачей проектирования фильтров.

1. Симметрия параметров фильтра

Оптимальный фильтр полностью характеризуется набором следующих параметров: N , F_p , F_s , δ_1 и δ_2 . Покажем, что каждому оптимальному фильтру нижних частот с перечисленным набором параметров соот-



Фиг. 3.55. Симметрия параметров оптимального фильтра нижних частот.

ветствует другой оптимальный фильтр с параметрами $N' = N$, $F'_p = 0,5 - F_s$, $F'_s = 0,5 - F_p$, $\delta'_1 = \delta_2$, $\delta'_2 = \delta_1$, т. е. существует своего рода симметрия параметров фильтра.

На фиг. 3.55 свойство симметрии представлено графически. Изображенная здесь частотная характеристика фильтра с параметрами N , F_p , F_s , δ_1 и δ_2 может быть записана в виде

$$H^*(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \cos(\omega n). \quad (3.130)$$

Делая подстановку

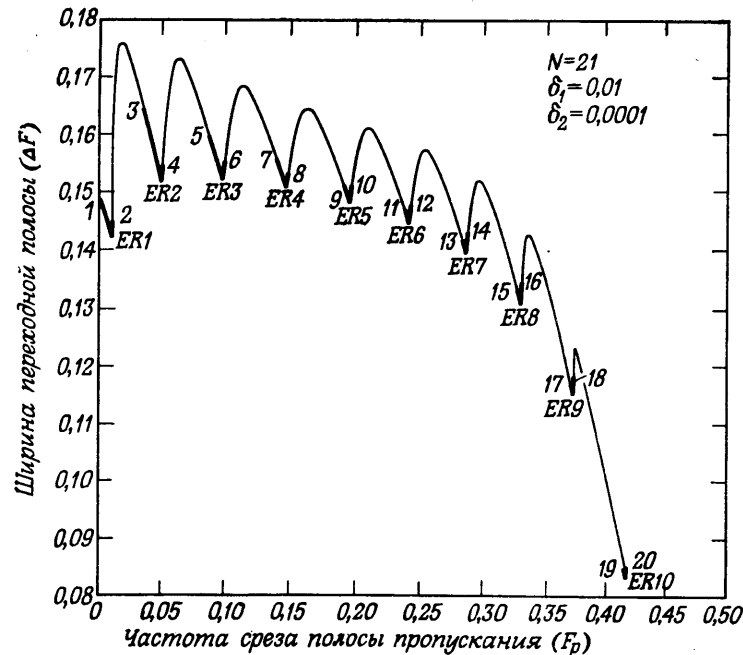
$$\omega \rightarrow \pi - \omega, \quad (3.131)$$

получаем

$$H^*[e^{j(\pi-\omega)}] = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} a(n) \underbrace{\cos[(\pi-\omega)n]}_{(-1)^n \cos(\omega n)} \quad (3.132)$$

и, полагая $G(e^{j\omega}) = H^*[e^{j(\pi-\omega)}]$, находим

$$G(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} g(n) \cos(\omega n). \quad (3.133)$$



Фиг. 3.56. Зависимость ширины переходной полосы от частоты среза полосы пропускания для оптимальных фильтров нижних частот.

Выражение (3.133) описывает частотную характеристику оптимального фильтра (верхних частот), показанную на фиг. 3.55, б. И наконец, положив

$$G'(e^{j\omega}) = 1 - G(e^{j\omega}) = 1 - \sum_{n=0}^{(N-1)/2} g(n) \cos(\omega n) = \sum_{n=0}^{(N-1)/2} g'(n) \cos(\omega n), \quad (3.134)$$

получим частотную характеристику оптимального фильтра нижних частот (фиг. 3.55, а) с параметрами $N' = N$, $F'_p = 0,5 - F_s$, $F'_s = 0,5 - F_p$, $\delta'_1 = \delta_2$, $\delta'_2 = \delta_1$.

При $\delta_1 = \delta_2$ (т. е. $\delta'_1 = \delta'_2$) кривая зависимости ΔF от F (такая, как, например, на фиг. 3.50) является симметричной. Однако при $\delta_1 \neq \delta_2$ кривая зависимости ΔF от F_p несимметрична. Как это видно из фиг. 3.56, где $N = 21$, $\delta_1 = 0,01$, $\delta_2 = 0,0001$. Если построить кривую зависимости ΔF от F_p при $N = 21$, $\delta_1 = 0,0001$, $\delta_2 = 0,01$, то вследствие симметрии она окажется зеркальным отображением кривой, приведенной на фиг. 3.56.

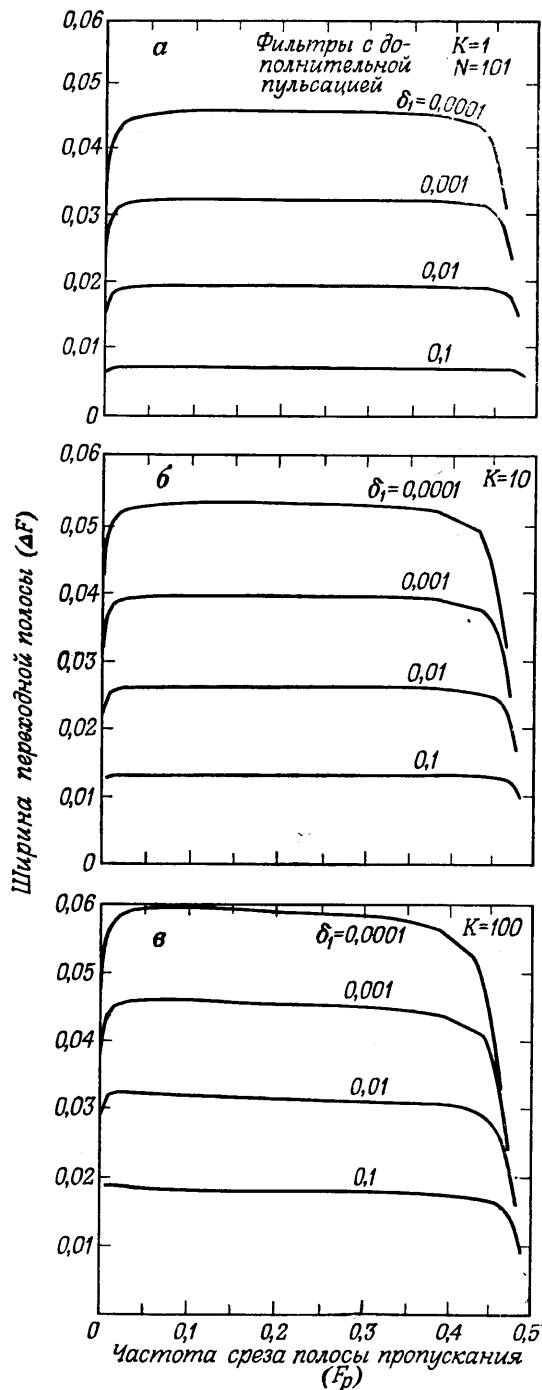
2. Ширина переходной полосы для больших K

Из сравнения фиг. 3.50 и 3.56 видно, что кривая зависимости ширины переходной полосы от частоты среза F_p в случае $K > 1$ ($K = \delta_1/\delta_2$) сильно отличается от аналогичной кривой при $K = 1$. Видно, что при больших K с возрастанием F_p ширина переходной полосы уменьшается довольно резко. В приведенном на фиг. 3.56 примере ширина переходной полосы уменьшается более чем в 2 раза с возрастанием частоты среза. Интуитивно этот эффект можно объяснить тем, что с увеличением F_p пульсации из полосы пропускания попадают в полосу пропускания, где они могут быть в K раз больше по величине (в 100 раз для примера на фиг. 3.56), за счет чего и может быть уменьшена ширина переходной полосы ΔF .

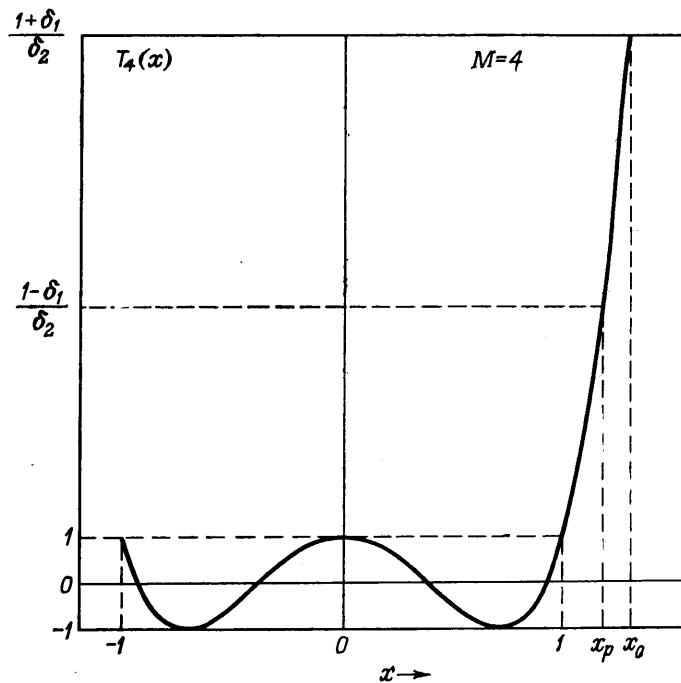
Этот эффект не столь ярко выражен при больших N . На фиг. 3.57 изображены кривые зависимости ширины переходной полосы от частоты среза полосы пропускания для $N = 101$ и $K = 1, 10$ и 100 при $\delta_1 = 0,1, 0,01, 0,001$ и $0,0001$ (приведены кривые только для фильтров с дополнительной пульсацией). Видно, что резкое изменение ширины переходной полосы происходит в большинстве случаев вблизи $F_p = 0,5$, т. е. только для весьма широкополосных фильтров.

3. Чебышевские решения

Хотя нелегко получить аналитическое решение задачи проектирования оптимального фильтра, в частном случае, когда в полосе пропускания или в полосе непропускания имеется только



Фиг. 3.57. Зависимость ширины переходной полосы от частоты среза полосы пропускания для оптимальных фильтров с импульсной характеристикой, содержащей 101 отсчет.



Фиг. 3.58. Чебышевский полином.

одна пульсация, такое аналитическое решение существует. Это решение имеет вид хорошо известного полинома Чебышева.

Рассмотрим полином Чебышева M -й степени $T_M(x)$, определяемый формулой

$$T_M(x) = \cos(M \arccos x), \quad |x| \leq 1, \\ = \operatorname{ch}(M \operatorname{Arch} x), \quad |x| > 1, \quad (3.135)$$

что эквивалентно обычному полиному вида

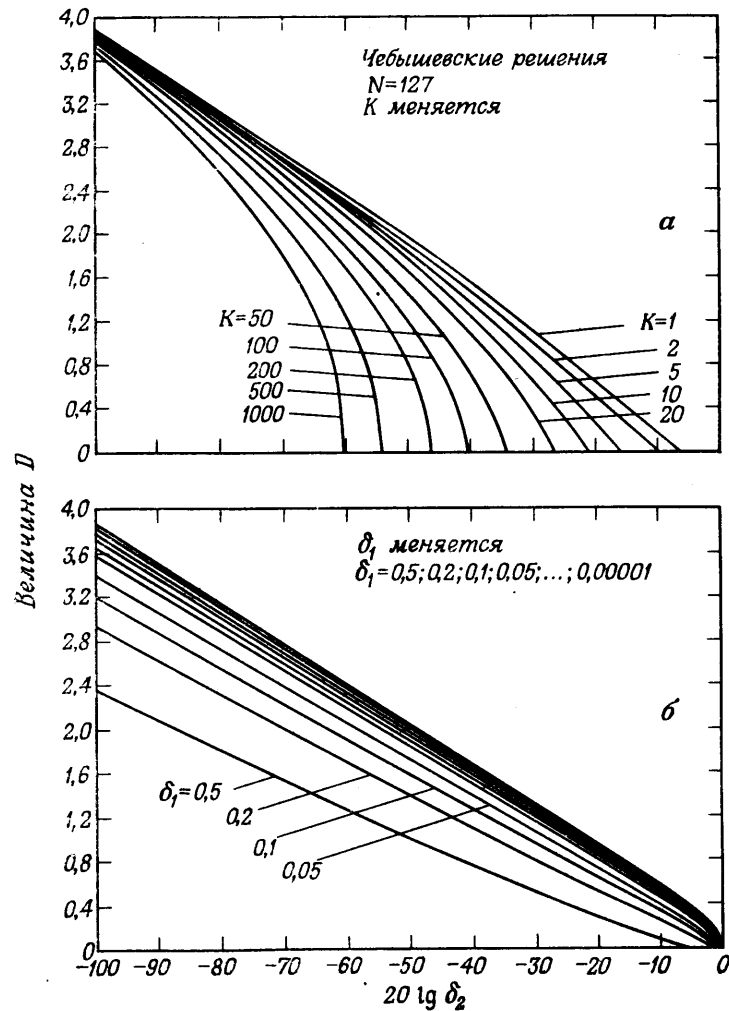
$$T_M(x) = \sum_{n=0}^M b(n) x^n. \quad (3.136)$$

На фиг. 3.58 изображен график $T_M(x)$ для $M = 4$. Если положить $M = (N - 1)/2$, то легко показать, что полином $\delta_2 T_{(N-1)/2}(x)$ является точным решением задачи аппроксимации для оптимального фильтра вида 1 с одной пульсацией в полосе пропускания. Поскольку полиномы Чебышева заданы в области x , для отображения их в область f требуется выполнить преобразование вида

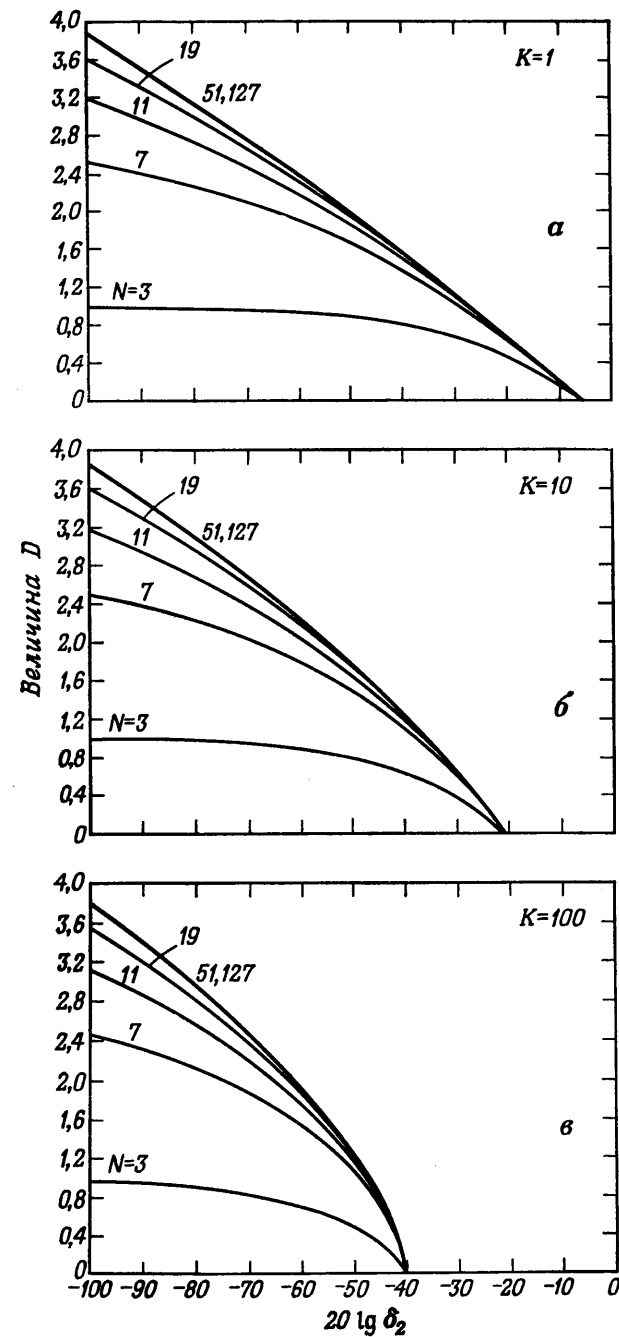
$$x = \left(\frac{X_0 + 1}{2} \right) \cos(2\pi f) + \left(\frac{X_0 - 1}{2} \right), \quad (3.137)$$

которое обеспечивает отображение интервала $-1 \leq x \leq X_0$ в интервал $0 \leq f \leq 0,5$ и преобразование обычного полинома по x в тригонометрический полином по f . Значение X_0 в преобразовании (3.137) соответствует точке, в которой $T_{(N-1)/2}(x) = (1 + \delta_1)/\delta_2$.

В случае когда решение имеет вид чебышевского полинома, частоты среза полос пропускания и непропускания являются отображениями точек $x = X_p$ (где $T_{(N-1)/2}(x) = (1 - \delta_1)/\delta_2$)



Фиг. 3.59. Свойства оптимальных (по Чебышеву) фильтров нижних частот.



Фиг. 3.60. Дополнительные свойства оптимальных (по Чебышеву) фильтров нижних частот.

и $x = +1$. Таким образом, можно найти аналитическое выражение для ширины переходной полосы ΔF , которое при больших N имеет вид

$$\Delta F = F_s - F_p \approx \frac{1}{\pi(N-1)} \left(\operatorname{Arch} \left(\frac{1+\delta_1}{\delta_2} \right) - \left\{ \left[\operatorname{Arch} \left(\frac{1+\delta_1}{\delta_2} \right) \right]^2 - \left[\operatorname{Arch} \left(\frac{1-\delta_1}{\delta_2} \right) \right]^2 \right\}^{1/2} \right). \quad (3.138)$$

При $\delta_1 \ll 1$ это выражение упрощается:

$$\Delta F \approx \frac{1}{\pi(N-1)} (\ln 2 - \ln \delta_2). \quad (3.139)$$

Таким образом, величина D , определяемая формулой

$$D = (N-1) \Delta F, \quad (3.140)$$

при сделанных выше предположениях оказывается независимой от величин ΔF и N . На фиг. 3.59 приведены графики зависимости величины D от $\lg \delta_2$ для $N = 127$ (т. е. большого N) и различных значений K и δ_1 . Из графиков видно, что D действительно не зависит от δ_1 при малых δ_1 . На фиг. 3.60 приведены графики зависимости D от $\lg \delta_2$ для $K = 1, 10$ и 100 и различных значений N от 3 до 127. Как и было показано выше, при $N \geq 51$ величина D по существу не зависит от N .

3.34. Соотношения между параметрами оптимального фильтра нижних частот

Аналитического решения задачи расчета оптимального фильтра, за исключением частного случая чебышевского решения, не существует. Как видно из приведенных выше графиков, ширина переходной полосы фильтра в случае чебышевского решения обычно оказывается значительно меньше, чем для других оптимальных фильтров с такими же значениями N , δ_1 , δ_2 , но при других F_p и F_s . На основе экспериментальных данных по очень большому числу оптимальных фильтров была получена совокупность приближенных расчетных соотношений, связывающих параметры проектируемых фильтров. С помощью этих формул разработчик может выбрать любые четыре из пяти параметров N , F_p , F_s , δ_1 и δ_2 , а затем оценить недостающий пятый параметр. При проектировании фильтра разработчик должен перебирать значения незаданного параметра до тех пор, пока не будут удовлетворены (возможно, с запасом) требования ко всем другим параметрам.

В систему расчетных соотношений входит прежде всего найденное выше выражение для величины D :

$$D = (N-1) \Delta F = (N-1) (F_s - F_p). \quad (3.141)$$

Кроме того, используются следующие эмпирические соотношения:

$$D_\infty(\delta_1, \delta_2) = [a_1 (\lg \delta_1)^2 + a_2 \lg \delta_1 + a_3] \lg \delta_2 + [a_4 (\lg \delta_1)^2 + a_5 \lg \delta_1 + a_6], \quad (3.142)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= 5,309 \cdot 10^{-3}, \\ a_2 &= 7,114 \cdot 10^{-2}, \\ a_3 &= -4,761 \cdot 10^{-1}, \\ a_4 &= -2,66 \cdot 10^{-3}, \\ a_5 &= -5,941 \cdot 10^{-1}, \\ a_6 &= -4,278 \cdot 10^{-1}, \end{aligned}$$

а также

$$f(\delta_1, \delta_2) = b_1 + b_2 (\lg \delta_1 - \lg \delta_2), \quad (3.143)$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= 11,01217, \\ b_2 &= 0,51244, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$D_\infty(\delta_1, \delta_2) = (N-1) \Delta F + f(\delta_1, \delta_2) (\Delta F)^2. \quad (3.144)$$

Чтобы понять, как правильно использовать эти расчетные соотношения, рассмотрим случай, когда заданы δ_1 , δ_2 , F_p и F_s , а разработчику предстоит найти подходящее значение N . Из соотношений (3.141), (3.142) и (3.144) находим \hat{N} , оценку N :

$$\hat{N} = \frac{D_\infty(\delta_1, \delta_2)}{\Delta F} - f(\delta_1, \delta_2) (\Delta F) + 1. \quad (3.145)$$

Полученное начальное значение \hat{N} вместе с заданными значениями F_p , F_s и $K = \delta_1/\delta_2$ образует исходный набор оценок расчетных параметров фильтра. В зависимости от того, окажутся ли действительные значения δ_1 и δ_2 (полученные в результате расчета фильтра) слишком большими или слишком малыми, величина N соответственно увеличивается либо уменьшается до тех пор, пока не будут обеспечены или даже превышены значения всех других параметров.

В случае когда первоначально не задаются либо F_s , либо F_p , следует воспользоваться расчетным соотношением для оценки ΔF (а следовательно, и для оценки либо F_s , либо F_p):

$$\Delta \hat{F} = \frac{N-1}{2f(\delta_1, \delta_2)} \left[\sqrt{1 + \frac{4f(\delta_1, \delta_2) D_\infty(\delta_1, \delta_2)}{(N-1)^2}} - 1 \right]. \quad (3.146)$$

Далее незадаваемый параметр варьируется от первоначального значения до тех пор, пока не будут получены подходящие значения всех параметров.

Когда заданным параметром является δ_2 , его оценку можно найти по формуле

$$\lg \hat{\delta}_2 = \frac{(N-1) \Delta F + d_1 (\Delta F)^2 - c_2}{c_1 + b_2 (\Delta F)^2}, \quad (3.147)$$

где

$$\begin{aligned} c_1 &= a_1 (\lg \delta_1)^2 + a_2 \lg \delta_1 + a_3, \\ c_2 &= a_4 (\lg \delta_1)^2 + a_5 \lg \delta_1 + a_6, \\ d_1 &= b_1 + b_2 \lg \delta_1. \end{aligned}$$

В этом случае начальное значение $\hat{\delta}_2$ дает возможность разработчику оценить значение $K = \delta_1/\hat{\delta}_2$, которое затем варьируется до тех пор, пока величина δ_1 не окажется в заданных пределах.

Наконец, если заданным параметром является δ_1 , его оценку можно найти по формуле

$$\lg \hat{\delta}_1 = -\frac{g_2}{2} + \sqrt{\frac{g_2^2}{4} - g_3}, \quad (3.148)$$

где

$$\begin{aligned} g_1 &= b_1 - b_2 \lg \delta_2, \\ g_2 &= \frac{[e_2 - b_2 (\Delta F)^2]}{e_1}, \\ g_3 &= \frac{e_3 - g_1 (\Delta F)^2 - (N-1) \Delta F}{e_1}, \\ e_1 &= a_1 \lg \delta_2 + a_4, \\ e_2 &= a_2 \lg \delta_2 + a_5, \\ e_3 &= a_3 \lg \delta_2 + a_6. \end{aligned}$$

В этом случае начальное значение $\hat{\delta}_1$ позволяет найти оценку величины $K = \hat{\delta}_1/\delta_2$, которая затем варьируется до тех пор, пока δ_2 не окажется в заданных пределах.

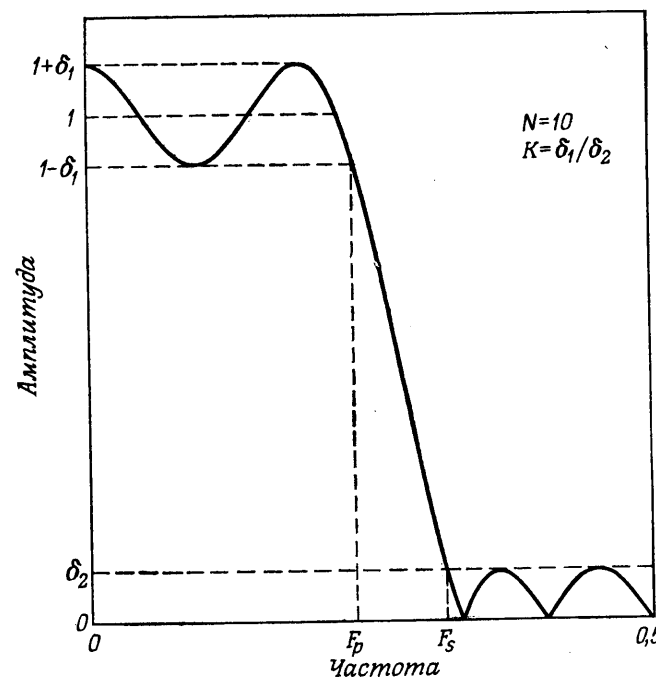
Проверка на большом числе спроектированных фильтров показала, что приведенные расчетные соотношения дают достаточно хорошие оценки заданных параметров.

3.35. Свойства оптимальных фильтров нижних частот вида 2

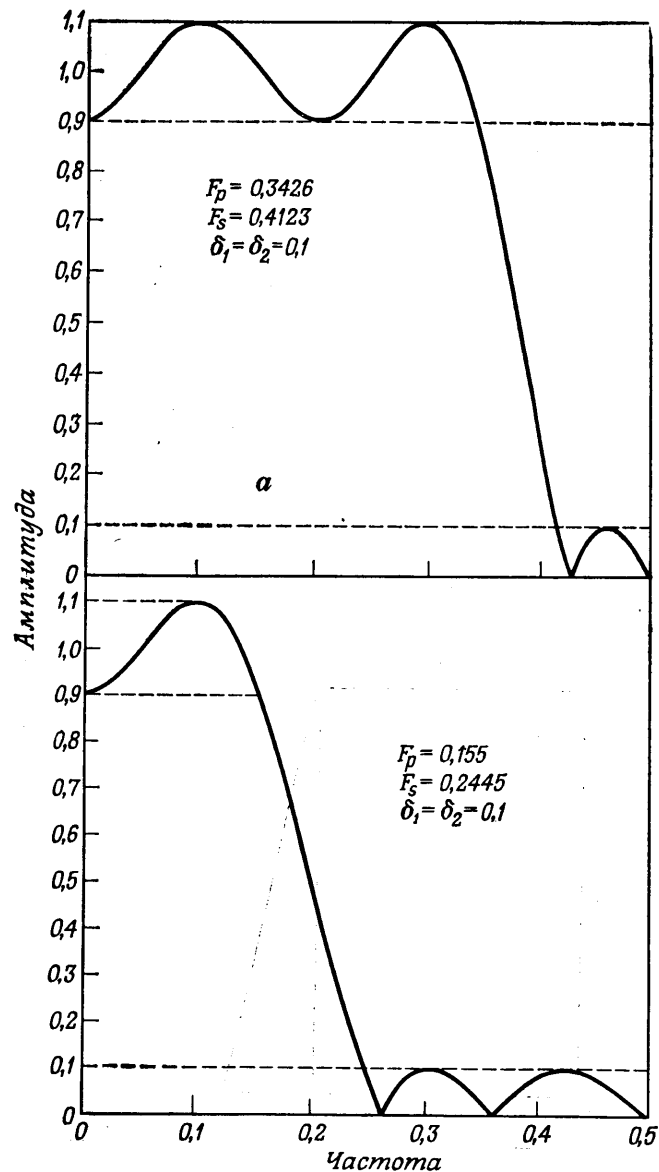
Большая часть рассмотренных выше свойств оптимальных фильтров нижних частот вида 1 относится и к фильтрам вида 2, среди которых также можно выделить оптимальные фильтры нижних частот трех основных типов: фильтры с дополнительной пульсацией, кривые ошибок которых имеют $(N/2 + 2)$ экстремумов равной амплитуды, масштабированные фильтры с дополнительной

пульсацией, имеющие $(N/2 + 1)$ экстремумов равной амплитуды и один меньший экстремум, и, наконец, фильтры с равновеликими пульсациями, имеющие $(N/2 + 1)$ экстремумов равной амплитуды. Главное отличие фильтров вида 2 от фильтров вида 1 состоит в том, что их частотная характеристика в точке $\omega = \pi$ должна быть равна 0. Это приводит к тому, что фильтры вида 2 имеют некоторые особенности по сравнению с фильтрами вида 1. В настоящем разделе рассмотрены эти особенности и проведено сравнение фильтров нижних частот обоих видов.

На фиг. 3.61 представлена амплитудная характеристика типичного оптимального фильтра нижних частот вида 2. Параметры F_p , F_s , δ_1 и δ_2 имеют здесь тот же смысл, что и для фильтров вида 1. При $f=0,5$ амплитудная характеристика равна нулю, так как $H^*(e^{j\omega}) = 0$ в точке $z = -1$. На фиг. 3.62, а и б представлены амплитудные характеристики фильтра вида 2 с дополнительной пульсацией и фильтра вида 2 с равновеликими пульсациями. В этих примерах $N = 10$, поэтому функция ошибки фильтра с дополнительной пульсацией имеет $10/2 + 2 = 7$ экстремумов, тогда как



Фиг. 3.61. Амплитудная характеристика оптимального фильтра нижних частот, имеющего 10-точечную импульсную характеристику (т. е. N — четное).

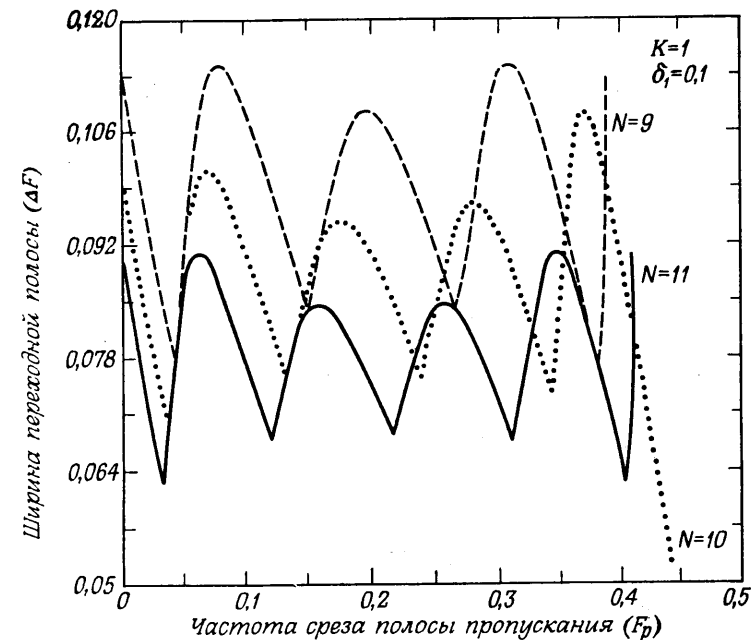


Фиг. 3.62. Амплитудные характеристики оптимальных фильтров нижних частот с дополнительной пульсацией (а) и с равновеликими пульсациями (б), имеющих 10-точечные импульсные характеристики.

у фильтра с равновеликими пульсациями она имеет только 6 экстремумов.

Нетрудно показать, что если N либо только четное, либо только нечетное, то оптимальный фильтр с импульсной характеристикой, содержащей $(N - 2)$ отсчетов, в принципе не может быть лучше (т. е. не может иметь меньший уровень максимума ошибки) оптимального фильтра с импульсной характеристикой, содержащей N отсчетов. Это вполне понятно, поскольку фильтры, импульсная характеристика которых имеет $(N - 2)$ отсчетов, образуют подкласс фильтров с импульсной характеристикой, содержащей N отсчетов, а оптимальный фильтр подкласса не может быть лучше оптимального фильтра всего класса. Однако это положение оказывается несправедливым, если сравниваются оптимальные фильтры с импульсными характеристиками, содержащими соответственно N и $(N - 1)$ отсчетов. В этом случае невозможно заранее предсказать, какой фильтр будет иметь лучшие характеристики.

Для иллюстрации вышеизложенного на фиг. 3.63 приведены кривые зависимости ширины переходной полосы фильтра ($\Delta F =$



Фиг. 3.63. Сравнение ширины переходных полос для оптимальных фильтров нижних частот с четным и нечетным N .

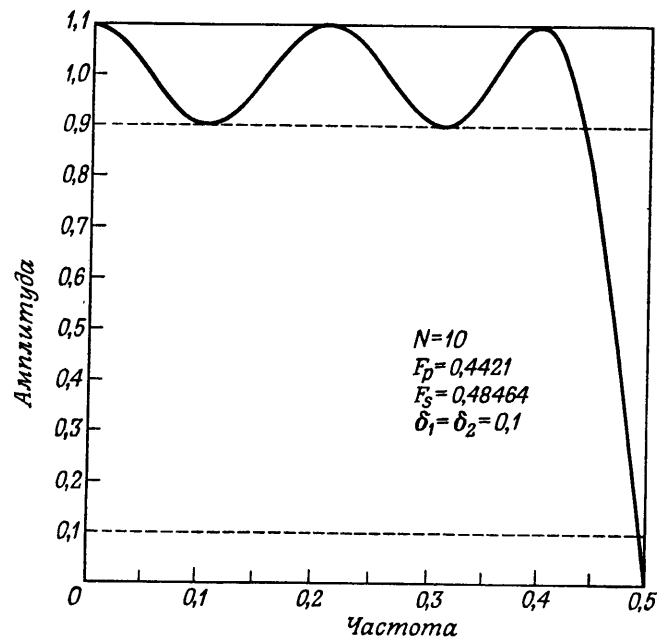
$= F_s - F_p$) от F_p при $N = 9, 10, 11$ и $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$. Эти кривые позволяют сделать следующие выводы:

1. При одинаковых F_p ширина переходной полосы у фильтров с $N = 10$ иногда оказывается меньше, чем у фильтров с $N = 11$, а иногда больше, чем у фильтров с $N = 9$.

2. Кривая зависимости ΔF от F_p при $N = 10$ несимметрична, хотя аналогичные кривые при $N = 9$ и $N = 11$ являются симметричными в том смысле, что каждой точке кривой с координатами $(\tilde{F}_p, \Delta\tilde{F} = \tilde{F}_s - \tilde{F}_p)$ соответствует симметричная ей точка с координатами $(0,5 - \tilde{F}_s, \Delta\tilde{F})$.

3. Кривая при $N = 10$ заканчивается точкой, соответствующей решению с дополнительной пульсацией.

Второй и третий выводы вытекают из характера оптимального решения, получаемого в точке $f = 0,5$ для фильтров вида 2. Поскольку в этой точке $H^*(e^{j\pi}) = 0$, т. е. функция ошибки в отличие от фильтров вида 1 здесь не имеет максимума, то простое преобразование переменных, использованное выше для объяснения свойства симметрии фильтров вида 1, в данном случае непригодно. Таким образом, кривая зависимости ΔF от F_p для фильтров вида

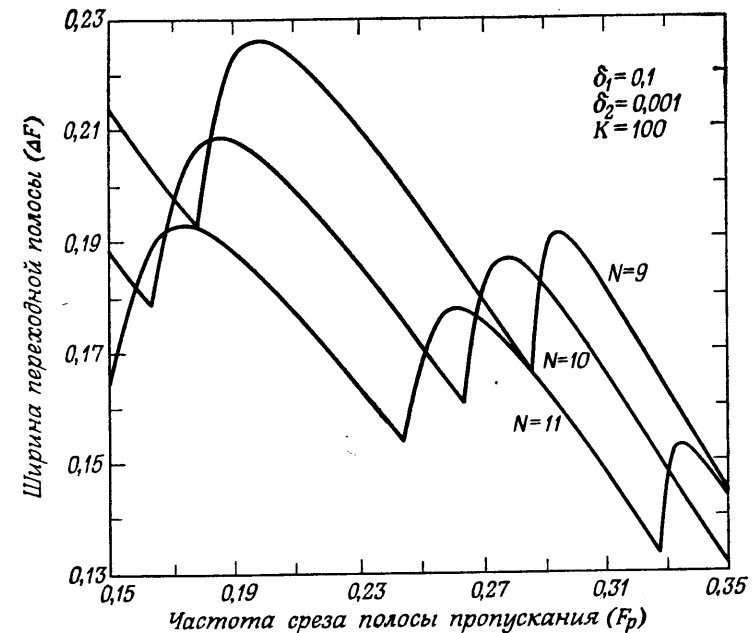


Фиг. 3.64. Последний возможный фильтр нижних частот с дополнительной пульсацией при четном N .

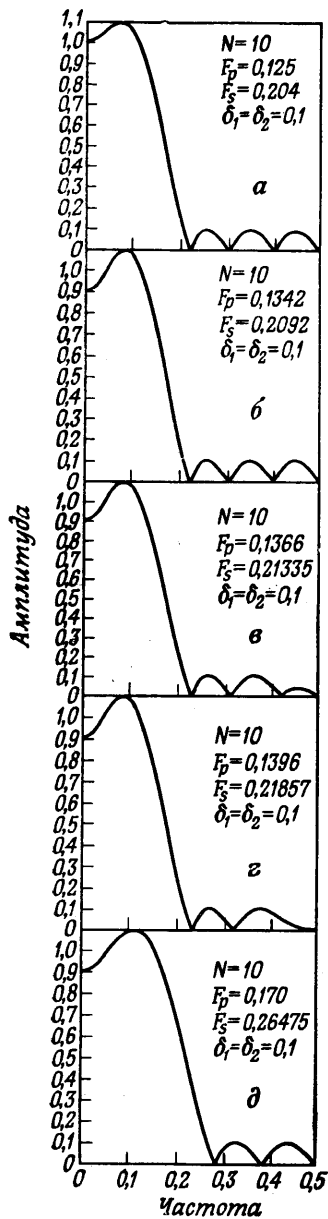
2 не обладает простой симметрией. Третий вывод иллюстрируется на фиг. 3.64, где изображена амплитудная характеристика последнего возможного фильтра с дополнительной пульсацией. Поскольку при $f = 0,5$ она всегда равна нулю, невозможно получить фильтр с частотой среза F_s , как угодно близкой к $0,5$, как в случае нечетных N .

Значение первого вывода нельзя недооценить. Тот факт, что фильтр с $N = 10$ (когда для аппроксимации используются пять функций) может обеспечить заданный уровень пульсаций при меньшей ширине переходной полосы, чем фильтр с $N = 11$ (т. е. при использовании для аппроксимации шести функций), является довольно неожиданным. В несколько другой формулировке это означает, что при заданных фиксированных значениях F_p , F_s и K фильтр с $N = 10$ может обеспечить меньший уровень пульсаций, чем фильтр с $N = 11$. Так, например, при $F_p = 0,3426$, $F_s = 0,41623$, $K = 1$ фильтр с $N = 11$ будет иметь пульсации $\delta_1 = \delta_2 = 0,128215$, тогда как у фильтра с $N = 10$ пульсации $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$. Ослабление в полосе непропускания фильтра с $N = 10$ приблизительно на 2,2 дБ больше, чем у фильтра с $N = 11$.

На фиг. 3.65 приведены графики зависимости ΔF от F_p для $N = 9, 10$ и 11 при $K = 100$ ($\delta_1 = 0,1$, $\delta_2 = 0,001$). Графики по-



Фиг. 3.65. Сравнение ширины переходных полос для оптимальных фильтров нижних частот с четным и нечетным N .



строены для F_p в диапазоне $0,15 \leq F_p \leq 0,35$. Характер зависимости ширины переходной полосы от F_p соответствует кривой фиг. 3.62 в том смысле, что решения при $N = 10$ иногда обеспечивают меньшую ширину переходной полосы, чем решения при $N = 11$, а иногда большую ширину, чем решения при $N = 9$.

Две интересные особенности фильтров нижних частот вида 1 лишь частично распространяются и на фильтры вида 2. К ним относятся процедуры масштабирования и существование чебышевского решения задачи проектирования оптимальных фильтров. Фильтры вида 2 с дополнительной пульсацией, как и фильтры вида 1, также можно непосредственно масштабировать в окрестности точки $f = 0$, однако вблизи точки $f = 0,5$ просто масштабировать невозможно, поскольку в этой точке частотная характеристика фильтров вида 2 обращается в нуль. Из фиг. 3.66, где изображены амплитудные характеристики пяти фильтров с параметрами, взятыми из фиг. 3.63, следует, что действительно существуют оба типа масштабированных фильтров вида 2 с дополнительной пульсацией. На фиг. 3.66, а приведена амплитудная характеристика масштабированного фильтра с дополнительной пульсацией, для которой ошибка аппроксимации в точке $f = 0$ близка к 0,02, в то время как на всех других максимумах она равна 0,1. На фиг. 3.66, б изображена амплитудная характеристика фильтра

Фиг. 3.66. Возможные варианты оптимальных фильтров нижних частот с четным числом отсчетов в импульсной характеристике.

с дополнительной пульсацией, из которой была получена амплитудная характеристика, представленная на фиг. 3.66, а. На фиг. 3.66, б приведена амплитудная характеристика оптимального фильтра, у которой ошибка аппроксимации в последнем экстремуме намного меньше, чем в других экстремумах. Процедура масштабирования для получения амплитудной характеристики такого типа пока не разработана. На фиг. 3.66, в приведена амплитудная характеристика фильтра, у которой кривая ошибки аппроксимации имеет тройной нуль в точке $f = 0,5$ из-за отмеченного выше необъяснимого хода характеристики. На фиг. 3.66, д представлена амплитудная характеристика фильтра для большего значения F_p , чем у фильтра на фиг. 3.66, в. Эта характеристика имеет равновеликие пульсации, а ее кривая ошибки содержит $(N/2 + 1)$ максимумов.

3.36. Характеристики оптимальных дифференциаторов

Требуемая частотная характеристика оптимального КИХ-дифференциатора имеет вид

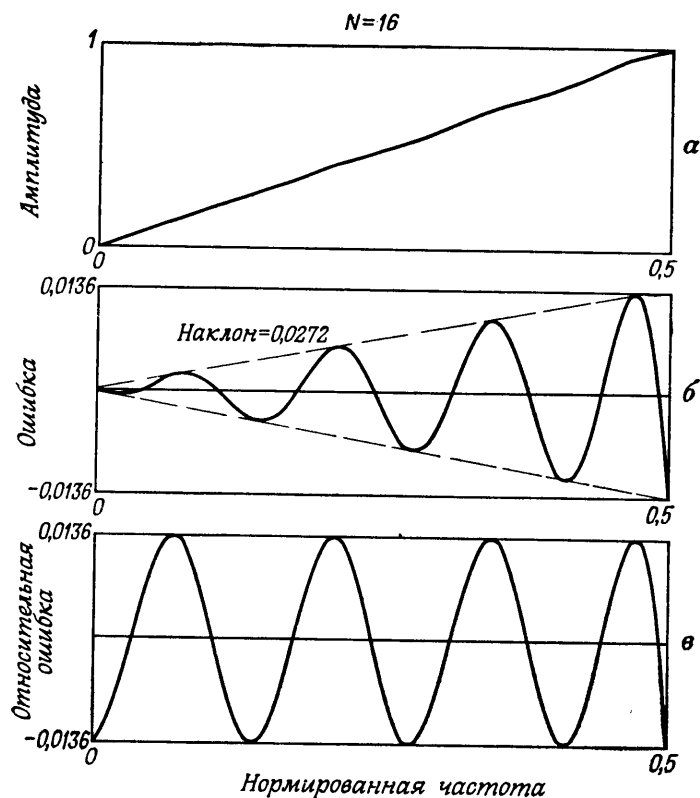
$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} \frac{j\omega}{\pi}, & 0 \leq \omega \leq 2\pi F_p, \\ \frac{j(2\pi - \omega)}{\pi}, & 2\pi(1 - F_p) \leq \omega \leq 2\pi, \end{cases} \quad (3.149)$$

где частота среза дифференциатора F_p представляет собой наибольшую частоту, на которой он еще должен работать. Поскольку характеристика $D(e^{j\omega})$ является чисто мнимой, для ее аппроксимации используются фильтры вида 3 или 4. Для минимизации максимума относительной ошибки результирующей частотной характеристики используется весовая функция вида

$$W(e^{j\omega}) = \frac{1}{\omega}, \quad 0 < \omega \leq 2\pi F_p. \quad (3.150)$$

При использовании фильтров вида 4 частота среза дифференциатора F_p может достигать 0,5, тогда как для фильтров вида 3 величина F_p должна быть меньше, так как иначе максимум относительной ошибки будет близок к 1,0 из-за того, что при $f = 0,5$ амплитудная характеристика обращается в нуль.

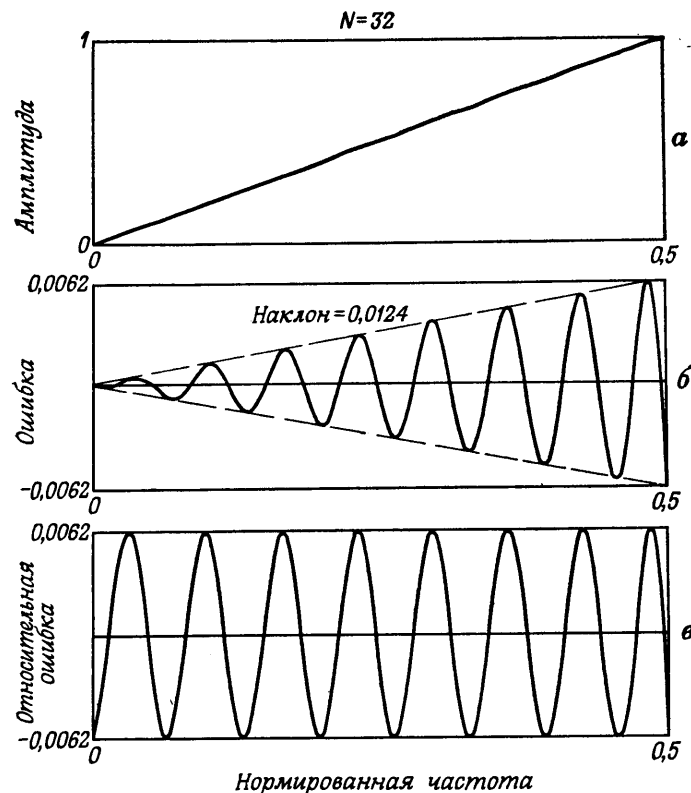
На фиг. 3.67—3.70 приведены характеристики нескольких широкополосных дифференциаторов. На фиг. 3.67 изображены амплитудная характеристика, а также кривые абсолютной и относительной ошибок дифференциатора с $N = 16$ и $F_p = 0,5$. Максимум относительной ошибки равен 0,0136, а сама кривая имеет равновеликие пульсации. Аналогичные кривые для анализатора с $N = 32$ приведены на фиг. 3.68. В этом случае максимум относительной ошибки уменьшен до 0,0062. На фиг. 3.69 изображена амплитудная характеристика дифференциатора с $N = 31$. По-



Фиг. 3.67. Частотные характеристики 16-точечного оптимального дифференциатора.

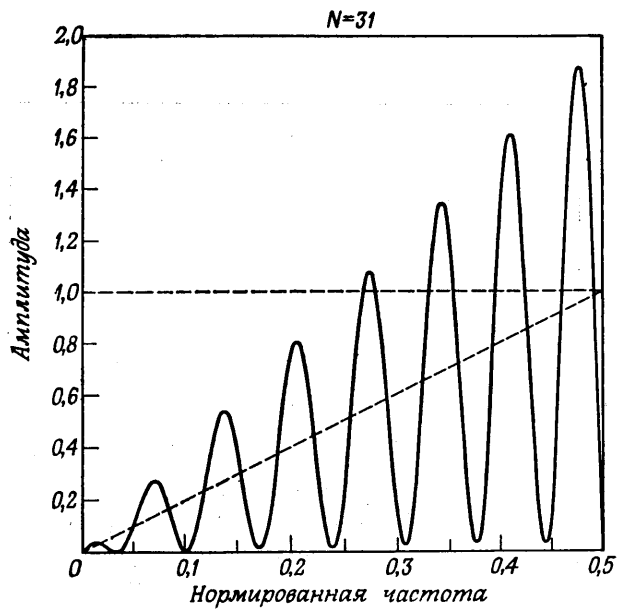
сколько она должна обращаться в нуль в точке $f = 0,5$, кривая ошибки достигает в этой точке максимума, равного 1,0, т. е. этот дифференциатор оказывается чрезвычайно низкочастотным. Как видно из фиг. 3.70, а, при уменьшении частоты среза, например до $F_p = 0,4$, результирующая частотная характеристика дифференциатора с $N = 31$ становится вполне приемлемой. На фиг. 3.70, б та же амплитудная характеристика изображена в пределах от $f = 0$ до $f = 0,4$, т. е. до частоты среза, а на фиг. 3.70, в представлена функция ошибки в том же частотном диапазоне. Максимум относительной ошибки на интервале $0 \leq f \leq 0,4$ составляет приблизительно 0,000028.

Основными параметрами дифференциатора являются N , F_p и δ — максимум относительной ошибки. На фиг. 3.71—3.73 приведены результаты большого числа измерений δ как функции

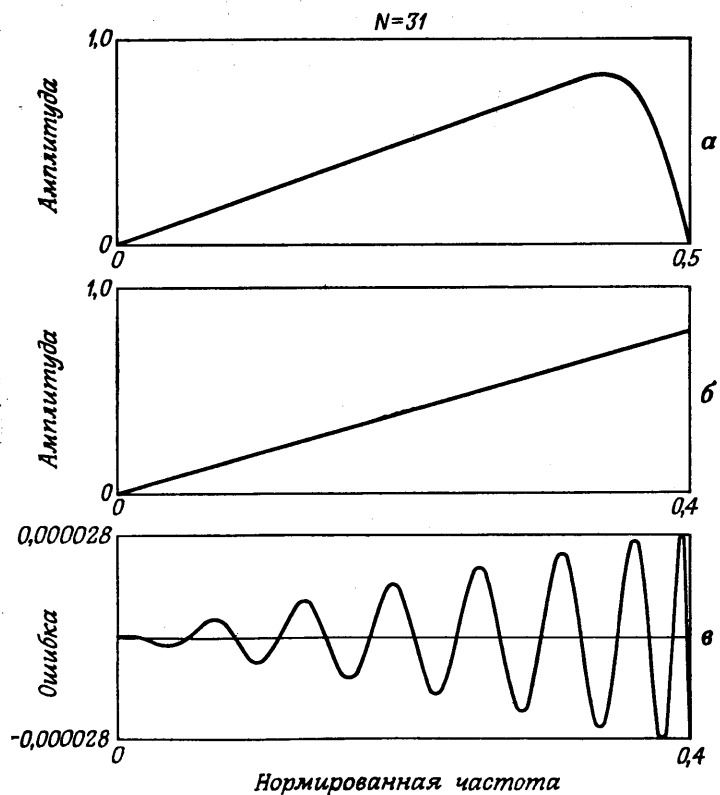


Фиг. 3.68. Частотные характеристики 32-точечного оптимального дифференциатора.

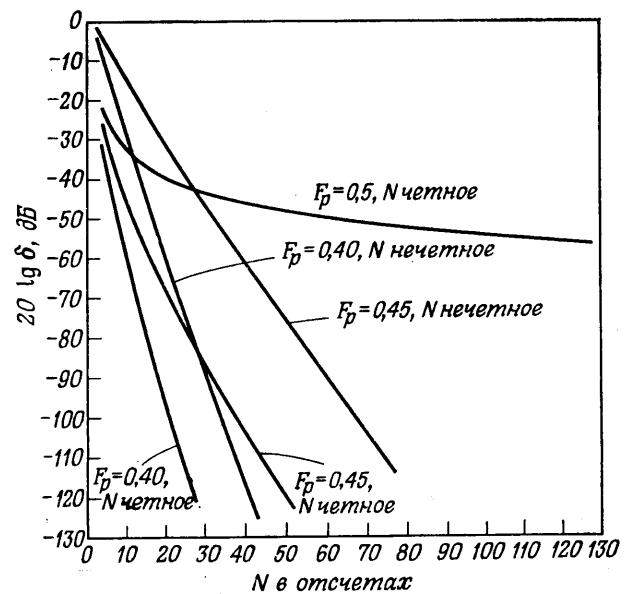
F_p и N . На фиг. 3.71 представлены графики зависимости величины $20 \lg \delta$ от N при значениях F_p , равных 0,5, 0,45 и 0,4, и четных и нечетных N в диапазоне от 3 до 128. Кривая для нечетных N и $F_p = 0,5$ на фиг. 3.71 не изображена, так как в этом случае $\delta = 1,0$ независимо от величины N . Из фиг. 3.71 следует, что при одинаковых F_p величины δ дифференциаторов с четными N на один-два порядка (т. е. на 20—40 дБ) меньше, чем у дифференциаторов с нечетными N . Из приведенных графиков также видно, что при более узкой ширине полосы дифференциатора (т. е. при меньшей величине F_p) максимум относительной ошибки быстрее убывает при увеличении N . Так, при $F_p = 0,5$ величина $20 \lg \delta$ уменьшается только на 35 дБ при изменении N от 4 до 128, тогда как при $F_p = 0,45$ она уменьшается приблизительно на 98 дБ при изменении N от 4 до 52.



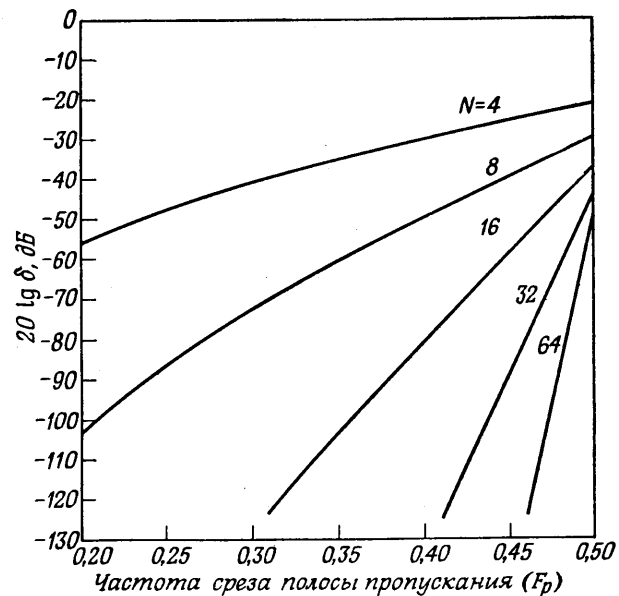
Фиг. 3.69. Частотная характеристика 31-точечного оптимального дифференциатора.



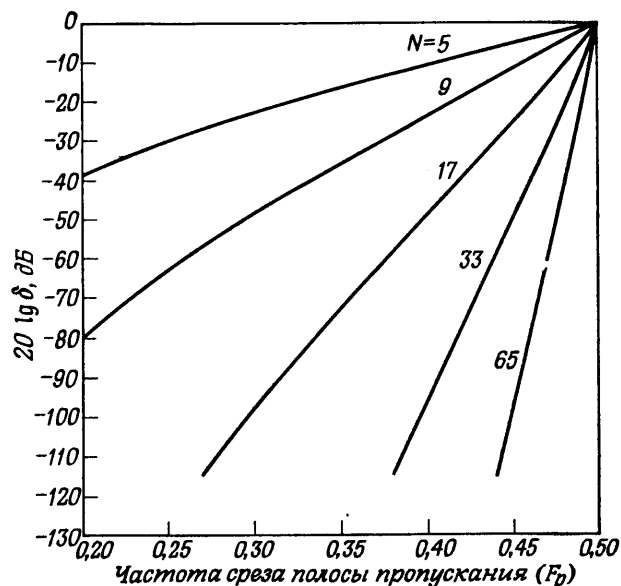
Фиг. 3.70. Частотная характеристика 31-точечного оптимального дифференциатора.



Фиг. 3.71. Относительная ошибка аппроксимации для оптимальных дифференциаторов в зависимости от N .



Фиг. 3.72. Относительная ошибка аппроксимации для оптимальных дифференциаторов в зависимости от F_p .



Фиг. 3.73. Относительная ошибка аппроксимации для оптимальных дифференциаторов в зависимости от F_p .

На фиг. 3.72 и 3.73 приведены графики зависимости ошибки $20 \lg \delta$ от F_p для четных N ($N = 4, 8, 16, 32, 64$) и нечетных N ($N = 5, 9, 17, 33, 65$). Результаты для четных и нечетных N представлены отдельно из-за различного характера зависимостей. Из фиг. 3.73 видно, что по мере приближения F_p к 0,5 величина $20 \lg \delta$ стремится к нулю независимо от N , т. е. при нечетных N все кривые в точке $F_p = 0,5$ сходятся. При четных N кривые при всех значениях F_p идут раздельно. Главный вывод, который можно сделать по этим кривым, состоит в том, что чем больше N , тем быстрее спадает максимум относительной ошибки с уменьшением ширины полосы дифференциатора.

Таким образом, чтобы рассчитать наиболее эффективный КИХ-дифференциатор (т. е. получить заданную величину максимума относительной ошибки при наименьшем возможном N), следует выбирать его полосу как можно меньшей ширины и, если возможно, четное N . Например, чтобы получить максимум относительной ошибки меньше 1%, нужно использовать следующие значения N (в зависимости от F_p):

F_p	Нечетные N	Четные N
0,5	Невозможно	22
0,45	27	10
0,40	15	6

Если же требуется, чтобы максимум относительной ошибки был 0,1%, следует использовать другие значения N :

F_p	Нечетные N	Четные N
0,5	Невозможно	> 128
0,45	41	18
0,40	21	12

Приведенные таблицы показывают, насколько существенно можно уменьшить N за счет изменения F_p и выбора четного N вместо нечетного.

3.37. Характеристики оптимальных преобразователей Гильберта

Идеальная частотная характеристика оптимальных КИХ-преобразователей Гильберта описывается выражением

$$D(e^{j\omega}) = \begin{cases} -j, & 2\pi F_L \leq \omega \leq 2\pi F_H, \\ j, & 2\pi(1 - F_H) \leq \omega \leq 2\pi(1 - F_L), \end{cases} \quad (3.151)$$

где F_L — нижняя, а F_H — верхняя частоты среза полосы, в которой фильтр аппроксимирует идеальную частотную характеристику преобразователя Гильберта. Как и при расчете дифференциаторов, для аппроксимации характеристики (3.151) используются фильтры вида 3 или 4. Для минимизации максимума ошибки характеристики фильтра используется весовая функция $W(e^{j\omega}) = 1$. Для фильтров вида 3 величина F_H должна быть меньше 0,5, тогда как для фильтров вида 4 величина F_H может достигать 0,5. Однако величина F_L всегда должна быть больше 0, поскольку для фильтров обоих видов $H^*(e^{j\omega}) = 0$ при $\omega = 0$.

Для фильтров вида 3 оказалось целесообразным выбирать $F_L = 0,5 - F_H$, поскольку в этом случае результирующая частотная характеристика оказывается симметричной относительно частоты $\omega = \pi/2$ ($f = 0,25$), в результате чего каждый второй

отсчет импульсной характеристики преобразователя Гильберта в точности равен нулю. Это легко показать следующим образом. Если частотная характеристика симметрична относительно $\omega = \pi/2$, то

$$H^*(e^{j\omega}) = H^*[e^{j(\pi-\omega)}]. \quad (3.152)$$

Для фильтров вида 3 соотношение (3.152) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \hat{c}(n) \sin(\omega n) &= \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \hat{c}(n) \sin[(\pi-\omega)n] = \\ &= \sum_{n=1}^{(N-1)/2} \hat{c}(n) (-1)^{n+1} \sin(\omega n), \end{aligned}$$

или

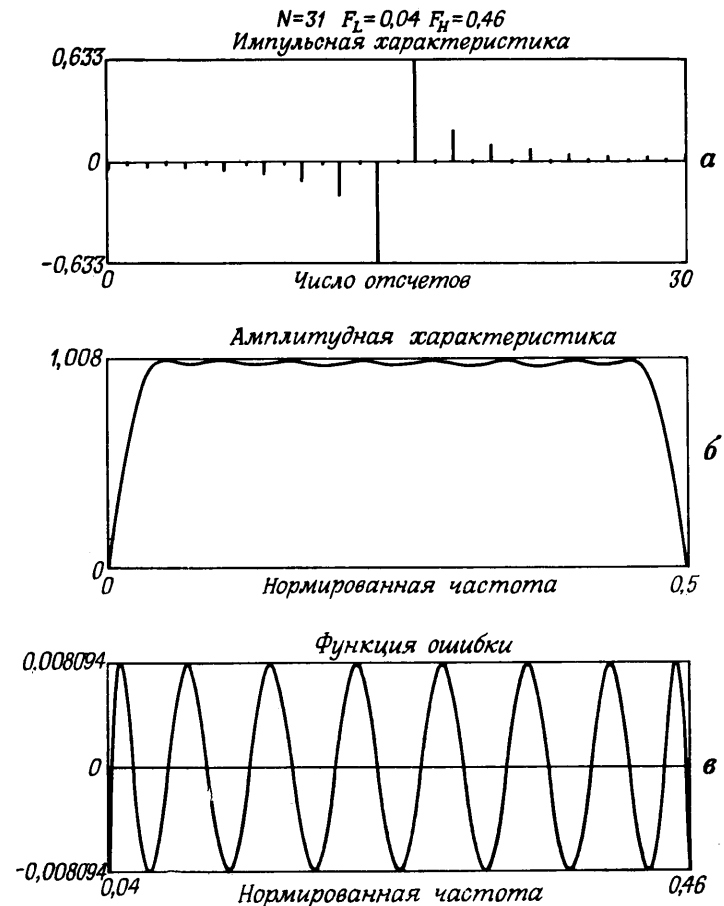
$$\sum_{n=1}^{(N-1)/2} \hat{c}(n) \sin(\omega n) [1 - (-1)^{n+1}] = 0,$$

откуда следует, что

$$\hat{c}(n) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \text{произвольное,} & \text{если } n \text{ нечетное,} \end{cases} \quad (3.153)$$

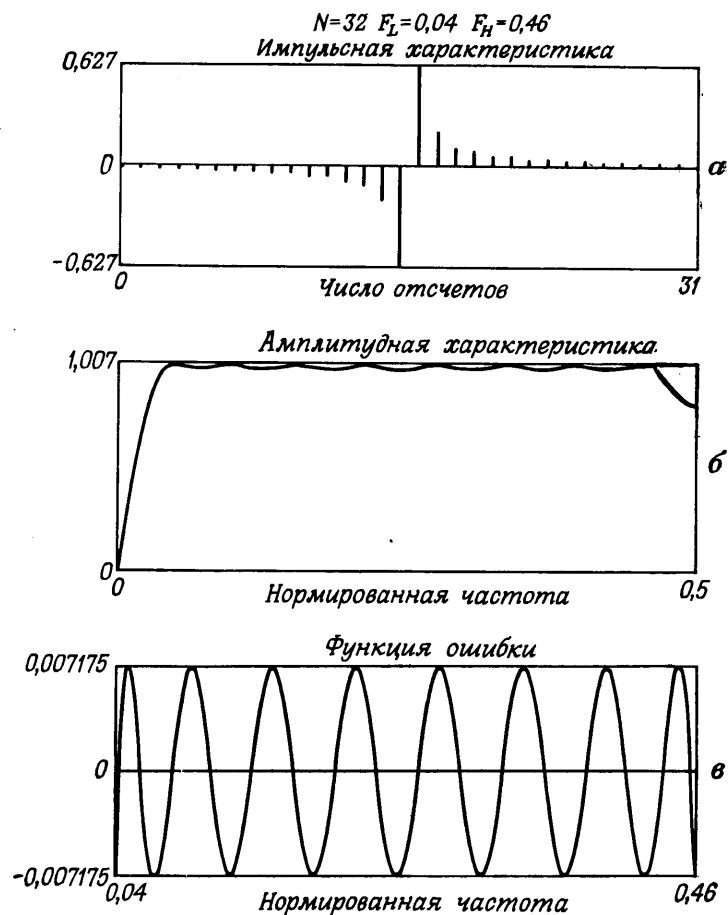
что и требовалось доказать. Выражение (3.153) означает, что при прямой форме построения преобразователя Гильберта вида 3 с одинаковыми верхней и нижней переходными полосами на каждый входной отсчет требуется только $(N+1)/4$ умножений, тогда как при использовании фильтра вида 4 требуется $N/2$ умножений на отсчет (даже при одинаковых верхней и нижней переходных полосах). Это объясняется тем, что частотная характеристика фильтров вида 4 не может быть симметричной (характеристика равна нулю при $\omega = 0$ и отлична от нуля при $\omega = \pi$). Таким образом, можно считать, что с точки зрения объема вычислений преобразователи Гильберта вида 3 в два раза эффективнее преобразователей Гильберта вида 4. Остается показать, что это преимущество преобразователей вида 3 можно использовать для уменьшения максимума ошибки аппроксимации по сравнению с преобразователями вида 4. Этот подход к проектированию преобразователей будет обсуждаться в данном разделе позже.

На фиг. 3.74–3.77 приведены частотные характеристики нескольких КИХ-преобразователей Гильберта. На фиг. 3.74 изображены импульсная и амплитудная характеристики, а также функция ошибки аппроксимации преобразователя Гильберта с $N = 31$, $F_L = 0,04$ и $F_H = 0,46$. Поскольку верхняя и нижняя переходные полосы имеют равную ширину, каждый второй коэффициент импульсной характеристики равен нулю. Максимум ошибки аппроксимации этого преобразователя равен 0,008094, а кривая ошибки имеет, как было показано ранее, равновеликие пульсации. На фиг. 3.75 представлены те же характеристики пре-



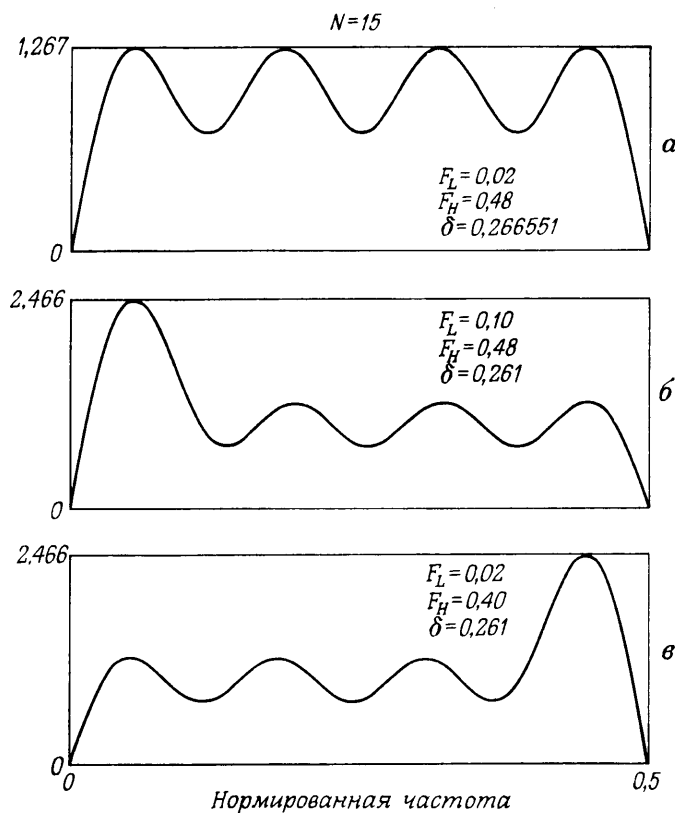
Фиг. 3.74. Характеристики оптимального преобразователя Гильберта.

образователя Гильберта с $N = 32$, $F_L = 0,04$ и $F_H = 0,46$. Как уже было отмечено, даже при одинаковой ширине верхней и нижней переходных полос все коэффициенты импульсной характеристики отличны от нуля из-за отсутствия симметрии в частотной характеристике фильтров вида 4. Как видно из фиг. 3.75, б, амплитудная характеристика имеет в диапазоне $0,46 < f \leq 0,5$ произвольный вид, поэтому ее значения здесь нельзя предсказать. Из фиг. 3.75, в видно, что кривая ошибки опять имеет равновеликие пульсации в полосе аппроксимации, но максимум ошибки аппроксимации в этом случае равен 0,007175.



Фиг. 3.75. Характеристики оптимального преобразователя Гильберта.

На фиг. 3.76 и 3.77 иллюстрируются случаи, когда верхняя и нижняя переходные полосы выбираются неодинаковыми. На фиг. 3.76 приведены характеристики трех преобразователей Гильберта с $N=15$ и следующими частотами среза: а) $F_L=0,02$ и $F_H=0,48$; б) $F_L=0,1$ и $F_H=0,48$; в) $F_L=0,02$ и $F_H=0,40$. Максимумы ошибок аппроксимации равны 0,266551, 0,260817 и 0,260737 соответственно. Таким образом, даже при изменении одной из частот среза в пять раз (т. е. от 0,02 до 0,10) максимум ошибки меняется всего на 2%. Более того, из фиг. 3.76, б и в видно, что амплитудная характеристика имеет значительный нежелательный пик в широкой переходной полосе. Кроме того,

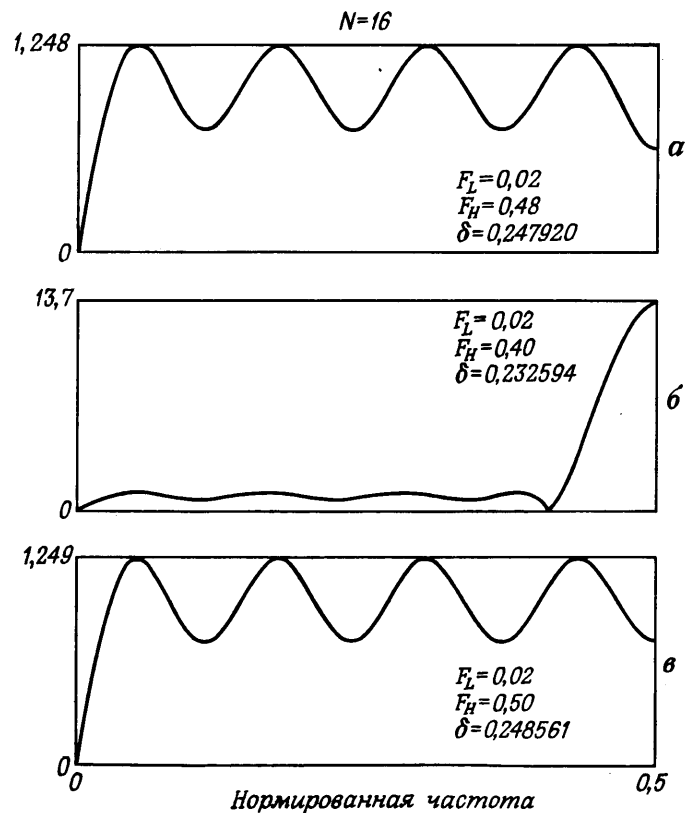


Фиг. 3.76. Характеристики оптимальных преобразователей Гильберта.

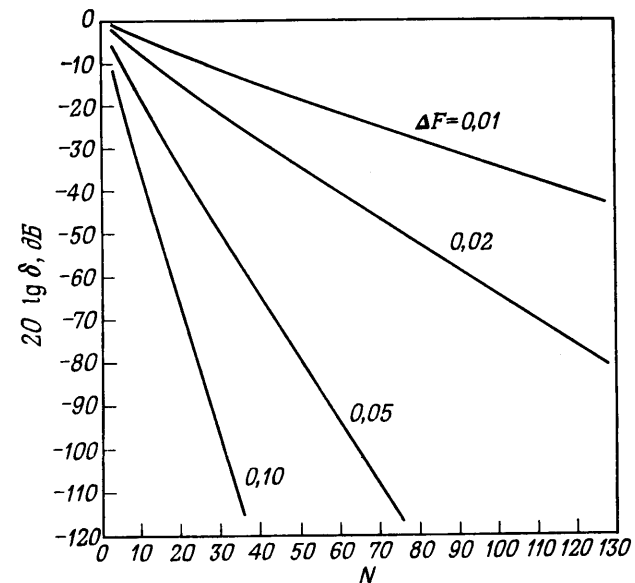
при неравных переходных полосах частотная характеристика не симметрична и все коэффициенты импульсной характеристики не равны нулю. И так, незначительное уменьшение максимума ошибки за счет использования неравных переходных полос не компенсирует нежелательных эффектов в амплитудной и импульсной характеристиках. Более того, из приведенного и других аналогичных примеров видно, что в случае, когда импульсная характеристика содержит нечетное количество отсчетов, максимум ошибки аппроксимации определяется главным образом меньшей из двух переходных полос.

На фиг. 3.77 приведены аналогичные характеристики преобразователей Гильберта с неравными переходными полосами, но для четного $N=16$. Верхняя и нижняя частоты среза этих преобразователей равны: а) $F_L=0,02$, $F_H=0,48$; б) $F_L=0,02$, $F_H=0,40$,

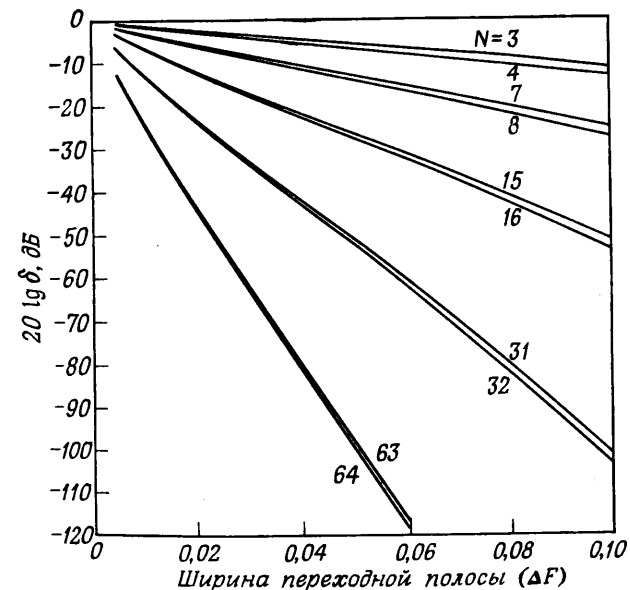
в) $F_L = 0,02$, $F_H = 0,50$. Соответствующие им максимумы ошибки аппроксимации равны 0,247920, 0,232594 и 0,248561. В примере на фиг. 3.77, б (где верхняя переходная полоса в пять раз больше нижней) амплитудная характеристика опять имеет значительный пик в области верхней переходной полосы. Максимум ошибки аппроксимации для этого случая примерно на 6% меньше, чем при равных переходных полосах. Таким образом, незначительное уменьшение максимума ошибки не компенсирует появления нежелательного пика в частотной характеристике. С другой стороны, из фиг. 3.77, в следует, что если ширина верхней переходной полосы равна нулю, т. е. если $F_H = 0,5$, то максимум ошибки почти не меняется. Из этих и других примеров видно, что максимум ошибки аппроксимации почти полностью определяется шириной нижней переходной полосы (из-за того, что характеристика равна нулю при $\omega = 0$). Таким образом, для минимизации пика



Фиг. 3.77. Характеристики оптимальных преобразователей Гильберта.



Фиг. 3.78. Зависимость ошибки аппроксимации от N для оптимальных преобразователей Гильберта.



Фиг. 3.79. Зависимость ошибки аппроксимации от ΔF для оптимальных преобразователей Гильберта.

в верхней переходной полосе ее ширину следует выбирать меньше ширины нижней переходной полосы (или равную ей).

Основными параметрами преобразователя Гильберта являются N , F_L , F_H и δ — максимум ошибки аппроксимации (или пульсация) фильтра. Если положить, что $F_H = 0,5 - F_L$, т. е. что верхняя и нижняя переходные полосы равны, то можно задавать только три параметра: N , δ и $\Delta F = F_L = 0,5 - F_H$. На фиг. 3.78 и 3.79 приведены результаты большого числа измерений δ как функции ΔF и N . На фиг. 3.78 представлены графики зависимости величины $20 \lg \delta$ от N при $\Delta F = 0,01$; $0,02$; $0,05$ и $0,1$ для четных и нечетных N в диапазоне $3 \leq N \leq 128$. В масштабе фиг. 3.78 кривые для четных и нечетных N при одной и той же ширине переходных полос практически неразличимы, поэтому они изображены одной кривой. Из этих кривых видно, что максимум ошибки уменьшается с увеличением N тем быстрее, чем шире переходная полоса преобразователя Гильберта. Так, при $\Delta F = 0,01$ величина $20 \lg \delta$ уменьшается приблизительно лишь на 42 дБ при изменении N от 3 до 128, тогда как при $\Delta F = 0,05$ величина $20 \lg \delta$ уменьшается приблизительно на 112 дБ при изменении N от 3 до 76.

Из фиг. 3.79, где приведены кривые зависимости величины $20 \lg \delta$ от ΔF для четных и нечетных N , а именно для $N = 3, 4, 7, 8, 15, 16, 31, 32, 63$ и 64 , видно, что, когда ΔF стремится к нулю $20 \lg \delta$ стремится к 0 дБ, т. е. максимум ошибки аппроксимации стремится к 1 независимо от величины N . Кроме того, максимум ошибки уменьшается тем быстрее с увеличением ширины переходной полосы преобразователя Гильберта, чем больше величина N .

Таким образом, для того чтобы рассчитать наиболее эффективный КИХ-преобразователь Гильберта (т. е. получить заданную величину ошибки аппроксимации, используя наименьшее число умножений на отсчет), следует выбирать как можно более широкую переходную полосу и использовать импульсную характеристику, содержащую нечетное число коэффициентов. Например, чтобы получить максимум ошибки меньше 1% ($\delta \leq 0,01$), нужно использовать следующие значения N (в функции ΔF):

ΔF	Нечетные N	Число умножений на отсчет	Четные N	Число умножений на отсчет
0,01	119	30	118	59
0,02	59	15	60	30
0,05	27	7	24	12
0,10	11	3	12	6

Ниже приведены значения N , которые требуются для обеспечения максимума ошибки менее 0,1% ($\delta \leq 0,001$):

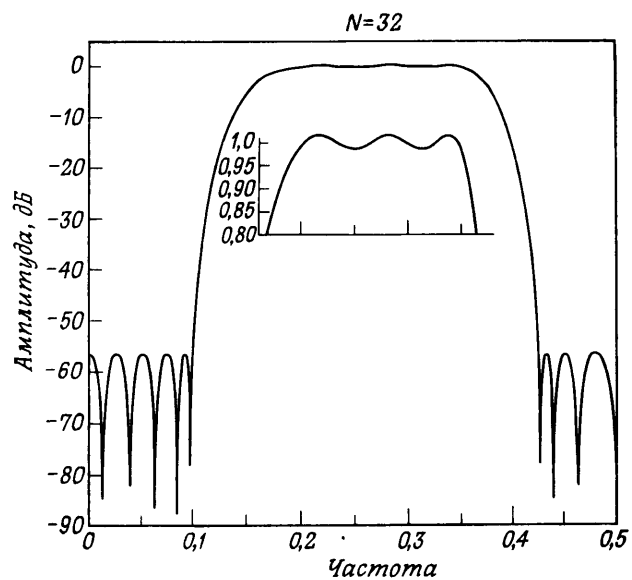
ΔF	Нечетные N	Число умножений на отсчет	Четные N	Число умножений на отсчет
0,01	> 127	—	> 127	—
0,02	95	24	94	47
0,05	39	10	38	19
0,10	19	5	18	9

Приведенные таблицы указывают на существенное преимущество в реализации преобразователей Гильберта с нечетным N и симметричной частотной характеристикой.

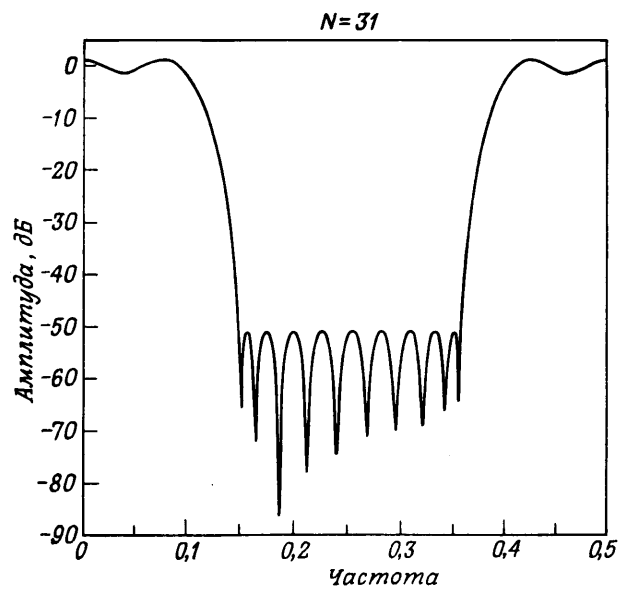
3.38. Многополосные оптимальные КИХ-фильтры

Как уже было сказано, в приложении к данной главе приведена программа оптимального проектирования многополосных фильтров, в том числе полосовых и режекторных. На фиг. 3.80—3.83 представлены амплитудные характеристики (в логарифмическом масштабе) трех типичных многополосных фильтров. На фиг. 3.80 изображена характеристика полосового фильтра ($N = 32$) со следующими граничными частотами: 0 и 0,1 для нижней полосы не пропускания, 0,2 и 0,35 для полосы пропускания, 0,425 и 0,5 для верхней полосы не пропускания. Весовая функция уменьшает ошибку в полосе не пропускания в 10 раз по сравнению с ошибкой в полосе пропускания, так что максимум ошибки равен 0,00151 (56,4 дБ) в полосе не пропускания и 0,0151 в полосе пропускания. На фиг. 3.81 изображена характеристика режекторного фильтра ($N = 31$) со следующими граничными частотами: 0 и 0,1 для нижней полосы пропускания, 0,15 и 0,36 для полосы не пропускания, 0,41 и 0,50 для верхней полосы пропускания. Весовая функция уменьшает ошибку в полосе не пропускания в 50 раз по сравнению с ошибкой в полосах пропускания. Максимум ошибки в полосе пропускания равен 0,144, тогда как в полосе не пропускания он равен 0,00288 (50,8 дБ).

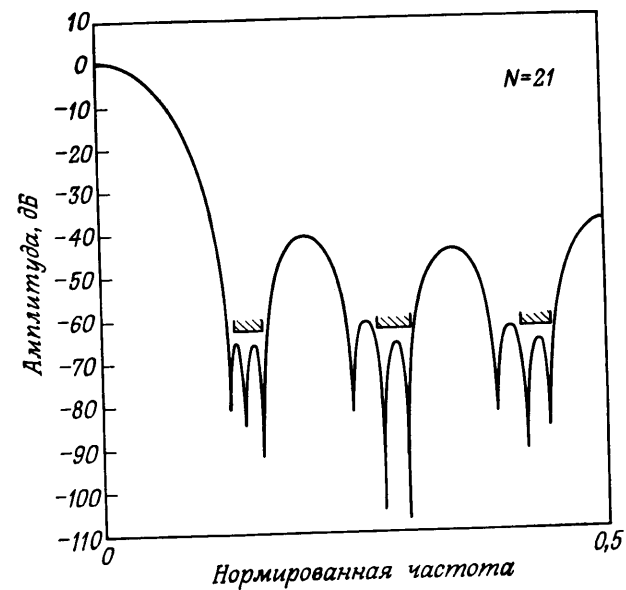
На фиг. 3.82 представлена частотная характеристика четырехполосного фильтра с одной полосой пропускания и тремя полосами не пропускания со следующими граничными частотами: 0 и 0,01786 для полосы пропускания, 0,125 и 0,1607 для первой полосы не пропускания, 0,2679 и 0,3036 для второй и 0,411 и 0,4464 для третьей полос не пропускания. Максимум ошибки был ограничен величиной 0,0144 в полосе пропускания и величиной 0,000708 во всех трех полосах не пропускания. Кроме того, было



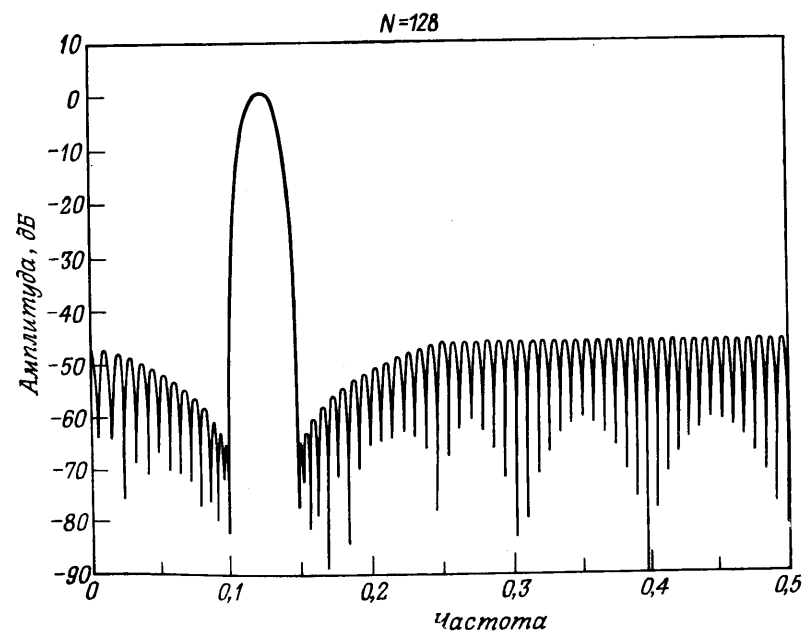
Фиг. 3.80. Частотная характеристика оптимального (в минимаксном смысле) полосового фильтра.



Фиг. 3.81. Частотная характеристика оптимального (в минимаксном смысле) режекторного фильтра.



Фиг. 3.82. Частотная характеристика оптимального многополосного фильтра.



Фиг. 3.83. Частотная характеристика оптимального полосового фильтра с произвольными весовыми коэффициентами в полосе непропускания.

поставлено условие, чтобы длина импульсной характеристики N равнялась 21, так как этот фильтр входил в состав цифрового устройства в качестве интерполятора. Фильтр с характеристикой, изображенной на фиг. 3.82, удовлетворяет всем перечисленным требованиям и был использован в системе телефонной связи.

Наконец, на фиг. 3.83 приведена частотная характеристика полосового фильтра, при расчете которого была использована нестандартная весовая функция

$$W(e^{j2\pi f}) = \begin{cases} \frac{10}{1-9f}, & 0 \leq f \leq 0,1, \\ 1, & 0,12 \leq f \leq 0,13, \\ \frac{10}{9f-1,25}, & 0,15 \leq f \leq 0,25, \\ 10, & 0,25 \leq f \leq 0,5. \end{cases}$$

На границах полос непропускания ($f = 0,1$ и $f = 0,15$) весовой коэффициент равен 100, а ошибка аппроксимации составляет 0,005. При $f = 0$ и $0,25$ весовой коэффициент уменьшается до 10, так что ошибка равна 0,05. При промежуточных значениях частоты максимум ошибки линейно возрастает.

3.39. Расчет фильтров при одновременном ограничении и во временной, и в частотной областях

До сих пор рассматривался расчет цифровых фильтров, аппроксимирующих лишь заданные частотные характеристики. Довольно часто приходится вводить ограничения одновременно и для временной, и для частотной характеристик фильтра. Например, при проектировании фильтров нижних частот может возникнуть необходимость ограничения выброса (или пульсаций) переходной характеристики фильтра при одновременном сохранении в разумных пределах его частотной характеристики. Задачу такого типа можно решить методами линейного программирования, поскольку переходная характеристика представляет собой линейную комбинацию коэффициентов импульсной характеристики.

В качестве примера рассмотрим расчет фильтра нижних частот вида 1, удовлетворяющего следующим требованиям:

$$\text{полоса пропускания: } 1 - \delta_1 \leq H^*(e^{j\omega}) \leq 1 + \delta_1, \quad (3.154)$$

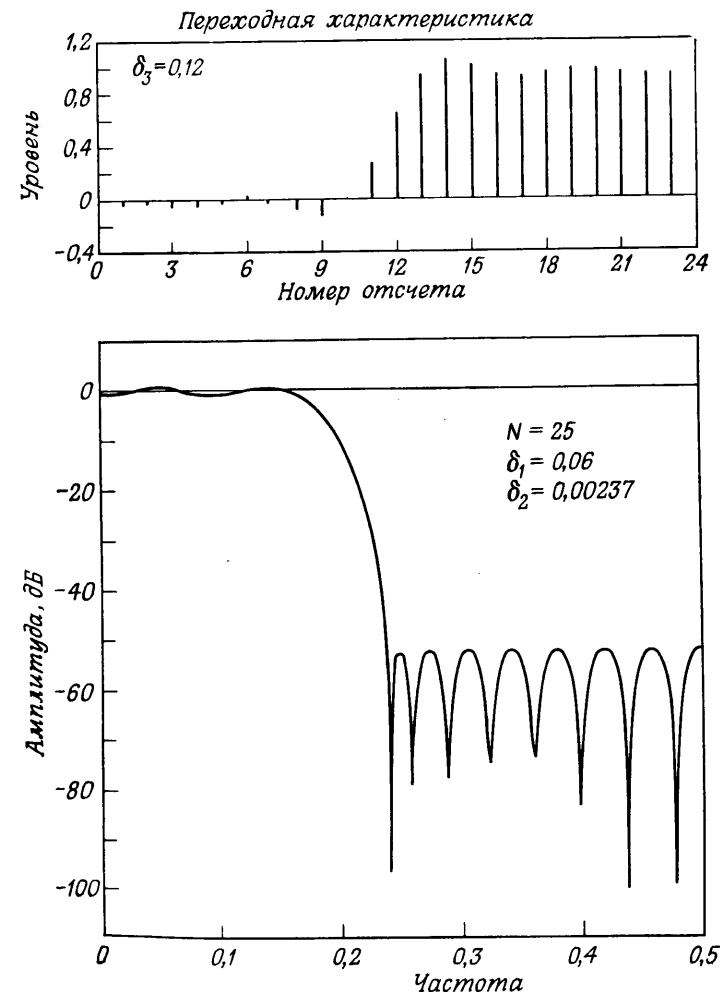
$$\text{полоса непропускания; } -\delta_2 \leq H^*(e^{j\omega}) \leq \delta_2, \quad (3.155)$$

$$\text{переходная характеристика: } -\delta_3 \leq g(n) \leq \delta_3, \quad 0 \leq n \leq N_1. \quad (3.156)$$

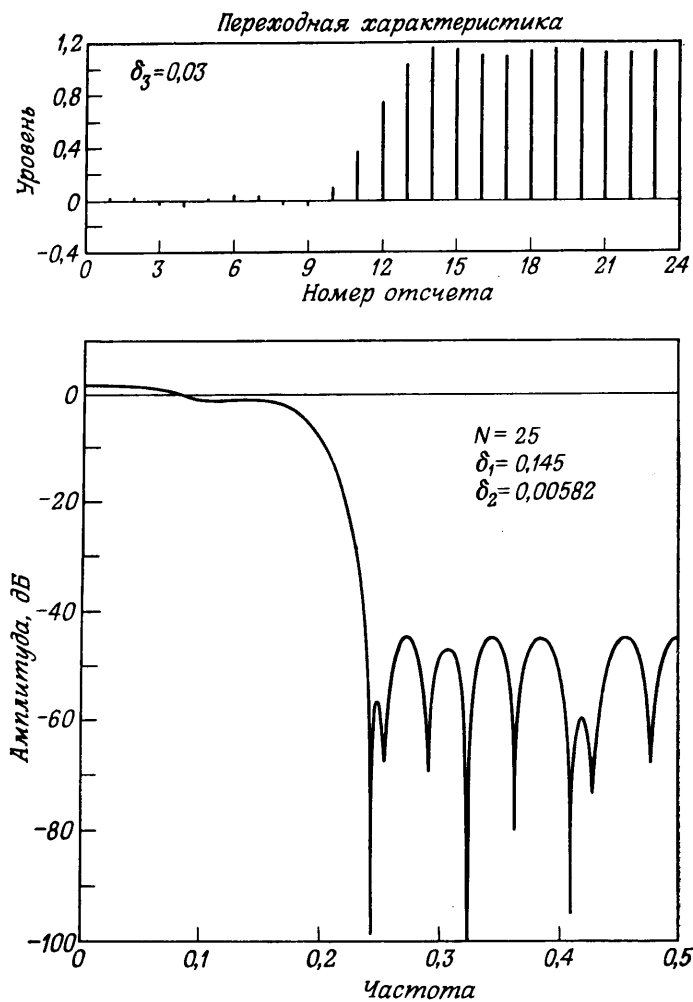
Здесь величина N_1 определяет область, в которой переходная характеристика, определяемая выражением

$$g(n) = \sum_{m=0}^n h(m), \quad (3.157)$$

колеблется около нуля. Ясно, что $g(n)$ равна линейной комбинации коэффициентов импульсной характеристики фильтра, поэтому система ограничений (3.154)–(3.156) может быть решена методами линейного программирования. Например, можно зафиксировать какие-либо один или два параметра из трех ($\delta_1, \delta_2, \delta_3$) и минимизировать оставшиеся (или оставшийся) либо принять, что $\delta_1 = \alpha_1 \delta$, $\delta_2 = \alpha_2 \delta$ и $\delta_3 = \alpha_3 \delta$, где α_1, α_2 и α_3 — константы,



Фиг. 3.84. Переходная и частотная характеристики оптимального фильтра нижних частот без ограничений во временной области.



Фиг. 3.85. Переходная и частотная характеристики оптимального фильтра нижних частот с ограничениями во временной области.

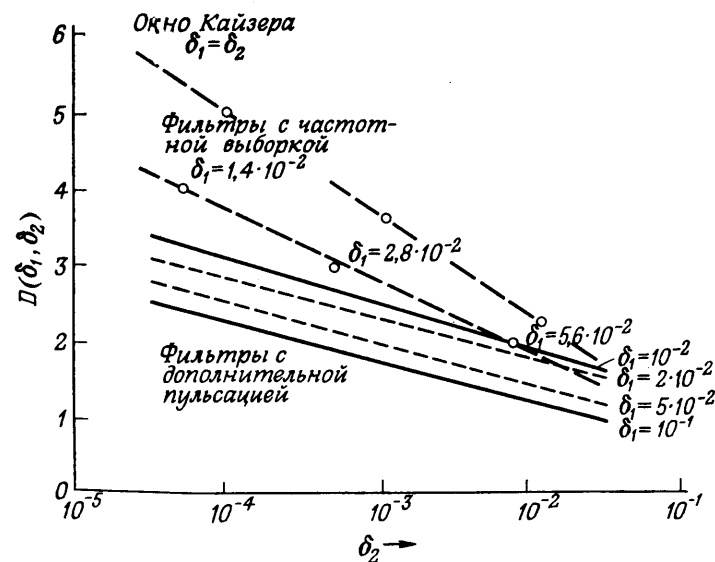
и минимизировать одновременно все три параметра, отыскивая минимум δ .

Фиг. 3.84 и 3.85 иллюстрируют применение этого метода. На фиг. 3.84 приведены переходная и частотная (в логарифмическом масштабе) характеристики фильтра нижних частот вида 1 ($N = 25$), для которого было принято $\delta_1^c = 25\delta_2$, а величина δ_2 минимизировалась. Параметр δ_3 был взят равным 1, т. е. выброс

переходной характеристики никак не ограничивался. Рассчитанный фильтр имел следующие параметры: $\delta_3 = 0,12$, $\delta_1 = 0,06$ и $\delta_2 = 0,00237$. На фиг. 3.85 приведены переходная и частотная (в логарифмическом масштабе) характеристики еще одного фильтра, у которого минимизировалась величина δ_2 при $\delta_3 = 0,03$ и $\delta_1 = 25\delta_2$. (Максимум пульсаций переходной характеристики задан здесь только для 10 первых отсчетов, т. е. там, где характеристика колеблется около нуля.) Параметры этого фильтра оказались равными $\delta_1 = 0,145$, $\delta_2 = 0,00582$ и $\delta_3 = 0,03$. Из фиг. 3.85 видно, что требования к пульсациям переходной характеристики удовлетворены за счет того, что пульсации частотной характеристики перестали быть равновеликими. Используя методы линейного программирования, можно найти компромиссное решение, удовлетворяющее требованиям и к временной, и к частотной характеристикам, и рассчитать фильтр, наилучшим образом подходящий для конкретных условий.

3.40. Непосредственное сравнение различных КИХ-фильтров нижних частот

В данной главе были рассмотрены три класса методов расчета цифровых КИХ-фильтров: взвешивания, частотной выборки и оптимальным. Несмотря на существование большого числа спосо-



Фиг. 3.86. Сравнение фильтров нижних частот, рассчитанных методами взвешивания, частотной выборки и оптимальным (по критерию минимаксной ошибки).

бов сравнения получаемых фильтров, возможно, самый объективный (и самый полезный) состоит в сравнении значений ширины переходных полос фильтров нижних частот, необходимых для преодоления заданных требований к пульсациям в полосе пропускания δ_1 и в полосе непропускания δ_2 . При таком сравнении лучшими будут оптимальные фильтры, поскольку из всех КИХ-фильтров с линейной фазой при одинаковых заданных параметрах именно они обладают минимальной переходной полосой. Полезно, однако, знать, насколько хуже фильтры, рассчитанные другими методами.

На фиг. 3.86 сравниваются фильтры с окнами Кайзера, с частотной выборкой и с дополнительной пульсацией. Для сравнения используется величина $D = (N - 1) \Delta F$, изображенная в функции δ_2 с величиной δ_1 в качестве параметра, поскольку, как было показано выше, она практически не зависит от N (при больших N) и от ΔF и, таким образом, удобна для сравнения. Как и ожидалось, из фиг. 3.86 следует, что фильтры с дополнительной пульсацией обеспечивают наименьшую ширину переходной полосы (D) при фиксированных значениях δ_1 и δ_2 .

ЛИТЕРАТУРА

Весовые функции

1. Kaiser J. F., Design Methods for Sampled Data Filters, *Proc. First Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 224—236 (Nov. 1963).
2. Kaiser J. F., Digital Filters, Ch. 7 in: *System Analysis by Digital Computer*, Kuo F. F., Kaiser J. F., eds., Wiley, N. Y., 1966; есть русский перевод гл. 7 Д. Кайзера «Цифровые фильтры» в книге: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.
3. Blackman R. B., Tukey J. W., *The Measurement of Power Spectra*, Dover Publications, N.Y., 1958.
4. Heyliger G. E., The Scanning Function Approach to the Design of Numerical Filters, Report R-63-2, Martin Co., Denver, Colo., April 1963.
5. Heyliger G. E., Design of Numerical Filters: Scanning Functions and Equal Ripple Approximation, *Proc. Fourth Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 175—185 (1966).
6. Heyliger G. E., Halijak C. A., Topics in the Design of Moving Average Numerical Filters, *Proc. Second Asilomar Conf. on Circuits and Systems*, 214—220 (1968).
7. Helms H. D., Nonrecursive Digital Filters: Design Methods for Achieving Specifications on Frequency Response, *IEEE Trans. Audio and Electroacoustics*, 16, No. 3, 336—342 (Sept. 1968).

Фильтры с частотной выборкой

1. Gold B., Rader C. M., *Digital Processing of Signals*, McGraw-Hill, N. Y., 1969; есть русский перевод: Голд Б., Рэйдер Ч., Цифровая обработка сигналов, изд-во «Советское радио», 1973.
2. Gold B., Jordan K., A Note on Digital Filter Synthesis, *Proc. IEEE*, 56, No. 10, 1717—1718 (Oct. 1968); есть русский перевод: Голд, Джордан мл., О синтезе цифровых фильтров, *ТИИЭР*, 56, № 10 (1968).

3. Gold B., Jordan K., A Direct Search Procedure for Designing Finite Duration Impulse Response Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 17, No. 1, 33—36 (March 1969).
4. Rabiner L. R., Gold B., McGonegal C. A., An Approach to the Approximation Problem for Nonrecursive Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 18, No. 2, 83—106 (June 1970).
5. Rabiner L. R., Steiglitz K., The Design of Wide-Band Recursive and Nonrecursive Digital Differentiators, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 18, No. 2, 204—209 (June 1970).
6. Rabiner L. R., Schafer R. W., Recursive and Nonrecursive Realizations of Digital Filters Designed by Frequency Sampling Techniques, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 19, No. 3, 200—207 (Sept. 1971).
7. Rabiner L. R., Schafer R. W., Correction to Recursive and Nonrecursive Realizations of Digital Filters Designed by Frequency Sampling Techniques, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, No. 1, 104—105 (March 1972).

Оптимальные фильтры

1. Rabiner L. R., Techniques for Designing Finite-Duration Impulse Response Digital Filters, *IEEE Trans. on Communication Technology*, 19, No. 2, 188—195 (1971).
2. Herrmann O., Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase, *Electronics Letters*, 6, No. 11, 328—329 (1970).
3. Herrmann O., Schuessler H. W., Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase, *Electronics Letters*, 6, No. 11, 329—330 (1970).
4. Helms H. D., Digital Filters with Equiripple or Minimax Responses, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, 19, No. 1, 87—94 (1971).
5. Hofstetter E., Oppenheim A., Siegel J., A New Technique for the Design of Nonrecursive Digital Filters, *Proc. Fifth Annual Princeton Conf. on Information Sciences and Systems*, 64—72 (1971).
6. Hofstetter E., Oppenheim A., Siegel J., On Optimum Nonrecursive Digital Filters, *Proc. Ninth Allerton Conf. on Circuit and System Theory*, 789—798 (Oct. 1971).
7. Parks T. W., McClellan J. H., Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase, *IEEE Trans. Circuit Theory*, CT-19, 189—194 (March 1972).
8. Rabiner L. R., The Design of Finite Impulse Response Digital Filters Using Linear Programming Techniques, *Bell Syst. Tech. J.*, 51, No. 6, 1177—1198 (July—Aug. 1972).
9. Rabiner L. R., Linear Program Design of Finite Impulse Response (FIR) Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, No. 4, 280—288 (Oct. 1972).
10. Parks T. W., McClellan J. H., A Program for the Design of Linear Phase Finite Impulse Response Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-20, No. 3, 195—199 (Aug. 1972).
11. Parks T. W., Rabiner L. R., McClellan J. H., On the Transition Width of Finite Impulse Response Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 1, 1—4 (Feb. 1973).
12. Rabiner L. R., Herrmann O., The Predictability of Certain Optimum Finite Impulse Response Digital Filters, *IEEE Trans. on Circuit Theory*, CT-20, No. 4, 401—408 (July 1973).
13. Herrmann O., Rabiner L. R., Chan D. S. K., Practical Design Rules for Optimum Finite Impulse Response Lowpass Digital Filters, *Bell Syst. Tech. J.*, 52, No. 6, 769—799 (July—Aug. 1973).
14. Rabiner L. R., Herrmann O., On the Design Optimum FIR Low-Pass Filters with Even Impulse Response Duration, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 4, 329—336 (Aug. 1973).

15. Rabiner L. R., Approximate Design Relationships for Low-Pass FIR Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 5, 456—460 (Oct. 1973).
16. Rabiner L. R., Schafer R. W., On the Behavior of Minimax Relative Error FIR Digital Differentiators, *Bell Syst. Tech. J.*, 53, No. 2, 333—361 (Feb. 1974).
17. Rabiner L. R., Schafer R. W., On the Behavior of Minimax FIR Digital Hilbert Transformers, *Bell Syst. Tech. J.*, 53, 2, 363—390 (Feb. 1974).
18. McClellan J. H., Parks T. W., Rabiner L. R., A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters, *IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics*, AU-21, No. 6, 506—526 (Dec. 1973).

Линейное программирование

1. Dantzig G., Linear Programming and Extensions, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1963.
2. Hadley G., Linear Programming, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1963.
3. Hu T. C., Integer Programming and Newtork Flows, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1969.
4. Spivey W. A., Thrall R. M., Linear Optimization, Holt, Rinehart and Winston, Inc., N.Y., 1970.
5. Gass S. I., Linear Programming, McGraw-Hill, N.Y., 1969.
6. Simonnard M., Linear Programming, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1966.

Методы оптимизации

1. Cheney E. W., Introduction to Approximation Theory, McGraw-Hill, N. Y., 1966.
2. Rice J. R., The Approximation of Functions, Addison-Wesley Publ. Co., Reading, Mass., 1964.
3. Aoki M., Introduction to Optimization Techniques, The Macmillan Co., N. Y., 1971.
4. Meinardus G., Approximation of Functions: Theory and Numerical Methods, Springer-Verlag, N. Y., 1967.
5. Ремез Е. Я., Общие вычислительные методы чебышевского приближения. Задачи с линейно входящими вещественными параметрами, Изд-во АН УССР, Киев, 1957.

Приложение

В приложении приведена написанная на ФОРТРАНе программа расчета разнообразных оптимальных (минимаксных) КИХ-фильтров, в том числе фильтров нижних и верхних частот, полосовых, режекторных, а также дифференциаторов и преобразователей Гильберта.

Для иллюстрации применения этой программы даны четыре примера. Текст программы приводится сразу за примерами.

Пример 1. Рассчитать 24-точечный фильтр нижних частот с частотой среза полосы пропускания 0,08, частотой среза полосы непропускания 0,16 и отношением максимумов пульсаций 1,0.

Входные параметры в этом примере равны: $N = 24$, $F_p = 0,08$, $F_s = 0,16$ и $K = \delta_1 \delta_2 = 1$. Следовательно, перфокарты с заданными характеристиками имеют вид

FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
LINEAR PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
REMEZ EXCHANGE ALGORITHM
BANDPASS FILTER

FILTER LENGTH = 24
***** IMPULSE RESPONSE *****
H (1) = 0.33740917E-02 = H (24)
H (2) = 0.14938299E-01 = H (23)
H (3) = 0.10569360E-01 = H (22)
H (4) = 0.25415067E-02 = H (21)
H (5) = -0.15929992E-01 = H (20)
H (6) = -0.34085343E-01 = H (19)
H (7) = -0.38112177E-01 = H (18)
H (8) = -0.14629169E-01 = H (17)
H (9) = 0.40089541E-01 = H (16)
H (10) = 0.11540713E 00 = H (15)
H (11) = 0.18850752E 00 = H (14)
H (12) = 0.23354606E 00 = H (13)

	BAND 1	BAND 2	BAND
LOWER BAND EDGE	0.	0.16000000	
UPPER BAND EDGE	0.08000000	0.50000000	
DESIRED VALUE	1.00000000	0.	
WEIGHTING	1.00000000	1.00000000	
DEVIATION	0.01243364	0.01243364	
DEVIATION IN DB	-38.10803413	-38.10803413	

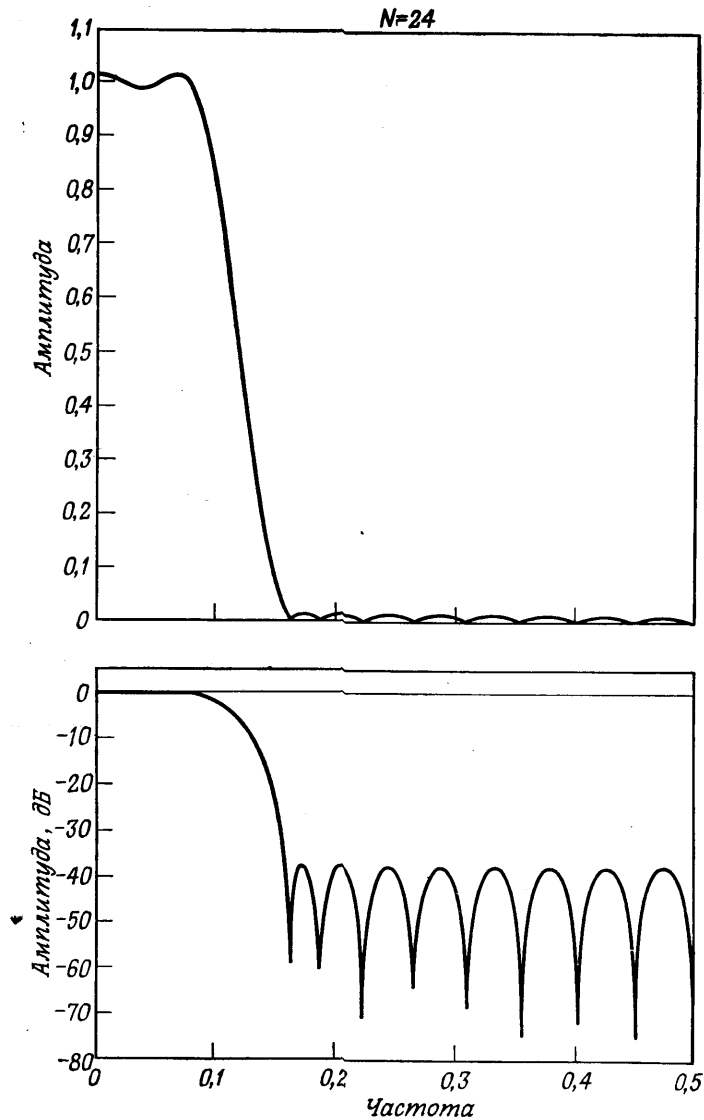
EXTREMAL FREQUENCIES
0. 0.0364583 0.0677083 0.0800000 0.1600000
0.1730208 0.2068750 0.2459375 0.2876042 0.3318750
0.3787500 0.4256251 0.4751043

TIME= 0.7651562 SECONDS

Фиг. А.3.1. Распечатка результатов расчета 24-точечного оптимального фильтра нижних частот.

Карта 1. 24, 1, 2, 0, 16
Карта 2. 0, 0.08, 0.16, 0.5
Карта 3. 1, 0
Карта 4. 1, 1

В карте 1 заданы (по порядку) N , вид фильтра, число полос, признак перфорации и сетка для интерполяции; в карте 2 заданы границы каждой полосы; карта 3 содержит заданные значения характеристики в каждой полосе; карта 4 определяет заданные веса для пульсаций в каждой полосе. На фиг. А.3.1 приведена распечатка результатов расчета (включая время счета на ЦВМ Honeywell 6000), а на фиг. А.3.2 изображена частотная характеристика рассчитанного фильтра нижних частот. Из распечатки на фиг. А.3.1 видно, что полученные значения пиков пульсаций равны $\delta_1 = \delta_2 = 0,0015$ (— 56,4 дБ).



Фиг. А.3.2. Частотная характеристика оптимального фильтра нижних частот (в линейном и логарифмическом масштабах) с параметрами, заданными на фиг. А.3.1.

Пример 2. Рассчитать 32-точечный полосовой фильтр с частотами среза полосы непропускания 0,1 и 0,425, частотами среза полосы пропускания 0,2 и 0,35 и весовыми коэффициентами пульсаций, равными 10 и 1 в полосах непропускания и пропускания соответственно.

В этом случае перфокарты с заданными характеристиками имеют вид

Карта 1. 32, 1, 3, 0, 16

Карта 2. 0, 0,1, 0,2, 0,35, 0,425, 0,5

Карта 3. 0, 1, 0

Карта 4. 10, 1, 10

На фиг. А.3.3 приведена распечатка результатов расчета этого фильтра; частотная характеристика рассчитанного фильтра показана на фиг. 3.80.

FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
LINEAR PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
REMEZ EXCHANGE ALGORITHM
BANDPASS FILTER

FILTER LENGTH = 32

***** IMPULSE RESPONSE *****

H (1) = -0.57534121E-02 = H (32)
H (2) = 0.99027198E-03 = H (31)
H (3) = 0.75733545E-02 = H (30)
H (4) = -0.65141192E-02 = H (29)
H (5) = 0.13960525E-01 = H (28)
H (6) = 0.22951469E-02 = H (27)
H (7) = -0.19994067E-01 = H (26)
H (8) = 0.71369560E-02 = H (25)
H (9) = -0.39657363E-01 = H (24)
H (10) = 0.11260114E-01 = H (23)
H (11) = 0.66233643E-01 = H (22)
H (12) = -0.10497223E-01 = H (21)
H (13) = 0.85136133E-01 = H (20)
H (14) = -0.12024993E 00 = H (19)
H (15) = -0.29678577E 00 = H (18)
H (16) = 0.30410917E 00 = H (17)

	BAND 1	BAND 2	BAND 3	BAND
LOWER BAND EDGE	0.	0.20000000	0.42500000	
UPPER BAND EDGE	0.10000000	0.35000000	0.50000000	
DESIRED VALUE	0.	1.00000000	0.	
WEIGHTING	10.00000000	1.00000000	10.00000000	
DEVIATION	0.00151312	0.01513118	0.00151312	
DEVIATION IN DB	-56.40254641	-36.40254641	-56.40254641	

EXTREMAL FREQUENCIES

0.	0.0273437	0.0527344	0.0761719	0.0937500
0.1000000	0.2000000	0.2195312	0.2527344	0.2839844
0.3132812	0.3386719	0.3500000	0.4250000	0.4328125
0.4503906	0.4796875			

TIME= 0.8065938 SECONDS

Фиг. А.3.3. Распечатка результатов расчета 32-точечного оптимального полосового фильтра.

Пример 3. Рассчитать 32-точечный дифференциатор с частотой среза 0,5.

Перфокарты с заданными характеристиками в этом случае имеют вид

Карта 1. 32, 2, 1, 0, 16

Карта 2. 0, 0,5

Карта 3. 1

Карта 4. 1

На фиг. А.3.4 приведена распечатка результатов расчета на

```
*****
FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
LINEAR PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
REMEZ EXCHANGE ALGORITHM
DIFFERENTIATOR
```

FILTER LENGTH = 32

***** IMPULSE RESPONSE *****

```
H( 1) = -0.62713091E-03 = -H( 32)
H( 2) =  0.85633433E-03 = -H( 31)
H( 3) = -0.42418549E-03 = -H( 30)
H( 4) =  0.39901518E-03 = -H( 29)
H( 5) = -0.43437273E-03 = -H( 28)
H( 6) =  0.49969450E-03 = -H( 27)
H( 7) = -0.59634961E-03 = -H( 26)
H( 8) =  0.73277031E-03 = -H( 25)
H( 9) = -0.93002681E-03 = -H( 24)
H(10) =  0.12270042E-02 = -H( 23)
H(11) = -0.17012820E-02 = -H( 22)
H(12) =  0.25272341E-02 = -H( 21)
H(13) = -0.41601159E-02 = -H( 20)
H(14) =  0.81294555E-02 = -H( 19)
H(15) = -0.22539097E-01 = -H( 18)
H(16) =  0.20266535E 00 = -H( 17)
```

	BAND 1	BAND
LOWER BAND EDGE	0.	
UPPER BAND EDGE	0.50000000	
DESIRED SLOPE	1.00000000	
WEIGHTING	1.00000000	
DEVIATION	0.00620231	

EXTREMAL FREQUENCIES

0.0019531	0.0332031	0.0664062	0.0996094	0.1328125
0.1640625	0.1972656	0.2304687	0.2636719	0.2968750
0.3300781	0.3632812	0.3945312	0.4277344	0.4589844
0.4863281	0.5000000			

TIME= 1.0845625 SECONDS

Фиг. А.3.4. Распечатка результатов расчета 32-точечного оптимального дифференциатора.

ЦВМ этого дифференциатора, а его частотная характеристика показана на фиг. 3.68.

Пример 4. Рассчитать 20-точечный преобразователь Гильберта с граничными частотами 0,05 и 0,5.

Входные перфокарты в этом примере имеют вид

Карта 1. 20, 3, 1, 0, 16

Карта 2. 0,05, 0,5

Карта 3. 1

Карта 4. 1

```
*****
FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)
LINEAR PHASE DIGITAL FILTER DESIGN
REMEZ EXCHANGE ALGORITHM
HILBERT TRANSFORMER
```

FILTER LENGTH = 20

***** IMPULSE RESPONSE *****

```
H( 1) =  0.16026190E-01 = -H( 20)
H( 2) =  0.14173287E-01 = -H( 19)
H( 3) =  0.20452437E-01 = -H( 18)
H( 4) =  0.28736882E-01 = -H( 17)
H( 5) =  0.39852581E-01 = -H( 16)
H( 6) =  0.55333299E-01 = -H( 15)
H( 7) =  0.78542752E-01 = -H( 14)
H( 8) =  0.11823755E 00 = -H( 13)
H( 9) =  0.20664125E 00 = -H( 12)
H(10) =  0.63475619E 00 = -H( 11)
```

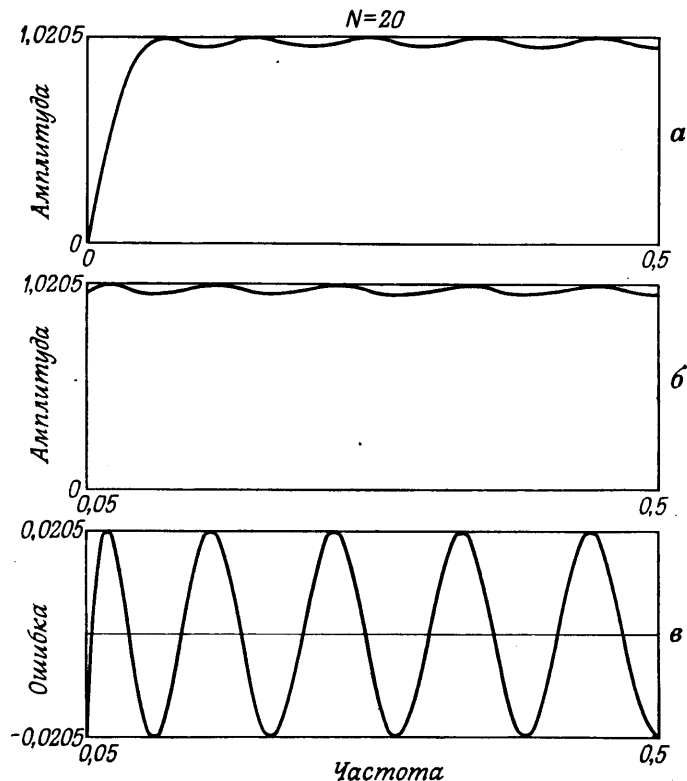
	BAND 1	BAND
LOWER BAND EDGE	0.05000000	
UPPER BAND EDGE	0.50000000	
DESIRED VALUE	1.00000000	
WEIGHTING	1.00000000	
DEVIATION	0.02055604	

EXTREMAL FREQUENCIES				
0.0500000	0.0656250	0.1031250	0.1468750	0.1937500
0.2437500	0.2937500	0.3468750	0.3968751	0.4500001
0.5000000				

TIME= 0.4742500 SECONDS

Фиг. А.3.5. Распечатка результатов расчета 20-точечного оптимального преобразователя Гильберта.

На фиг. А. 3.5 приведена распечатка результатов расчета на ЦВМ преобразователя Гильберта, а его частотная характеристика показана на фиг. А.3.6.



Фиг. А.3.6. Частотная характеристика и кривая ошибки оптимального преобразователя Гильберта с параметрами, приведенными на фиг. А.3.5.

Программа расчета КИХ-фильтров

```

C PROGRAM FOR THE DESIGN OF LINEAR PHASE FINITE IMPULSE
C RESPONSE (FIR) FILTERS USING THE REMEZ EXCHANGE ALGORITHM
C JIM MCCLELLAN, RICE UNIVERSITY, APRIL 13, 1973
C THREE TYPES OF FILTERS ARE INCLUDED--BANDPASS FILTERS
C DIFFERENTIATORS, AND HILBERT TRANSFORM FILTERS
C
C THE INPUT DATA CONSISTS OF 5 CARDS
C
C CARD 1--FILTER LENGTH, TYPE OF FILTER. 1--MULTIPLE
C PASSBAND/STOPBAND, 2--DIFFERENTIATOR, 3--HILBERT TRANSFORM
C FILTER. NUMBER OF BANDS, CARD PUNCH DESIRED, AND GRID
C DENSITY.
C
C CARD 2--BANDEDGES, LOWER AND UPPER EDGES FOR EACH BAND
C WITH A MAXIMUM OF 10 BANDS.
C
C CARD 3--DESIRED FUNCTION (OR DESIRED SLOPE IF A
C DIFFERENTIATOR) FOR EACH BAND.
C
C CARD 4--WEIGHT FUNCTION IN EACH BAND. FOR A
C DIFFERENTIATOR, THE WEIGHT FUNCTION IS INVERSELY
C PROPORTIONAL TO F.
C
C THE FOLLOWING INPUT DATA SPECIFIES A LENGTH 32 BANDPASS
C FILTER WITH STOPBANDS 0 TO 0.1 AND 0.425 TO 0.5, AND
C PASSBAND FROM 0.2 TO 0.35 WITH WEIGHTING OF 10 IN THE
C STOPBANDS AND 1 IN THE PASSBAND. THE IMPULSE RESPONSE
C WILL BE PUNCHED AND THE GRID DENSITY IS 32.
C
C SAMPLE INPUT DATA SETUP
C 32,1,3,1,32
C 0,0.1,0.2,0.35,0.425,0.5
C 0,1,0
C 10,1,10
C
C THE FOLLOWING INPUT DATA SPECIFIES A LENGTH 32 WIDEBAND
C DIFFERENTIATOR WITH SLOPE 1 AND WEIGHTING OF 1/F. THE
C IMPULSE RESPONSE WILL NOT BE PUNCHED AND THE GRID
C DENSITY IS ASSUMED TO BE 16.
C
C 32,2,1,0,0
C 0,0.5
C 1.0
C 1.0
C
C COMMON PI2,AD,DEV,X,Y,GRID,DES,WT,ALPHA,IEXT,NFCNS,NGRID
C DIMENSION IEXT(66),AD(66),ALPHA(66),X(66),Y(66)
C DIMENSION H(66)
C DIMENSION DES(1045),GRID(1045),WT(1045)
C DIMENSION EDGE(20),FX(10),WTX(10),DEVIAT(10)
C DOUBLE PRECISION PI2,PI
C DOUBLE PRECISION AD,DEV,X,Y
C PI2=6.283185307179586
C PI=3.141592653589793
C
C THE PROGRAM IS SET UP FOR A MAXIMUM LENGTH OF 128, BUT
C THIS UPPER LIMIT CAN BE CHANGED BY REDIMENSIONING THE
C ARRAYS IEXT, AD, ALPHA, X, Y, H TO BE NFMAX/2 + 2.
C THE ARRAYS DES, GRID, AND WT MUST DIMENSIONED
C 16 (NFMAX/2 + 2).
C

```

```

      NFMAX=128
100 CONTINUE
      JTYPE=0
C
C PROGRAM INPUT SECTION
C
      READ *,NFILT,JTYPE,NBANDS,JPUNCH,LGRID
      IF(NFILT.GT.NFMAX.OR.NFILT.LT.3) CALL ERROR
      IF(NBANDS.LE.0) NBANDS=1
C
C GRID DENSITY IS ASSUMED TO BE 16 UNLESS SPECIFIED
C OTHERWISE
C
      IF(LGRID.LE.0) LGRID=16
      JB=2*NBANDS
      READ *,(EDGE(J),J=1,JB)
      READ *,(FX(J),J=1,NBANDS)
      READ *,(WTX(J),J=1,NBANDS)
      IF(JTYPE.EQ.0) CALL ERROR
      NEG=1
      IF(JTYPE.EQ.1) NEG=0
      NODD=NFILT/2
      NODD=NFILT-2*NODD
      NFCNS=NFILT/2
      IF(NODD.EQ.1.AND.NEG.EQ.0) NFCNS=NFCNS+1
C
C SET UP THE DENSE GRID. THE NUMBER OF POINTS IN THE GRID
C IS (FILTER LENGTH + 1)*GRID DENSITY/2
C
      GRID(1)=EDGE(1)
      DELF=LGRID*NFCNS
      DELF=0.5/DELF
      IF(NEG.EQ.0) GO TO 135
      IF(EDGE(1).LT.DELF) GRID(1)=DELF
135 CONTINUE
      J=1
      L=1
      LBAND=1
140 FUP=EDGE(L+1)
145 TEMP=GRID(J)
C
C CALCULATE THE DESIRED MAGNITUDE RESPONSE AND THE WEIGHT
C FUNCTION ON THE GRID
C
      DES(J)=EFF(TEMP,FX,WTX,LBAND,JTYPE)
      WT(J)=WATE(TEMP,FX,WTX,LBAND,JTYPE)
      J=J+1
      GRID(J)=TEMP+DELF
      IF(GRID(J).GT.FUP) GO TO 150
      GO TO 145
150 GRID(J-1)=FUP
      DES(J-1)=EFF(FUP,FX,WTX,LBAND,JTYPE)
      WT(J-1)=WATE(FUP,FX,WTX,LBAND,JTYPE)
      LBAND=LBAND+1
      L=L+2
      IF(LBAND.GT.NBANDS) GO TO 160
      GRID(J)=EDGE(L)
      GO TO 140
160 NGRID=J-1
      IF(NEG.NE.NODD) GO TO 165
      IF(GRID(NGRID).GT.(0.5-DELF)) NGRID=NGRID-1

```

```

C
C SET UP A NEW APPROXIMATION PROBLEM WHICH IS EQUIVALENT
C TO THE ORIGINAL PROBLEM
C
      IF(NEG) 170,170,180
170 IF(NODD.EQ.1) GO TO 200
      DO 175 J=1,NGRID
      CHANGE=DCOS(PI*GRID(J))
      DES(J)=DES(J)/CHANGE
175 WT(J)=WT(J)*CHANGE
      GO TO 200
180 IF(NODD.EQ.1) GO TO 190
      DO 185 J=1,NGRID
      CHANGE=DSIN(PI*GRID(J))
      DES(J)=DES(J)/CHANGE
185 WT(J)=WT(J)*CHANGE
      GO TO 200
190 DO 195 J=1,NGRID
      CHANGE=DSIN(PI2*GRID(J))
      DES(J)=DES(J)/CHANGE
195 WT(J)=WT(J)*CHANGE
C
C INITIAL GUESS FOR THE EXTREMAL FREQUENCIES--EQUALLY
C SPACED ALONG THE GRID
C
200 TEMP=FLOAT(NGRID-1)/FLOAT(NFCNS)
      DO 210 J=1,NFCNS
210 IEXT(J)=(J-1)*TEMP+1
      IEXT(NFCNS+1)=NGRID
      NM1=NFCNS-1
      NZ=NFCNS+1
C
C CALL THE REMEZ EXCHANGE ALGORITHM TO DO THE APPROXIMATION
C PROBLEM
C
      CALL REMEZ(EDGE,NBANDS)
C
C CALCULATE THE IMPULSE RESPONSE.
C
      IF(NEG) 300,300,320
300 IF(NODD.EQ.0) GO TO 310
      DO 305 J=1,NM1
305 H(J)=0.5*ALPHA(NZ-J)
      H(NFCNS)=ALPHA(1)
      GO TO 350
310 H(1)=0.25*ALPHA(NFCNS)
      DO 315 J=2,NM1
315 H(J)=0.25*(ALPHA(NZ-J)+ALPHA(NFCNS+2-J))
      H(NFCNS)=0.5*ALPHA(1)+0.25*ALPHA(2)
      GO TO 350
320 IF(NODD.EQ.0) GO TO 330
      H(1)=0.25*ALPHA(NFCNS)
      H(2)=0.25*ALPHA(NM1)
      DO 325 J=3,NM1
325 H(J)=0.25*(ALPHA(NZ-J)-ALPHA(NFCNS+3-J))
      H(NFCNS)=0.5*ALPHA(1)-0.25*ALPHA(3)
      H(NZ)=0.0
      GO TO 350
330 H(1)=0.25*ALPHA(NFCNS)
      DO 335 J=2,NM1

```

```

335 H(J)=0.25*(ALPHA(NZ-J)-ALPHA(NFCNS+2-J))
      H(NFCNS)=0.5*ALPHA(1)-0.25*ALPHA(2)
C
C PROGRAM OUTPUT SECTION.
C
350 PRINT 360
360 FORMAT(1H1, 70(1H*)//25X, 'FINITE IMPULSE RESPONSE (FIR)'
      125X, 'LINEAR PHASE DIGITAL FILTER DESIGN'/
      225X, 'REMEZ EXCHANGE ALGORITHM'/)
      IF(JTYPE.EQ.1) PRINT 365
365 FORMAT(25X, 'BANDPASS FILTER'/)
      IF(JTYPE.EQ.2) PRINT 370
370 FORMAT(25X, 'DIFFERENTIATOR'/)
      IF(JTYPE.EQ.3) PRINT 375
375 FORMAT(25X, 'HILBERT TRANSFORMER'/)
      PRINT 378, NFILT
378 FORMAT(15X, 'FILTER LENGTH = ', I3/)
      PRINT 380
380 FORMAT(15X, '***** IMPULSE RESPONSE *****')
      DO 381 J=1, NFCNS
      K=NFILT+1-J
      IF(NEG.EQ.0) PRINT 382, J, H(J), K
      IF(NEG.EQ.1) PRINT 383, J, H(J), K
381 CONTINUE
382 FORMAT(20X, 'H(', I3, ') = ', E15.8, ' = H(', I4, ')')
383 FORMAT(20X, 'H(', I3, ') = ', E15.8, ' = -H(', I4, ')')
      IF(NEG.EQ.1.AND.NODD.EQ.1) PRINT 384, NZ
384 FORMAT(20X, 'H(', I3, ') = 0.0')
      DO 450 K=1, NBANDS, 4
      KUP=K+3
      IF(KUP.GT.NBANDS) KUP=NBANDS
      PRINT 385, (J, J=K, KUP)
385 FORMAT(/24X, 4(' BAND', I3, 8X))
      PRINT 390, (EDGE(2*J-1), J=K, KUP)
390 FORMAT(2X, 'LOWER BAND EDGE', 5F15.9)
      PRINT 395, (EDGE(2*J), J=K, KUP)
395 FORMAT(2X, 'UPPER BAND EDGE', 5F15.9)
      IF(JTYPE.NE.2) PRINT 400, (FX(J), J=K, KUP)
400 FORMAT(2X, 'DESIRED VALUE', 2X, 5F15.9)
      IF(JTYPE.EQ.2) PRINT 405, (FX(J), J=K, KUP)
405 FORMAT(2X, 'DESIRED SLOPE', 2X, 5F15.9)
      PRINT 410, (WTX(J), J=K, KUP)
410 FORMAT(2X, 'WEIGHTING', 6X, 5F15.9)
      DO 420 J=K, KUP
420 DEVIAT(J)=DEV/WTX(J)
      PRINT 425, (DEVIAT(J), J=K, KUP)
425 FORMAT(2X, 'DEVIATION', 6X, 5F15.9)
      IF(JTYPE.NE.1) GO TO 450
      DO 430 J=K, KUP
430 DEVIAT(J)=20.0*ALOG10(DEVIAT(J))
      PRINT 435, (DEVIAT(J), J=K, KUP)
435 FORMAT(2X, 'DEVIATION IN DB', 5F15.9)
450 CONTINUE
      PRINT 455, (GRID(IEXT(J)), J=1, NZ)
455 FORMAT(/2X, 'EXTREMAL FREQUENCIES'/(2X, 5F12.7))
      PRINT 460
460 FORMAT(/1X, 70(1H*)/1H1)
      IF(JPUNCH.NE.0) PUNCH *, (H(J), J=1, NFCNS)
      IF(NFILT.NE.0) GO TO 100
      RETURN
      END

```

FUNCTION EFF(TEMP, FX, WTX, LBAND, JTYPE)

```

C
C FUNCTION TO CALCULATE THE DESIRED MAGNITUDE RESPONSE
C AS A FUNCTION OF FREQUENCY.
C

```

```

      DIMENSION FX(5), WTX(5)
      IF(JTYPE.EQ.2) GO TO 1
      EFF=FX(LBAND)
      RETURN
1 EFF=FX(LBAND)*TEMP
      RETURN
      END

```

FUNCTION WATE(TEMP, FX, WTX, LBAND, JTYPE)

```

C
C FUNCTION TO CALCULATE THE WEIGHT FUNCTION AS A FUNCTION
C OF FREQUENCY.
C

```

```

      DIMENSION FX(5), WTX(5)
      IF(JTYPE.EQ.2) GO TO 1
      WATE=WTX(LBAND)
      RETURN
1 IF(FX(LBAND).LT.0.0001) GO TO 2
      WATE=WTX(LBAND)/TEMP
      RETURN
2 WATE=WTX(LBAND)
      RETURN
      END

```

SUBROUTINE ERROR

```

      PRINT 1
1 FORMAT(' ***** ERROR IN INPUT DATA *****')
      STOP
      END

```

SUBROUTINE REMEZ(EDGE, NBANDS)

```

C
C THIS SUBROUTINE IMPLEMENTS THE REMEZ EXCHANGE ALGORITHM
C FOR THE WEIGHTED CHEBYCHEV APPROXIMATION OF A CONTINUOUS
C FUNCTION WITH A SUM OF COSINES. INPUTS TO THE SUBROUTINE
C ARE A DENSE GRID WHICH REPLACES THE FREQUENCY AXIS, THE
C DESIRED FUNCTION ON THIS GRID, THE WEIGHT FUNCTION ON THE
C GRID, THE NUMBER OF COSINES, AND AN INITIAL GUESS OF THE
C EXTREMAL FREQUENCIES. THE PROGRAM MINIMIZES THE CHEBYCHEV
C ERROR BY DETERMINING THE BEST LOCATION OF THE EXTREMAL
C FREQUENCIES (POINTS OF MAXIMUM ERROR) AND THEN CALCULATES
C THE COEFFICIENTS OF THE BEST APPROXIMATION.
C

```

```

      COMMON PI2, AD, DEV, X, Y, GRID, DES, WT, ALPHA, IEXT, NFCNS, NGRID
      DIMENSION EDGE(20)

```

```

DIMENSION IEXT(66),AD(66),ALPHA(66),X(66),Y(66)
DIMENSION DES(1045),GRID(1045),WT(1045)
DIMENSION A(66),P(65),Q(65)
DOUBLE PRECISION PI2,DNUM,DDEN,DTEMP,A,P,Q
DOUBLE PRECISION AD,DEV,X,Y
C
C THE PROGRAM ALLOWS A MAXIMUM NUMBER OF ITERATIONS OF 25
C
  ITRMAX=25
  DEVL=-1.0
  NZ=NFCNS+1
  NZZ=NFCNS+2
  NITER=0
100 CONTINUE
  IEXT(NZZ)=NGRID+1
  NITER=NITER+1
  IF(NITER.GT.ITRMAX) GO TO 400
  DO 110 J=1,NZ
    DTEMP=GRID(IEXT(J))
    DTEMP=DCOS(DTEMP*PI2)
110 X(J)=DTEMP
    JET=(NFCNS-1)/15+1
    DO 120 J=1,NZ
      AD(J)=D(J,NZ,JET)
      DNUM=0.0
      DDEN=0.0
      K=1
      DO 130 J=1,NZ
        L=IEXT(J)
        DTEMP=AD(J)*DES(L)
        DNUM=DNUM+DTEMP
        DTEMP=K*AD(J)/WT(L)
        DDEN=DDEN+DTEMP
130 K=-K
        DEV=DNUM/DDEN
        NU=1
        IF(DEV.GT.0.0) NU=-1
        DEV=-NU*DEV
        K=NU
        DO 140 J=1,NZ
          L=IEXT(J)
          DTEMP=K*DEV/WT(L)
          Y(J)=DES(L)+DTEMP
140 K=-K
          IF(DEV.GE.DEVL) GO TO 150
          CALL OUCH
          GO TO 400
150 DEVL=DEV
          JCHNGE=0
          K1=IEXT(1)
          KNZ=IEXT(NZ)
          KLOW=0
          NUT=-NU
          J=1
C
C SEARCH FOR THE EXTREMAL FREQUENCIES OF THE BEST
C APPROXIMATION
C
200 IF(J.EQ.NZZ) YNZ=COMP
  IF(J.GE.NZZ) GO TO 300
  KUP=IEXT(J+1)

```

```

L=IEXT(J)+1
NUT=-NUT
IF(J.EQ.2) Y1=COMP
COMP=DEV
IF(L.GE.KUP) GO TO 220
ERR=GEE(L,NZ)
ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
DTEMP=NUT*ERR-COMP
IF(DTEMP.LE.0.0) GO TO 220
COMP=NUT*ERR
210 L=L+1
  IF(L.GE.KUP) GO TO 215
  ERR=GEE(L,NZ)
  ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
  DTEMP=NUT*ERR-COMP
  IF(DTEMP.LE.0.0) GO TO 215
  COMP=NUT*ERR
  GO TO 210
215 IEXT(J)=L-1
  J=J+1
  KLOW=L-1
  JCHNGE=JCHNGE+1
  GO TO 200
220 L=L-1
225 L=L-1
  IF(L.LE.KLOW) GO TO 250
  ERR=GEE(L,NZ)
  ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
  DTEMP=NUT*ERR-COMP
  IF(DTEMP.GT.0.0) GO TO 230
  IF(JCHNGE.LE.0) GO TO 225
  GO TO 260
230 COMP=NUT*ERR
235 L=L-1
  IF(L.LE.KLOW) GO TO 240
  ERR=GEE(L,NZ)
  ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
  DTEMP=NUT*ERR-COMP
  IF(DTEMP.LE.0.0) GO TO 240
  COMP=NUT*ERR
  GO TO 235
240 KLOW=IEXT(J)
  IEXT(J)=L+1
  J=J+1
  JCHNGE=JCHNGE+1
  GO TO 200
250 L=IEXT(J)+1
  IF(JCHNGE.GT.0) GO TO 215
255 L=L+1
  IF(L.GE.KUP) GO TO 260
  ERR=GEE(L,NZ)
  ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
  DTEMP=NUT*ERR-COMP
  IF(DTEMP.LE.0.0) GO TO 255
  COMP=NUT*ERR
  GO TO 210
260 KLOW=IEXT(J)
  J=J+1
  GO TO 200
300 IF(J.GT.NZZ) GO TO 320
  IF(K1.GT.IEXT(1)) K1=IEXT(1)

```

```

IF (KNZ.LT.IEXT(NZ)) KNZ=IEXT(NZ)
NUT1=NUT
NUT=-NUT
L=0
KUP=K1
COMP=YNZ*(1.00001)
LUCK=1
310 L=L+1
IF (L.GE.KUP) GO TO 315
ERR=GEE(L,NZ)
ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
DTEMP=NUT*ERR-COMP
IF (DTEMP.LE.0.0) GO TO 310
COMP=NUT*ERR
J=NZZ
GO TO 210
315 LUCK=6
GO TO 325
320 IF (LUCK.GT.9) GO TO 350
IF (COMP.GT.Y1) Y1=COMP
K1=IEXT(NZZ)
325 L=NGRID+1
KLOW=KNZ
NUT=-NUT1
COMP=Y1*(1.00001)
330 L=L-1
IF (L.LE.KLOW) GO TO 340
ERR=GEE(L,NZ)
ERR=(ERR-DES(L))*WT(L)
DTEMP=NUT*ERR-COMP
IF (DTEMP.LE.0.0) GO TO 330
J=NZZ
COMP=NUT*ERR
LUCK=LUCK+10
GO TO 235
340 IF (LUCK.EQ.6) GO TO 370
DO 345 J=1,NFCNS
345 IEXT(NZZ-J)=IEXT(NZ-J)
IEXT(1)=K1
GO TO 100
350 KN=IEXT(NZZ)
DO 360 J=1,NFCNS
360 IEXT(J)=IEXT(J+1)
IEXT(NZ)=KN
GO TO 100
370 IF (JCHNGE.GT.0) GO TO 100

C CALCULATION OF THE COEFFICIENTS OF THE BEST APPROXIMATION
C USING THE INVERSE DISCRETE FOURIER TRANSFORM
C
400 CONTINUE
NM1=NFCNS-1
FSH=1.0E-06
GTEMP=GRID(1)
X(NZZ)=-2.0
CN=2*NFCNS-1
DELF=1.0/CN
L=1
KKK=0
IF (EDGE(1).EQ.0.0.AND.EDGE(2*NBANDS).EQ.0.5) KKK=1

```

```

IF (NFCNS.LE.3) KKK=1
IF (KKK.EQ.1) GO TO 405
DTEMP=DCOS(PI2*GRID(1))
DNUM=DCOS(PI2*GRID(NGRID))
AA=2.0/(DTEMP-DNUM)
BB=-(DTEMP+DNUM)/(DTEMP-DNUM)
405 CONTINUE
DO 430 J=1,NFCNS
FT=(J-1)*DELE
XT=DCOS(PI2*FT)
IF (KKK.EQ.1) GO TO 410
XT=(XT-PB)/AA
FT=ARCOS(XT)/PI2
410 XE=X(L)
IF (XT.GT.XE) GO TO 420
IF ((XE-XT).LT.FSH) GO TO 415
L=L+1
GO TO 410
415 A(J)=Y(L)
GO TO 425
420 IF ((XT-XE).LT.FSH) GO TO 415
GRID(1)=FT
A(J)=GEE(1,NZ)
425 CONTINUE
IF (L.GT.1) L=L-1
430 CONTINUE
GRID(1)=GTEMP
DDEN=PI2/CN
DO 510 J=1,NFCNS
DTEMP=0.0
DNUM=(J-1)*DDEN
IF (NM1.LT.1) GO TO 505
DO 500 K=1,NM1
500 DTEMP=DTEMP+A(K+1)*DCOS(DNUM*K)
505 DTEMP=2.0*DTEMP+A(1)
510 ALPHA(J)=DTEMP
DO 550 J=2,NFCNS
550 ALPHA(J)=2*ALPHA(J)/CN
ALPHA(1)=ALPHA(1)/CN
IF (KKK.EQ.1) GO TO 545
P(1)=2.0*ALPHA(NFCNS)*BB+ALPHA(NM1)
P(2)=2.0*AA*ALPHA(NFCNS)
Q(1)=ALPHA(NFCNS-2)-ALPHA(NFCNS)
DO 540 J=2,NM1
IF (J.LT.NM1) GO TO 515
AA=0.5*AA
BB=0.5*BB
515 CONTINUE
P(J+1)=0.0
DO 520 K=1,J
A(K)=P(K)
520 P(K)=2.0*BB*A(K)
P(2)=P(2)+A(1)*2.0*AA
JM1=J-1
DO 525 K=1,JM1
525 P(K)=P(K)+Q(K)+AA*A(K+1)
JP1=J+1
DO 530 K=3,JP1
530 P(K)=P(K)+AA*A(K-1)
IF (J.EQ.NM1) GO TO 540
DO 535 K=1,J

```

```

535 Q(K)=-A(K)
      Q(1)=Q(1)+ALPHA(NFCNS-1-J)
540 CONTINUE
      DO 543 J=1,NFCNS
543  ALPHA(J)=P(J)
545  CONTINUE
      IF(NFCNS.GT.3) RETURN
      ALPHA(NFCNS+1)=0.0
      ALPHA(NFCNS+2)=0.0
      RETURN
      END

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION D(K,N,M)

```

C
C FUNCTION TO CALCULATE THE LAGRANGE INTERPOLATION
C COEFFICIENTS FOR USE IN THE FUNCTION GEE.
C

```

```

COMMON PI2,AD,DEV,X,Y,GRID,DES,WT,ALPHA,IEXT,NFCNS,NGRID
DIMENSION IEXT(66),AD(66),ALPHA(66),X(66),Y(66)
DIMENSION DES(1045),GRID(1045),WT(1045)
DOUBLE PRECISION AD,DEV,X,Y
DOUBLE PRECISION Q
DOUBLE PRECISION PI2
D=1.0
Q=X(K)
DO 3 L=1,M
DO 2 J=L,N,M
IF(J-K) 1,2,1
1 D=2.0*D*(Q-X(J))
2 CONTINUE
3 CONTINUE
D=1.0/D
RETURN
END

```

DOUBLE PRECISION FUNCTION GEE(K,N)

```

C
C FUNCTION TO EVALUATE THE FREQUENCY RESPONSE USING THE
C LAGRANGE INTERPOLATION FORMULA IN THE BARYCENTRIC FORM
C

```

```

COMMON PI2,AD,DEV,X,Y,GRID,DES,WT,ALPHA,IEXT,NFCNS,NGRID
DIMENSION IEXT(66),AD(66),ALPHA(66),X(66),Y(66)
DIMENSION DES(1045),GRID(1045),WT(1045)
DOUBLE PRECISION P,C,D,XF
DOUBLE PRECISION PI2
DOUBLE PRECISION AD,DEV,X,Y
P=0.0
XF=GRID(K)
XF=DCOS(PI2*XF)
D=0.0
DO 1 J=1,N
C=XF-X(J)
C=AD(J)/C
D=D+C
1 P=P+C*Y(J)
GEE=P/D
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE OUCH
PRINT 1
1 FORMAT(' ***** FAILURE TO CONVERGE *****'/
1' OPROBABLE CAUSE IS MACHINE ROUNDING ERROR' /
2' OTHE IMPULSE RESPONSE MAY BE CORRECT' /
3' OCHECK WITH A FREQUENCY RESPONSE')
RETURN
END

```