

**МЕТОДЫ
ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ИДЕНТИФИКАЦИИ
СТАЦИОНАРНЫХ
СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ИНФОРМАЦИОННО-
ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**



Ленинград
ЭНЕРГОАТОМИЗДАТ
Ленинградское отделение
1988

ББК 32.96
М54
УДК 681.518.3.015

Рецензент С. А. Спектор

Авторы: А. Н. Лебедев, Д. Д. Недосекин, Г. А. Стеклова, Е. А. Чернявский

**Методы цифрового моделирования и идентификации
М54 стационарных случайных процессов в информационно-из-
мерительных системах/А. Н. Лебедев, Д. Д. Недосекин,
Г. А. Стеклова, Е. А. Чернявский.—Л.: Энергоатомиздат.
Ленингр. отд-ние, 1988.— 64 с.: ил.**

ISBN 5-283-04388-6

Рассматриваются методы моделирования линейных систем на ЦВМ по аналитическому выражению их передаточной функции и импульсной переходной характеристике. Предлагаются методы идентификации стационарных случайных процессов на выходе этих систем. Многочисленные примеры используются для отладки программ на ЦВМ.

Для специалистов, занимающихся вопросами применения ЦВМ в области автоматического управления, вычислительной и измерительной техники, энергетике.

М $\frac{2404000000-110}{051(01)-88}$ 257-88

ББК 32.96

Производственное издание

ЛЕБЕДЕВ АНДРЕЙ НИКОЛАЕВИЧ
НЕДОСЕКИН ДМИТРИЙ ДМИТРИЕВИЧ
СТЕКЛОВА ГАЛИНА АЛЕКСЕЕВНА
ЧЕРНЯВСКИЙ ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**МЕТОДЫ ЦИФРОВОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ИДЕНТИФИКАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ
В ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ**

Редактор В. Н. Миханкова
Художник обложки Г. В. Смирнов
Художественный редактор Т. Ю. Теплицкая
Технический редактор А. Г. Рябкина
Корректор Н. Д. Быкова

ИБ № 2421

Сдано в набор 24.09.87. Подписано в печать 29.12.87. М-23834. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага книжно-журнальная. Гарнитура литературная. Печать высокая, Усл. печ. л. 4. Усл. кр.-отт. 4,37. Уч.-изд. л. 4,62. Тираж 8500 экз. Заказ 732. Цена 30 к.

Энергоатомиздат, Ленинградское отделение, 191065 Ленинград, Марсово поле, 1.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгения Соколовой Совзаполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 198052 Ленинград, Измайловский проспект, 29.

ISBN 5-283-04388-6

© Энергоатомиздат, 1988

В различных отраслях науки и техники часто встречается необходимость исследования сложных объектов, например энергетических систем, промышленных установок, сельскохозяйственных агрегатов, силовых электроприводов и др. Аналитическое решение задачи при этом может оказаться невозможным ввиду непреодолимых математических трудностей. Экспериментальное исследование путем натуральных испытаний может потребовать слишком больших затрат времени и средств или же исключается по некоторым другим причинам. Трудности усугубляются в случаях, когда объект находится под влиянием случайных воздействий и требуется исследование вероятностного статистического характера. Эффективной мерой по преодолению этих трудностей является применение в исследованиях быстродействующих электронных цифровых вычислительных машин (ЦВМ) для моделирования изучаемых объектов.

Моделирование на ЦВМ, или цифровое моделирование, обладает преимуществами по сравнению с другими методами исследования: универсальностью, гибкостью, экономичностью.

Исследование путем цифрового моделирования объектов, находящихся под влиянием случайных воздействий, требует воспроизведения на ЦВМ этих воздействий. Очень часто случайные возмущения являются непрерывными случайными процессами с дробно-рациональной спектральной плотностью, тогда возникают задачи цифрового моделирования таких процессов и их идентификации. Решению этих задач и посвящена книга.

В книге излагается методика точного цифрового моделирования непрерывных стационарных случайных процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью. При этом непрерывная корреляционная функция моделируемого непрерывного случайного процесса оказывается огибающей решетчатой корреляционной функции случайного процесса, реализуемого в ЦВМ. Предлагается метод идентификации непрерывных стационарных случайных процессов, обеспечивающий получение аналитических выражений корреляционной функции и спектральной плотности. Излагается методика точного цифрового моделирования непрерывных линейных стационарных систем, при котором реакция системы оказывается огибающей решетчатой функции, реализуемой цифровой моделью. Изложение материала сопровождается примерами.

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАКЦИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Непрерывная линейная стационарная система описывается обыкновенным линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, которое может быть представлено в форме *передаточной функции* [1]

$$W(p) = \frac{y(p)}{x(p)} = \frac{B_0 + B_1 p + \dots + B_m p^m}{A_0 + A_1 p + \dots + A_n p^n} = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (1)$$

где $x(p)$, $y(p)$ — изображения по Лапласу непрерывных функций $x(t)$, $y(t)$ непрерывного аргумента. Функция $x(t)$ представляет собой входное воздействие, функция $y(t)$ — реакцию системы на это воздействие, аргументом t является время.

Важными характеристиками непрерывной системы являются *переходная функция* — реакция системы $y(t) = H(t)$ на единичное ступенчатое воздействие

$$x(t) = 1(t) \rightleftharpoons x(p) = 1(p) = \frac{1}{p},$$

причем $H(p) = W(p) \cdot \frac{1}{p}$, и *импульсная переходная функция* — реакция системы $y(t) = h(t)$ на воздействие в виде единичного импульса $x(t) = 1'(t) \rightleftharpoons x(p) = 1$, единичного в том смысле, что

$$\int_0^{\infty} 1'(t) dt = 1,$$

причем $h(p) = W(p) \cdot 1$.

Дискретная линейная стационарная система описывается разностным линейным уравнением с постоянными коэффициентами, которое может быть представлено в форме *дискретной передаточной функции* [2]

$$W(z) = \frac{y(z)}{x(z)} = \frac{\beta_0 + \beta_1 z + \dots + \beta_m z^m}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_n z^n} = \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}, \quad (2)$$

где $x(z)$, $y(z)$ — z -изображения решетчатых функций $x[k]$, $y[k]$ дискретного целочисленного аргумента k . Функции $x[k]$ и $y[k]$ являются входным воздействием и реакцией дискретной системы.

Важными характеристиками дискретной системы являются *решетчатая переходная функция* — реакция системы $y[k] = H[k]$ на решетчатое единичное воздействие

$$x[k] = 1[k] = 1 \Rightarrow x(z) = 1(z) = z/(z-1),$$

причем

$$H(z) = W(z) \cdot z/(z-1),$$

и *решетчатая импульсная переходная функция* — реакция системы $y[k] = h[k]$ на воздействие в виде единственного единичного импульса

$$x[k] = e[k] = e = \begin{cases} 1, & k=0, \\ 0, & k \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x(z) = e(z) = 1, \quad (3)$$

причем $h(z) = W(z) \cdot 1$.

Цифровое моделирование непрерывной системы означает получение на ЦВМ реакции дискретной системы $y[k]$ на входное воздействие $x[k]$ при условии, что реакция $y(t)$ и входное воздействие $x(t)$ непрерывной системы являются огибающими решетчатых функций $y[k]$, $x[k]$, т. е. $y[k] = y(\Delta tk)$; $x[k] = x(\Delta tk)$.

Составляющие $y(p)$ особенно просто получают для известных корней p_1, p_2, \dots, p_n полинома $q(p)$ изображения $y(p) = r(p)/q(p)$. Для некратных корней [3] это разложение имеет вид

$$y(p) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{p-p_i},$$

где $c_i = y(p)(p-p_i)|_{p=p_i}$. Данное разложение целесообразно использовать для нулевых и вещественных корней, так как составляющие $y(p)$ при этом становятся табличными.

Пример 1. Получено изображение

$$y(p) = \frac{r(p)}{q(p)} = \frac{2,19p + 0,6}{p(p+0,5)(p+0,2)},$$

имеющее один нулевой $p_1 = 0$ и два вещественных $p_2 = -0,5$, $p_3 = -0,2$ корня.

Рассчитываются значения коэффициентов

$$c_1 = y(p)p|_{p=0} = \frac{2,19p + 0,6}{(p+0,5)(p+0,2)} \Big|_{p=0} = \frac{0,6}{0,1} = 6;$$

$$c_2 = y(p)(p+0,5)|_{p=-0,5} = \frac{-2,19 \cdot 0,5 + 0,6}{-0,8(-0,5+0,2)} = -0,33;$$

$$c_3 = y(p)(p+0,5)|_{p=-0,2} = \frac{-2,19 \cdot 0,2 + 0,6}{-0,2(-0,2+0,5)} = -2,7.$$

Затем находятся табличные составляющие

$$y(p) = \sum_{i=1}^3 y_i(p) = \frac{6}{p} - \frac{0,33}{p+0,5} - \frac{2,7}{p+0,2}.$$

По таблице соответствий оригиналов и изображений по Лапласу $f(p) \rightleftharpoons f(t)$ определяются оригиналы $y_i(t) \rightleftharpoons y_i(p)$ и непрерывная функция $y(t) = \sum y_i(t)$.

При выбранном малом значении Δt получается решетчатая функция

$$y[k] = y(\Delta t k) = \sum y_i(\Delta t k) = \sum y_i[k].$$

В результате z-преобразования находятся

$$y_i(z) = Z\{y_i[k]\}; y(z) = \sum y_i(z),$$

причем в общем случае

$$y(z) = h_0(z) = \frac{\theta_0 z^n + \theta_1 z^{n-1} + \dots + \theta_n}{z^n + \eta_1 z^{n-1} + \dots + \eta_n} = \frac{\theta(z)}{\eta(z)} \quad (4)$$

и степень полинома числителя не превосходит степень знаменателя. Так как в литературе [3, 4] имеются таблицы соответствий (см. приложение 1), то процесс получения $y(z)$ сводится к преобразованиям

$$W(p) x(p) \rightarrow \sum y_i(p) \rightarrow \sum y_i(z) \rightarrow y(z). \quad (5)$$

Каждая элементарная составляющая $y_i(p)$, согласно таблице соответствий, является дробно-рациональной функцией переменной p :

$$y_i(p) = r_i(p)/q_i(p),$$

где $r_i(p)$, $q_i(p)$ — полиномы степеней μ_i , $\nu_i > \mu_i$ соответственно. Ей соответствует составляющая

$$y_i(z) = z p_i(z)/\eta_i(z),$$

где $p_i(z)$, $\eta_i(z)$ — полиномы степеней m_i , $n_i > m_i$ соответственно. Поэтому

$$y(z) = \sum \frac{z p_i(z)}{\eta_i(z)} = z \sum \frac{p_i(z)}{\eta_i(z)} = \frac{z p(z)}{\eta(z)},$$

где $p(z)$, $\eta(z)$ — полиномы степеней m , $n > m$ соответственно. Согласно этому условию в полиноме $\theta(z) = z p(z)$ числителя имеем $\theta_n = 0$, так что практически

$$y(z) = h_0(z) = \frac{\theta_0 z^n + \theta_1 z^{n-1} + \dots + \theta_{n-1} z}{z^n + \eta_1 z^{n-1} + \dots + \eta_n} = \frac{\theta(z)}{\eta(z)}. \quad (6)$$

Пример 2. Дано

$$W(p) = \frac{1}{p^2 + p + 1}; \quad x(t) = 1(t) \stackrel{z}{=} \frac{1}{p}.$$

Находится

$$\begin{aligned} y(p) = W(p)x(p) &= \frac{1}{(p^2 + p + 1)p} = \frac{Ap + B}{p^2 + p + 1} + \frac{C}{p} = \\ &= \frac{(A + C)p^2 + (B + C)p + C}{(p^2 + p + 1)p}. \end{aligned}$$

Коэффициенты A , B , C определяются системой уравнений $A + C = 0$; $B + C = 0$; $C = 1$ и равны: $A = B = -1$, $C = 1$. Таким образом,

$$y(p) = \frac{1}{p} - \frac{p + 1}{p^2 + p + 1}.$$

В таблице соответствий находим:

$$1) \frac{1}{p} \stackrel{z}{=} 1(t) \stackrel{k}{=} 1[k] \stackrel{z}{=} \frac{z}{z-1};$$

$$\begin{aligned} 2) \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} &\stackrel{z}{=} e^{-\alpha t} \sin \beta t \stackrel{k}{=} e^{-\alpha \Delta t} \sin \beta \Delta t \stackrel{z}{=} \\ &\stackrel{z}{=} \frac{z \sin \beta \Delta t}{z^2 - 2z \alpha \cos \beta \Delta t + \alpha^2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} &\stackrel{z}{=} e^{-\alpha t} \cos \beta t \stackrel{k}{=} e^{-\alpha \Delta t} \cos \beta \Delta t \stackrel{z}{=} \\ &\stackrel{z}{=} \frac{z(z - \alpha \cos \beta \Delta t)}{z^2 - 2z \alpha \cos \beta \Delta t + \alpha^2}. \end{aligned}$$

причем $\alpha = \exp(-\alpha \Delta t)$.

Во-первых, должно быть

$$p^2 + p + 1 = (p + \alpha)^2 + \beta^2 = p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2.$$

Коэффициенты α и β определяются системой уравнений $2\alpha = 1$; $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ и равны: $\alpha = 1/2$; $\beta = \sqrt{3}/2 = 0,866$. Поэтому $(p^2 + p + 1) = (p + 0,5)^2 + (0,866)^2$.

Во-вторых, должно быть

$$\begin{aligned} \frac{p + 1}{p^2 + p + 1} &= \frac{p + 1}{(p + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = A \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + B \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} = \\ &= A \frac{\sqrt{3}/2}{(p + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} + B \frac{p + 1/2}{(p + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}, \end{aligned}$$

причем $\frac{A\sqrt{3}}{2} + Bp + \frac{B}{2} = p + 1$.

Коэффициенты A и B определяются системой уравнений $\frac{A\sqrt{3}}{2} + \frac{B}{2} = 1$; $B = 1$ и равны: $A = 1/\sqrt{3} = 0,577$; $B = 1$.

Следовательно,

$$\frac{p+1}{p^2+p+1} = 0,577 \frac{0,866}{(p+0,5)^2 + (0,866)^2} + \frac{p+0,5}{(p+0,5)^2 + (0,866)^2}$$

В-третьих, должно быть

$$a = e^{-\alpha \Delta t} = e^{-\Delta t/2}; \quad a \cos \beta \Delta t = a \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta t;$$

$$a \sin \beta \Delta t = a \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta t;$$

$$2a \cos \beta \Delta t = 2a \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \Delta t.$$

При $\Delta t = 1$ имеем

$$a = e^{-0,5} = 0,606; \quad a^2 = e^{-1} = 0,367;$$

$$\sin(\sqrt{3}/2) = \sin 0,866 = 0,762;$$

$$\cos(\sqrt{3}/2) = \cos 0,866 = 0,648;$$

$$a \sin(\sqrt{3}/2) = 0,462; \quad a \cos(\sqrt{3}/2) = 0,393; \quad 2a \cos(\sqrt{3}/2) = 0,786.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{p+1}{p^2+p+1} &\Rightarrow 0,577 \cdot 0,606^t \sin 0,866t + 0,606^t \cos 0,866t \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0,577 \cdot 0,606^k \sin 0,866k + 0,606^k \cos 0,866k \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0,577 \frac{0,462z}{z^2 - 0,786z + 0,367} + \frac{z(z - 0,393)}{z^2 - 0,786z + 0,367}. \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} y(z) &= \frac{z}{z-1} - \frac{0,577 \cdot 0,462z + z(z - 0,393)}{z^2 - 0,786z + 0,367} = \\ &= \frac{0,340z^2 + 0,241z}{z^3 - 1,786z^2 + 1,153z - 0,367}. \end{aligned}$$

Алгоритм вычисления значений решетчатой функции $y[k]$ по $y(z)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$ может быть сформирован различным образом [2, 4, 5].

1. Этот способ требует разложения выражения (6) в ряд по степеням z^{-1} :

$$y(z) = y[0]z^0 + y[1]z^{-1} + y[2]z^{-2} + \dots \quad (7)$$

Разложение осуществляется простым делением числителя на знаменатель. Коэффициенты ряда (7) представляют собой последовательность значений решетчатой функции $y[k] \stackrel{\Delta}{=} y(z)$ при $k = 0, 1, 2, \dots$

Пример 3. Выражение (6) имеет вид, полученный в примере 2:

$$y(z) = \frac{0 \cdot z^3 + 0,340z^2 + 0,241z}{z^3 - 1,786z^2 + 1,153z - 0,367}.$$

В результате деления получаем

$$y(z) = 0 \cdot z^0 + 0,340z^{-1} + 0,848z^{-2} + 1,123z^{-3} + \\ + 1,153z^{-4} + 1,075z^{-5} + 1,003z^{-6} + \dots$$

Согласно результатам примера 2, данному z -изображению соответствует оригинал

$$y[k] = 1 - 0,606^k (0,577 \sin 0,866k + \cos 0,866k).$$

При $k = 0, 1, 2, \dots$ по этой формуле находим

$$y[0] = 0; y[1] = 0,341; y[2] = 0,850; y[3] = 1,124; \\ y[4] = 1,152; y[5] = 1,072; y[6] = 1,002; \dots$$

2. Этот способ требует представления выражения (6) в виде

$$y(z) = \frac{\theta_0 + \theta_1 z^{-1} + \dots + \theta_n z^{-n}}{1 + \eta_1 z^{-1} + \dots + \eta_n z^{-n}}. \quad (8)$$

Примем для простоты $n = 3$. Тогда

$$y(z) = \frac{\theta_0 + \theta_1 z^{-1} + \theta_2 z^{-2} + \theta_3 z^{-3}}{1 + \eta_1 z^{-1} + \eta_2 z^{-2} + \eta_3 z^{-3}}. \quad (9)$$

По определению z -преобразования [4]

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y[k] z^{-k} = y[0] + y[1] z^{-1} + y[2] z^{-2} + y[3] z^{-3} + \dots \quad (10)$$

На основании выражений (9) и (10) имеем

$$\theta_0 + \theta_1 z^{-1} + \theta_2 z^{-2} + \theta_3 z^{-3} = (1 + \eta_1 z^{-1} + \eta_2 z^{-2} + \eta_3 z^{-3}) \times \\ \times (y[0] + y[1] z^{-1} + y[2] z^{-2} + y[3] z^{-3} + \dots).$$

Раскрыв скобки и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем

$$\begin{aligned} \theta_0 &= y[0]; \\ \theta_1 &= y[1] + \eta_1 y[0]; \\ \theta_2 &= y[2] + \eta_1 y[1] + \eta_2 y[0]; \\ \theta_3 &= y[3] + \eta_1 y[2] + \eta_2 y[1] + \eta_3 y[0]; \\ 0 &= y[4] + \eta_1 y[3] + \eta_2 y[2] + \eta_3 y[1]; \\ 0 &= y[5] + \eta_1 y[4] + \eta_2 y[3] + \eta_3 y[2]; \\ &\dots \end{aligned}$$

и рекуррентные соотношения

$$\left. \begin{aligned} y[0] &= \theta_0; \\ y[1] &= \theta_1 - \eta_1 y[0]; \\ y[2] &= \theta_2 - \eta_1 y[1] - \eta_2 y[0]; \\ y[3] &= \theta_3 - \eta_1 y[2] - \eta_2 y[1] - \eta_3 y[0]; \\ y[4] &= \theta_4 - \eta_1 y[3] - \eta_2 y[2] - \eta_3 y[1]; \\ y[5] &= \theta_5 - \eta_1 y[4] - \eta_2 y[3] - \eta_3 y[2]; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Эти соотношения легко распространяются на общий случай (8).

Пример 4. Выражение $y(z)$ примера 3 в форме (8) имеет вид

$$y(z) = \frac{0 + 0,340z^{-1} + 0,241z^{-2} + 0z^{-3}}{1 - 1,786z^{-1} + 1,153z^{-2} - 0,367z^{-3}}.$$

Согласно (11) находим

$$\begin{aligned} y[0] &= 0; \quad y[1] = 0,340; \\ y[2] &= 0,241 + 1,786 \cdot 0,340 = 0,848; \\ y[3] &= 0 + 1,786 \cdot 0,848 - 1,153 \cdot 0,340 = 1,123; \\ y[4] &= 0 + 1,786 \cdot 1,123 - 1,153 \cdot 0,848 + \\ &\quad + 0,340 \cdot 0,367 = 1,153; \dots \end{aligned}$$

Изложенное обеспечивает теоретически точное воспроизведение на ЦВМ численных значений $y[k] = y(\Delta tk)$ реакции непрерывной системы на входное воздействие $x(t)$ при любом Δt . Его недостаток заключается в том, что каждое изменение вида входного воздействия $x(t)$ требует соответствующего изменения передаточной функции эквивалентной непрерывной системы $W_s(p) = W(p)x(p)$.

Цифровое моделирование непрерывной системы с передаточной функцией $W(p)$ и любым произвольным воздействием $x(t)$ без замены этой системы эквивалентной, т. е. без замены $W(p)$ на $W_s(p)$ и $x(t)$ на $\delta(t)$, возможно только с некоторой погрешностью аппроксимации

$$\Delta y[k] = \tilde{y}[k] - y[k]. \quad (12)$$

Пусть входное воздействие и реакция непрерывной системы имеют вид в одном случае $x_1(t)$, $y_1(t)$, в другом $x_2(t)$, $y_2(t)$.

Несмотря на отличие $x_1(t)$ от $x_2(t)$ и $y_1(t)$ от $y_2(t)$, соотношение между $x_1(t)$ и $y_1(t)$, $x_2(t)$ и $y_2(t)$ определяется одной и той же передаточной функцией (1):

$$W(p) = \frac{y_1(p)}{x_1(p)} = \frac{y_2(p)}{x_2(p)}. \quad (13)$$

Однако соотношения между соответствующими непрерывным функциям $x_1(t)$ и $y_1(t)$, $x_2(t)$ и $y_2(t)$ решетчатыми функциями $x_1[k] = x_1(\Delta tk)$ и $y_1[k] = y_1(\Delta tk)$, $x_2[k] = x_2(\Delta tk)$ и $y_2[k] = y_2(\Delta tk)$ определяются различными дискретными передаточными функциями

$$W_1(z) = \frac{y_1(z)}{x_1(z)} \neq W_2(z) = \frac{y_2(z)}{x_2(z)}. \quad (14)$$

Пример 5. Дано

$$W(p) = 1/(p+1).$$

При $x_1(t) = 1(t)$, $\Delta t = 1$

$$x_1(p) = 1/p \doteq 1(t) \doteq 1[k] \doteq z/(z-1) = x_1(z);$$

$$y_1(p) = 1/[(p+1)p] \doteq 1 - e^{-t} \doteq 1 - e^{-k} \doteq$$

$$\doteq \frac{(1 - e^{-1})z}{z^2 - (1 + e^{-1})z + e^{-1}} = y_1(z);$$

$$W(z) = \frac{y_1(z)}{x_1(z)} = \frac{1 - e^{-1}}{z - e^{-1}}.$$

При $x_2(t) = 1'(t)$, $\Delta t = 1$

$$x_2(p) = 1 \doteq 1'(t) \doteq e[k] \doteq 1 = x_2(z);$$

$$y_2(p) = \frac{1}{p+1} \doteq e^{-t} \doteq e^{-k} \doteq \frac{z}{z - e^{-1}} = y_2(z);$$

$$W_2(z) = \frac{y_2(z)}{x_2(z)} = \frac{z}{z - e^{-1}} \neq W_1(z).$$

Дискретной передаточной функции (2), удовлетворяющей условию

$$W(z) = \frac{y_1(z)}{x_1(z)} = \frac{y_2(z)}{x_2(z)},$$

аналогичному (13), не существует. Существует, однако, множество различных дискретных передаточных функций

$$\tilde{W}(z) = \tilde{y}(z)/x(z), \quad (15)$$

удовлетворяющих условию

$$\tilde{W}(z) = \frac{\tilde{y}_1(z)}{x_1(z)} = \frac{\tilde{y}_2(z)}{x_2(z)}, \quad (16)$$

где $\tilde{y}_1(z)$ и $\tilde{y}_2(z)$ — z -изображения решетчатых функций $y_1[k]$ и $y_2[k]$, аппроксимирующих решетчатые функции $y_1[k] = y_1(\Delta tk)$ и $y_2[k] = y_2(\Delta tk)$ с погрешностью, определяемой по выражению (12).

Цифровое моделирование непрерывной системы по существу является машинной реализацией численного решения дифференциального уравнения, заданного в форме передаточной функции (1). Вид аппроксимирующей дискретной передаточной

функции (13) зависит от выбранного численного метода решения этого уравнения, основанного всегда на аппроксимации дифференциального уравнения разностным. Известны различные методы такой аппроксимации [4—7], каждый из которых характеризуется определенной погрешностью [см. выражение (12)].

Рассмотрим метод, обеспечивающий точное цифровое моделирование реакции непрерывной системы на единичный импульс, т. е. цифровое моделирование импульсной переходной характеристики непрерывной системы $h(t)$. В этом случае дискретная передаточная функция (15) определяется выражением

$$\tilde{W}(z) = h(z)/e(z). \quad (17)$$

Процесс получения функции $\tilde{W}(z)$, удовлетворяющей условию (17), сводится к преобразованиям, аналогичным выражению (5):

$$W(p) \cdot 1 \rightarrow \sum h_i(p) \rightarrow \sum h_i(z) \rightarrow \tilde{W}(z). \quad (18)$$

Пример 6. Дано

$$W(p) = 2/(p + 0,5).$$

По таблице соответствий $f(p) \rightleftharpoons f(z)$ находим

$$\tilde{W}(z) = 2z/(z - e^{-0,5\Delta t}).$$

Задавшись значением $\Delta t = 0,1$ с, получаем

$$\tilde{W}(z) = 2z/(z - e^{-0,05}) = 2z/(z - 0,95).$$

1. Если непрерывная система с заданной передаточной функцией $W(p)$ находится под воздействием единичного импульса $1'(t) \rightleftharpoons 1'(p) = 1$, то изображение по Лапласу ее реакции $h(t)$ будет $h(p) = W(p) \cdot 1$.

По таблице соответствий $f(p) \rightleftharpoons f(t)$ находим

$$h(t) = 2e^{-0,5t}.$$

Если дискретная система с передаточной функцией $W(z)$ находится под воздействием единственного единичного импульса $e[k] \rightleftharpoons e(z) = 1$, то z -изображение ее реакции $h[k]$

$$h(z) = \tilde{W}(z) \cdot 1 = 2z/(z - e^{-0,05}).$$

По таблице соответствий $f(z) \rightleftharpoons f[k]$ находим

$$h[k] = 2e^{-0,05k}.$$

Непрерывная функция $h(t)$ является огибающей решетчатой функции $h[k]$ при $\Delta t = 0,1$ с: $h[k] = h(0,1k)$, и погрешность, вычисленная по выражению (12), равна нулю.

2. Если непрерывная система находится под воздействием единичной функции $1(t) \stackrel{\Delta}{=} 1(p) = 1/p$, то изображение по Лапласу ее реакции $H(t)$

$$H(p) = W(p) \frac{1}{p} = \frac{2}{(p+0,5)p} = \frac{A}{p+0,5} + \frac{B}{p} = \\ = \frac{(A+B)p + 0,5B}{(p+0,5)p} = \frac{4}{p} - \frac{4}{p+0,5}.$$

Согласно таблице соответствий $f(p) \stackrel{\Delta}{=} f(t)$ находим

$$H(t) = 4 - 4e^{-0,5t}.$$

Если дискретная система с передаточной функцией $\tilde{W}(z)$ находится под воздействием последовательности единичных импульсов, т. е. единичной решетчатой функции $1[k] \stackrel{\Delta}{=} 1(z) = z/(z-1)$, то z -изображение ее реакции $H[k]$

$$H(z) = \tilde{W}(z) \frac{z}{z-1} = \frac{2z^2}{(z-e^{-0,5})(z-1)} = \\ = 2z[Az/(z-0,95) + Bz/(z-1)] = \\ = 2z[20z/(z-1) - 20z/(z-0,95)].$$

Из теории z -преобразования [2, 4] известно, что при $f[k \leq 0] = 0$

$$Z\{f[k+m]\} = z^m f(z). \quad (19)$$

С учетом этого, согласно таблице соответствий $f(z) \stackrel{\Delta}{=} f[k]$, находим

$$H[k] = 40 \cdot 1[k+1] - 40e^{-0,5[k+1]}.$$

Очевидно, что в этом случае функция $H(t)$ не является огибающей решетчатой функции $H[k]$ при $\Delta t = 0,1$ с и погрешность вида (12)

$$\Delta H[k] = H[k] - H(0,1k) \quad (20)$$

весьма значительна. В начальный момент при $t=0$ и $k=0$

$$H(0) = 0 \text{ и } H[0] = 40(1 - 0,95) = 2.$$

В установившемся режиме при $t=\infty$ и $k=\infty$

$$H(\infty) = 4 \text{ и } H[\infty] = 40.$$

Рассмотренный пример показывает, что передаточная функция, полученная согласно выражению (17), обеспечивает точное моделирование только характеристики $h(t)$ и не может использоваться для исследования непрерывной системы при произвольном входном воздействии.

При цифровом моделировании непрерывных систем, находящихся в установившемся режиме, при входном воздействии в виде белого шума рассмотренный прием позволяет получить точный результат.

ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Любой непрерывный стационарный случайный процесс с дисперсией

$$D_y = \int_0^{\infty} S_y(\omega) d\omega = R_y(0),$$

корреляционной функцией

$$R_y(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} S_y(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$

и спектральной плотностью

$$S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau,$$

которая является дробно-рациональной функцией угловой частоты ω , можно рассматривать как реакцию устойчивой непрерывной линейной стационарной системы с передаточной функцией (1) в установившемся режиме на входное воздействие в виде белого шума $X(t)$.

В некоторых случаях предпочитают рассматривать спектральную плотность не как функцию $S_y(\omega)$ угловой частоты ω . Для перехода от $S_y(\omega)$ к $G_y(f)$ и обратно надо иметь в виду, что $\omega = 2\pi f$, $d\omega = 2\pi df$, $S_y(\omega)d\omega = G_y(f)df = dD_y$ и поэтому

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} G_y\left(\frac{\omega}{2\pi}\right); \quad G_y(f) = 2\pi S_y(2\pi f).$$

Белый шум — это непрерывная стационарная центрированная случайная функция, спектральная плотность которой постоянна на всех частотах от 0 до ∞ :

$$S_x(\omega) = 1/\pi = \text{const.}$$

Его корреляционная функция

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\omega.$$

Можно показать [8], что

$$R_x(\tau) = \delta(\tau),$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция Дирака. Дисперсия белого шума

$$D_x = R_x(0) = \delta(0) = \infty.$$

Так как $\delta(\tau)$ — функция, равная нулю везде, за исключением точки $\tau = 0$, то белый шум как случайная функция (случайный процесс) характеризуется тем, что два ее любые сечения представляют собой некоррелированные случайные величины.

Белый шум является математической абстракцией, полезной для различных теоретических построений.

Если входное воздействие непрерывной системы — белый шум, то спектральная плотность реакции в установившемся режиме [8, 9]

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} |W(j\omega)|^2, \quad (21)$$

где $|W(j\omega)|^2$ — квадрат модуля амплитудно-фазовой частотной характеристики (АФЧХ) системы с передаточной функцией (1). Можно показать [10], что

$$|W(j\omega)|^2 = b(\omega)/a(\omega), \quad (22)$$

где полиномы

$$a(\omega) = a_0 + a_1\omega^2 + \dots + a_n\omega^{2n}; \quad (23)$$

$$b(\omega) = b_0 + b_1\omega^2 + \dots + b_n\omega^{2n}$$

имеют степени не выше $2n$, причем

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= A_0^2; \\ a_1 &= A_1^2 - 2A_0A_2; \\ a_2 &= A_2^2 - 2A_1A_3 + 2A_0A_4; \\ a_3 &= A_3^2 - 2A_2A_4 + 2A_1A_5 - 2A_0A_6; \\ a_4 &= A_4^2 - 2A_3A_5 + 2A_2A_6 - 2A_1A_7 + 2A_0A_8; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= B_0^2; \\ b_1 &= B_1^2 + 2B_0B_2; \\ b_2 &= B_2^2 - 2B_1B_3 + 2B_0B_4; \\ b_3 &= B_3^2 - 2B_2B_4 + 2B_1B_5 - 2B_0B_6; \\ b_4 &= B_4^2 - 2B_3B_5 + 2B_2B_6 - 2B_1B_7 + 2B_0B_8; \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Формулы (21) — (25) позволяют получить дробно-рациональное выражение спектральной плотности реакции $Y(t)$ непрерывной системы в установившемся режиме.

Операция перехода от полиномов $A(p)$, $B(p)$ передаточной функции (1) к полиномам $a(\omega)$, $b(\omega)$, согласно формулам (24) и (25), заключается в квадрировании нулей полиномов $A(p)$, $B(p)$. Нули ω_1^2 , ω_2^2 полиномов $a(\omega)$, $b(\omega)$ являются квадратами нулей p_i , p_j полиномов $A(p)$, $B(p)$.

Пример 7. Требуется получить выражение $S_y(\omega)$ при

$$W(p) = (2 + p)/(1 + p).$$

Согласно выражениям (24) и (25)

$$a_0 = A_0^2 = 1; \quad a_1 = A_1^2 = 1;$$

$$b_0 = B_0^2 = 4; \quad b_1 = B_1^2 = 1,$$

и на основании (21) — (23)

$$S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{4 + \omega^2}{1 + \omega^2}.$$

Для цифрового моделирования непрерывного стационарного случайного процесса $Y(t)$ с заданной дробно-рациональной спектральной плотностью $S_y(\omega)$ требуется получить согласно (21) выражение (22) в виде

$$|W(j\omega)|^2 = \pi S_y(\omega), \quad (26)$$

определить коэффициенты полиномов (23), затем определить решением двух несвязанных систем уравнений (24) и (25) коэффициенты передаточной функции $W(p)$ соответствующей непрерывной системы и моделировать эту систему как находящуюся под воздействием белого шума на ЦВМ. При решении систем (24) и (25) можно положить, что все коэффициенты A и B положительные [10]. Условие $A > 0$ соответствует устойчивой системе, условие $B > 0$ — минимально-фазовой системе. Решение каждой системы алгебраических уравнений (24) и (25) можно заменить [10] более простым решением соответствующего одного алгебраического уравнения. Рассмотрим это на примере определения коэффициентов полинома $A(p)$, являющегося знаменателем $W(p)$, по коэффициентам полинома $a(\omega)$, являющегося знаменателем $|W(j\omega)|^2$.

Полином $a(\omega)$ можно представить в виде

$$a(\omega) = a_n (c_1 + \omega^2)^{k_1} (c_2 + \omega^2)^{k_2} \dots \times \\ \times (d_1 + e_1\omega^2 + \omega^4)^{l_1} (d_2 + e_2\omega^2 + \omega^4)^{l_2} \dots, \quad (27)$$

где k_i и l_j — целые положительные числа, выражающие кратности вещественных и комплексных сопряженных нулей этого полинома ω_s^2 , которому соответствует полином [10]

$$A(p) = \sqrt{a_n} (\sqrt{c_1} + p)^{k_1} (\sqrt{c_2} + p)^{k_2} \dots \times \\ \times (\sqrt{d_1} + \sqrt{e_1 + 2\sqrt{d_1}p + p^2})^{l_1} \times \\ \times (\sqrt{d_2} + \sqrt{e_2 + 2\sqrt{d_2}p + p^2})^{l_2} \dots \quad (28)$$

и при этом имеют место соответствия

$$\begin{aligned} a_n &\doteq \sqrt{a_n}; \\ c_l + \omega^2 &\doteq \sqrt{c_l + p}; \\ d_l + e_l \omega^2 + \omega^4 &\doteq \sqrt{d_l} + \sqrt{e_l + 2\sqrt{d_l} p + p^2}. \end{aligned} \quad (29)$$

Коэффициенты полинома $A(p)$ определяются после раскрытия скобок в выражении (28) и приведения подобных членов.

Для представления полинома $a(\omega)$ в виде произведения (27) требуется определение всех его нулей ω_s решением алгебраического уравнения n -й степени $a(\omega) = 0$. Применение для этой цели известного метода Лина [10] обеспечивает получение сомножителей уравнения (27) в непосредственном виде.

Пример 8. Дано

$$a(\omega) = 2500 + 3061\omega^2 + 551\omega^4 - 9\omega^6 + \omega^8.$$

В результате решения уравнения $a(\omega) = 0$ четвертой степени относительно ω^2 , находим

$$\omega_1^2 = -1; \quad \omega_2^2 = -4; \quad \omega_{3,4}^2 = 7 \pm j24.$$

Представим заданный полином в виде произведения трех сомножителей:

$$a(\omega) = (1 + \omega^2)(4 + \omega^2)(625 - 14\omega^2 + \omega^4).$$

На основании соответствий (29) получаем соответствующий $a(\omega)$ полином $A(p)$ в виде (28):

$$A(p) = (1 + p)(2 + p)(25 + 6p + p^2) = 50 + 87p + 45p^2 + 9p^3 + p^4.$$

Для точного цифрового моделирования реакции $y(t)$ непрерывной системы с передаточной функцией $W(p)$ на входное воздействие $x(t) = e(t)$ в виде $y[k] = y(\Delta tk)$ можно принять выражение (17) за дискретную передаточную функцию дискретной системы, соответствующей данной непрерывной, и получить аналогично (6)

$$y(z) = \tilde{W}(z) x(z) = \frac{\theta_0 z^n + \theta_1 z^{n-1} + \dots + \theta_{n-1} z}{z^n + \eta_1 z^{n-1} + \dots + \eta_n} x(z), \quad (30)$$

где $x(z) \doteq e[k]$ или

$$\tilde{y}(z) = \frac{\theta_0 + \theta_1 z^{-1} + \dots + \theta_{n-1} z^{-(n-1)}}{1 + \eta_1 z^{-1} + \dots + \eta_n z^{-n}} x(z). \quad (31)$$

Если непрерывная система устойчива, то все полюсы $W(p)$ расположены в левой части комплексной плоскости. В этом случае все полюсы $\tilde{W}(z)$ расположены в единичном круге с центром в начале прямоугольной системы координат комплексной плоскости.

Из теории z-преобразования известно [2, 4], что при $f[k < 0] = 0$

$$\left. \begin{aligned} Z\{f[k]\} &= f(z); \\ Z\{f[k-1]\} &= z^{-1}f(z); \\ Z\{f[k-2]\} &= z^{-2}f(z); \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

С учетом этого, на основании (31) получаем рекуррентное выражение

$$\begin{aligned} \tilde{y}[k] &= \theta_0 x[k] + \theta_1 x[k-1] + \dots + \theta_{n-1} x[k-(n-1)] + \\ &+ \bar{\eta}_1 y[k-1] + \dots + \bar{\eta}_n y[k-n], \end{aligned} \quad (33)$$

где $\bar{\eta}_i = -\eta_i$.

Если входное воздействие непрерывной системы — белый шум $X(t)$ и $x(t)$ — его реализация, то $y(t)$ в установившемся режиме — реализация заданной случайной функции $Y(t)$. Цифровой моделью непрерывного белого шума $X(t)$ является решетчатая случайная функция $X[k] = X(\Delta tk)$, сечениями которой являются независимые случайные величины с одной и той же дисперсией D_{xp} . Реализация $x[k]$ случайной функции $X[k]$ представляет собой последовательность независимых значений случайной величины с дисперсией D_{xp} . Решетчатая функция $\tilde{y}[k]$, значения которой определяются рекуррентной формулой (33), представляет собой в этом случае реакцию цифровой системы с дискретной передаточной функцией (17) на входное воздействие, являющееся реализацией $x[k]$ случайной функции $X[k]$. В установившемся режиме решетчатая функция $\tilde{y}[k]$ представляет собой цифровую модель реализации $y(t)$ заданной случайной функции $Y(t)$, т. е. $\tilde{y}[k] = y[k]$.

Так как при этом $x[k], x[k+1], \dots, y[k], y[k+1], \dots$ — это значения случайных величин $X_k = X[k], X_{k-1} = X[k-1], \dots, Y_k = Y[k], Y_{k-1} = Y[k-1], \dots$, то аналогично [33] имеем вероятностные соотношения

$$\begin{aligned} Y[k] &= \theta_0 X[k] + \theta_1 X[k-1] + \dots + \theta_{n-1} X[k-(n-1)] + \\ &+ \bar{\eta}_1 Y[k-1] + \dots + \bar{\eta}_n Y[k-n]; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} Y_k &= \theta_0 X_k + \theta_1 X_{k-1} + \dots + \theta_{n-1} X_{k-(n-1)} + \\ &+ \bar{\eta}_1 Y_{k-1} + \dots + \bar{\eta}_n Y_{k-n}. \end{aligned} \quad (35)$$

При $n = 1$ выражения (34) и (35) имеют вид

$$Y[k] = \theta_0 X[k] + \bar{\eta}_1 Y[k-1]; \quad (36)$$

$$Y_k = \theta_0 X_k + \bar{\eta}_1 Y_{k-1}.$$

В установившемся режиме при $k = 0, 1, 2, \dots$

$$Y_0 = \theta_0 X_0 + \bar{\eta}_1 Y_{-1};$$

$$Y_1 = \theta_0 X_1 + \bar{\eta}_1 Y_0;$$

$$Y_2 = \theta_0 X_2 + \bar{\eta}_1 Y_1;$$

$$Y_3 = \theta_0 X_3 + \bar{\eta}_1 Y_2;$$

.....

Для определения дисперсии D_{yp} решетчатой $Y[k]$ через дисперсию D_{xp} решетчатой функции $X[k]$ можно воспользоваться равенством

$$\begin{aligned} M[Y_1^2] &= M[(\theta_0 X_1 + \bar{\eta}_1 Y_0)^2] = M[\theta_0^2 X_1^2 + \bar{\eta}_1^2 Y_0^2 + 2\theta_0 \bar{\eta}_1 X_1 Y_0] = \\ &= \theta_0^2 D_{xp} + \bar{\eta}_1^2 D_{yp} = D_{yp}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D_{yp} = \frac{A_1}{1 - B_1} D_{xp}; \quad A_1 = \theta_0^2; \quad B_1 = \bar{\eta}_1^2. \quad (37)$$

Здесь $D_{xp} > 0$, $D_{yp} > 0$, $|\bar{\eta}_1| < 1$. Поэтому должно быть $A_1 > 0$, $0 < B_1 < 1$.

Корреляционные моменты для случайных величин Y_0 и Y_k при $k = 0, 1, 2, \dots$ равны:

$$R_0 = M[Y_0 Y_0] = D_{yp};$$

$$\begin{aligned} R_1 &= M[Y_0 Y_1] = M[(\theta_0 X_1 + \bar{\eta}_1 Y_0) Y_0] = \\ &= \theta_0 M[Y_0 X_1] + \bar{\eta}_1 M[Y_0 Y_0] = \bar{\eta}_1 R_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_2 &= M[Y_0 Y_2] = M[Y_0 (\theta_0 X_2 + \bar{\eta}_1 Y_1)] = \\ &= \bar{\eta}_1 M[Y_0 Y_1] = \bar{\eta}_1 R_1; \end{aligned}$$

$$R_3 = M[Y_0 Y_3] = \bar{\eta}_1 R_2;$$

$$\dots$$

$$R_k = M[Y_0 Y_k] = \bar{\eta}_1 R_{k-1}.$$

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= D_{yp}; \\ R_1 &= \bar{\eta}_1 R_0; \\ R_2 &= \bar{\eta}_1 R_1; \\ R_3 &= \bar{\eta}_1 R_2; \\ &\dots \\ R_k &= \bar{\eta}_1 R_{k-1}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Решетчатая корреляционная функция $R_y[k]$ решетчатой случайной функции $Y[k]$ определяется рекуррентным выражением

$$R_y[k] = \bar{\eta}_1 R_y[k-1] \quad (39)$$

при $R_y[0] = D_{yp}$.

При $n=2$ выражения (34) и (35) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} Y[k] &= \theta_0 X[k] + \theta_1 X[k-1] + \bar{\eta}_1 Y[k-1] + \bar{\eta}_2 Y[k-2]; \\ Y_k &= \theta_0 X_k + \theta_1 X_{k-1} + \bar{\eta}_1 Y_{k-1} + \bar{\eta}_2 Y_{k-2}. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

В установившемся режиме

$$\left. \begin{aligned} Y_0 &= \theta_0 X_0 + \theta_1 X_{-1} + \bar{\eta}_1 Y_{-1} + \bar{\eta}_2 Y_{-2}; \\ Y_1 &= \theta_0 X_1 + \theta_1 X_0 + \bar{\eta}_1 Y_0 + \bar{\eta}_2 Y_{-1}; \\ Y_2 &= \theta_0 X_2 + \theta_1 X_1 + \bar{\eta}_1 Y_1 + \bar{\eta}_2 Y_0; \\ Y_3 &= \theta_0 X_3 + \theta_1 X_2 + \bar{\eta}_1 Y_2 + \bar{\eta}_2 Y_1; \\ &\dots \end{aligned} \right\}$$

Для определения дисперсии имеем

$$\begin{aligned} M[Y_2^2] &= M[(\theta_0 X_2 + \theta_1 X_1 + \bar{\eta}_1 Y_1 + \bar{\eta}_2 Y_0)^2] = \\ &= M[\theta_0^2 X_2^2 + \theta_1^2 X_1^2 + \bar{\eta}_1^2 Y_1^2 + \bar{\eta}_2^2 Y_0^2 + 2(\theta_0 \theta_1 X_1 + \theta_0 \bar{\eta}_1 Y_1 + \theta_0 \bar{\eta}_2 Y_0) + \\ &\quad + 2(\theta_1 \bar{\eta}_1 X_1 Y_1 + \theta_1 \bar{\eta}_2 Y_0) + 2(\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 Y_1 Y_0)] = \\ &= \theta_0^2 D_{xp} + \theta_1^2 D_{xp} + \bar{\eta}_1^2 D_{yp} + \bar{\eta}_2^2 D_{yp} + 2\theta_0 \theta_1 \bar{\eta}_1 D_{xp} + 2\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 r_1 D_{yp} = D_{yp}, \end{aligned}$$

где $r_1 = R_1/D_{yp}$. Отсюда

$$\begin{aligned} D_{yp} &= \frac{A_2}{1 - B_2} D_{xp}; \\ A_2 &= \theta_0^2 + \theta_1^2 + 2\theta_0 \theta_1 \bar{\eta}_1; \\ B_2 &= \bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + 2r_1 \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь $D_{xp} > 0$, $D_{yp} > 0$, $|\bar{\eta}_1| < 2$, $|\bar{\eta}_2| < 1$. При $A_2 > 0$ должно быть $B_2 < 1$, при $A_2 < 0$ должно быть $B_2 > 1$.

Корреляционные моменты для величин Y_0 и Y_k равны:

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= M[Y_0 Y_0] = D_{yp}; \\ R_1 &= M[Y_0 Y_1] = M[Y_0(\theta_0 X_1 + \theta_1 X_0 + \bar{\eta}_1 Y_0 + \bar{\eta}_2 X_{-1})] = \\ &= \theta_0 \theta_1 D_{xp} + \bar{\eta}_1 R_0 + \bar{\eta}_2 R_{-1}; \\ R_2 &= M[Y_0 Y_2] = M[Y_0(\theta_0 X_2 + \theta_1 X_1 + \bar{\eta}_1 Y_1 + \bar{\eta}_2 Y_0)] = \\ &= \bar{\eta}_1 R_1 + \bar{\eta}_2 R_0; \\ R_3 &= M[Y_0 Y_3] = \bar{\eta}_1 R_2 + \bar{\eta}_2 R_1; \\ &\dots \\ R_k &= M[Y_0 Y_k] = \bar{\eta}_1 R_{k-1} + \bar{\eta}_2 R_{k-2}. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Таким образом, при $R_{-1} = R_1$

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= D_{yp}; \\ R_1 &= c_{21} D_{xp} + \bar{\eta}_1 R_0 + \bar{\eta}_2 R_1; \\ R_2 &= \bar{\eta}_1 R_1 + \bar{\eta}_2 R_0; \\ R_3 &= \bar{\eta}_1 R_2 + \bar{\eta}_2 R_1; \\ &\dots \\ R_k &= \bar{\eta}_1 R_{k-1} + \bar{\eta}_2 R_{k-2}; \\ c_{21} &= \theta_0 \theta_1. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Решетчатая корреляционная функция определяется рекуррентным выражением

$$R_y[k] = \bar{\eta}_1 R_y[k-1] + \bar{\eta}_2 R_y[k-2] \quad (44)$$

при $R_y[0] = D_{yp}$ и $R_y[1] = R_1$.

При $n=3$ согласно выражениям (34) и (35)

$$Y[k] = Y_k = \theta_0 X_k + \theta_1 X_{k-1} + \theta_2 X_{k-2} + \bar{\eta}_1 Y_{k-1} + \bar{\eta}_2 Y_{k-2} + \bar{\eta}_3 Y_{k-3}. \quad (45)$$

В установившемся режиме

$$Y_0 = \theta_0 X_0 + \theta_1 X_{-1} + \theta_2 X_{-2} + \bar{\eta}_1 Y_{-1} + \bar{\eta}_2 Y_{-2} + \bar{\eta}_3 Y_{-3};$$

$$Y_1 = \theta_0 X_1 + \theta_1 X_0 + \theta_2 X_{-1} + \bar{\eta}_1 Y_0 + \bar{\eta}_2 Y_{-1} + \bar{\eta}_3 Y_{-2};$$

$$Y_2 = \theta_0 X_2 + \theta_1 X_1 + \theta_2 X_0 + \bar{\eta}_1 Y_1 + \bar{\eta}_2 Y_0 + \bar{\eta}_3 Y_{-1};$$

$$Y_3 = \theta_0 X_3 + \theta_1 X_2 + \theta_2 X_1 + \bar{\eta}_1 Y_2 + \bar{\eta}_2 Y_1 + \bar{\eta}_3 Y_0;$$

.....

Для определения дисперсии имеем

$$\begin{aligned} M[Y_3^2] &= M[(\theta_0 X_3 + \theta_1 X_2 + \theta_2 X_1 + \bar{\eta}_1 Y_2 + \bar{\eta}_2 Y_1 + \bar{\eta}_3 Y_0)^2] = \\ &= M[\theta_0^2 X_3^2 + \theta_1^2 X_2^2 + \theta_2^2 X_1^2 + \bar{\eta}_1^2 Y_2^2 + \bar{\eta}_2^2 Y_1^2 + \bar{\eta}_3^2 Y_0^2 + \\ &+ 2(\theta_0 \theta_1 X_3 X_2 + \theta_0 \theta_2 X_3 X_1 + \theta_0 \bar{\eta}_1 X_3 Y_2 + \theta_0 \bar{\eta}_2 X_3 Y_1 + \\ &+ \theta_0 \bar{\eta}_3 X_3 Y_0) + 2(\theta_1 \theta_2 X_2 X_1 + \theta_1 \bar{\eta}_1 X_2 Y_2 + \\ &+ \theta_1 \bar{\eta}_2 X_2 Y_1 + \theta_1 \bar{\eta}_3 X_2 Y_0) + 2(\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 Y_2 Y_1 + \\ &+ \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_3 Y_2 Y_0) + 2(\bar{\eta}_2 \bar{\eta}_3 Y_1 Y_0)] = \\ &= \theta_0^2 D_{xp} + \theta_1^2 D_{xp} + \theta_2^2 D_{xp} + \bar{\eta}_1^2 D_{yp} + \bar{\eta}_2^2 D_{yp} + \bar{\eta}_3^2 D_{yp} + \\ &+ 2(\theta_0 \theta_1 \bar{\eta}_1 D_{xp} + \theta_0 \theta_2 \bar{\eta}_2 D_{xp} + \theta_0 \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_3 D_{xp} + \\ &+ 2(\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 r_1 + \bar{\eta}_1 \bar{\eta}_3 r_2 + \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_3 r_1) D_{yp} = D_{yp}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$D_{yp} = \frac{A_3}{1 - B_3} D_{xp};$$

$$A_3 = \theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_0(\theta_1 \bar{\eta}_1 + \theta_2 \bar{\eta}_2) + 2\theta_1(\theta_2 \bar{\eta}_1); \quad (46)$$

$$B_3 = \bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + \bar{\eta}_3^2 + 2r_1(\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_2 + \bar{\eta}_2 \bar{\eta}_3) + 2r_2(\bar{\eta}_1 \bar{\eta}_3),$$

где $r_1 = R_1/D_{yp}$; $r_2 = R_2/D_{yp}$; $D_{xp} > 0$; $D_{yp} > 0$; $|\bar{\eta}_1| < 3$; $|\bar{\eta}_2| < 3$; $|\bar{\eta}_3| < 1$. При $A_3 > 0$ должно быть $B_3 < 1$, при $A_3 < 0 - B_3 > 1$.

Корреляционные моменты

$$R_0 = M[Y_0 Y_0] = D_{yp};$$

$$R_1 = M[Y_0 Y_1] = M[Y_0(\theta_0 X_1 + \theta_1 X_2 + \theta_2 X_{-1} + \bar{\eta}_1 Y_0 + \bar{\eta}_2 Y_{-1} + \bar{\eta}_3 Y_{-2})] =$$

$$= \theta_0 \theta_1 D_{xp} + \theta_1 \theta_2 D_{xp} + \bar{\eta}_1 R_0 + \bar{\eta}_2 R_{-1} + \bar{\eta}_3 R_{-2};$$

$$\begin{aligned}
 R_0 &= D_{yp}; \\
 R_1 &= c_{n1}D_{xp} + \bar{\eta}_1 R_0 + \bar{\eta}_2 R_1 + \bar{\eta}_3 R_2 + \dots + \bar{\eta}_n R_{n-1}; \\
 R_2 &= c_{n2}D_{xp} + \bar{\eta}_1 R_1 + \bar{\eta}_2 R_0 + \bar{\eta}_3 R_1 + \dots + \bar{\eta}_n R_{n-2}; \\
 R_3 &= c_{n3}D_{xp} + \bar{\eta}_1 R_2 + \bar{\eta}_2 R_1 + \bar{\eta}_3 R_0 + \dots + \bar{\eta}_n R_{n-3}; \\
 &\dots \\
 R_n &= \bar{\eta}_1 R_{n-1} + \bar{\eta}_2 R_{n-2} + \dots + \bar{\eta}_n R_0; \\
 R_{n+1} &= \bar{\eta}_1 R_n + \bar{\eta}_2 R_{n-1} + \dots + \bar{\eta}_n R_1; \\
 &\dots \\
 R_{k-1} &= \bar{\eta}_1 R_{k-2} + \bar{\eta}_2 R_{k-3} + \dots + \bar{\eta}_n R_{k-1-n}; \\
 R_k &= \bar{\eta}_1 R_{k-1} + \bar{\eta}_2 R_{k-2} + \dots + \bar{\eta}_n R_{k-n}; \\
 c_{n1} &= \theta_0 \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \dots + \theta_{n-2} \theta_{n-1}; \\
 c_{n2} &= \theta_0 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_4 + \dots + \theta_{n-3} \theta_{n-1}; \\
 c_{n3} &= \theta_0 \theta_3 + \theta_1 \theta_4 + \theta_2 \theta_5 + \dots + \theta_{n-4} \theta_{n-1}; \\
 &\dots \\
 c_{n(n-1)} &= \theta_0 \theta_{n-1}.
 \end{aligned} \tag{58}$$

$$\left. \begin{aligned}
 c_{n1} &= \theta_0 \theta_1 + \theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_3 + \dots + \theta_{n-2} \theta_{n-1}; \\
 c_{n2} &= \theta_0 \theta_2 + \theta_1 \theta_3 + \theta_2 \theta_4 + \dots + \theta_{n-3} \theta_{n-1}; \\
 c_{n3} &= \theta_0 \theta_3 + \theta_1 \theta_4 + \theta_2 \theta_5 + \dots + \theta_{n-4} \theta_{n-1}; \\
 &\dots \\
 c_{n(n-1)} &= \theta_0 \theta_{n-1}.
 \end{aligned} \right\} \tag{54}$$

Аналогично выражениям (39), (44) и (49)

$$R_y[k] = \bar{\eta}_1 R_y[k-1] + \bar{\eta}_2 R_y[k-2] + \dots + \bar{\eta}_n R_y[k-n], \tag{55}$$

причем $R_y[0] = D_{yp}$; $R_y[1] = R_1$; $R_y[2] = R_2$, ..., $R_y[n-1] = R_{n-1}$.

Пример 9. Поведение силового электропривода промышленной установки в условиях переменной нагрузки подлежит исследованию на ЦВМ. Изменение нагрузки — непрерывный стационарный центрированный случайный процесс $Y(t)$ с заданными [11] корреляционной функцией и спектральной плотностью

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,5|\tau|}; \quad S_y(\omega) = \frac{4}{\pi(\omega^2 + 0,25)}.$$

Требуется осуществить цифровое моделирование случайного процесса $Y(t)$.

1. Находим

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{4}{\pi(\omega^2 + 0,25)} \pi = \frac{4}{\omega^2 + 0,25} = \frac{b(\omega)}{a(\omega)}$$

где $a(\omega) = 0,25 + \omega^2$; $b(\omega) = 4$.

2. На основании соответствий (29), получаем

$$A(p) = 0,5 + p; \quad B(p) = 2$$

и передаточную функцию

$$W(p) = 2/(p + 0,5) = h(p)/\delta(p). \tag{56}$$

3. На основании таблицы соответствий $f(p) \equiv f(t)$, как в примере 6, при $\Delta t = 0,1$ с имеем

$$\tilde{W}(z) = 2z/(z - e^{-0,05}) = 2z/(z - 0,951),$$

и в соответствии с выражением (30)

$$y(z) = \tilde{W}(z)x(z) = \frac{2z}{z - 0,951}x(z).$$

Далее находим

$$zy(z) - 0,951y(z) = 2zx(z) \quad (57)$$

и с учетом (32) на основании выражений (33) и (36)

$$y[k] = 2x[k] + 0,951y[k-1], \quad (58)$$

где $\theta_0 = 2$; $\theta_1 = 0$; $\bar{\eta}_1 = 0,951$.

4. Дисперсия D_{yp} решетчатой случайной функции $Y[k]$, реализацией которой является выражение (58), зависит от дисперсии D_{xp} решетчатой случайной функции $X[k]$, реализацией которой является $x[k]$, и определяется согласно соотношениям (37). При цифровом моделировании $Y(t)$ должно быть $D_{yp} = D_y = 4$. Для этого необходимо, чтобы дисперсия решетчатого белого шума согласно (37) была

$$D_{xp} = (D_{yp}/\theta_0^2)(1 - \bar{\eta}_1^2).$$

При $\theta_0 = 2$ и $\bar{\eta}_1 = 0,951$ должно быть $D_{xp} = 0,0951627$.

5. Согласно выражениям (39) и (58)

$$R_y[k] = 0,951R_y[k-1]. \quad (59)$$

В результате z -преобразования этого выражения с учетом соотношения (32) получаем операторное уравнение $zR_y(z) - 0,951R_y(z) = 0$.

Соответствующее ему характеристическое уравнение $z - 0,951 = 0$ имеет единственный вещественный корень $z_1 = 0,951$. Поэтому соответствующая z -изображению $R_y(z)$ решетчатая функция-оригинал $R_y[k]$ должна иметь вид [4]

$$R_y[k] = cz_1^k = c \cdot 0,951^k = ce^{-0,05k}.$$

Согласно начальному условию $R_y[0] = D_{yp} = 4$; $c = 4$ окончательно

$$R_y[k] = 4e^{-0,05k}.$$

При $D_{yp} = D_y = 4$ и $\Delta t = \Delta \tau = 0,1$ с правая ветвь заданной непрерывной корреляционной функции

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,5\tau} \quad (60)$$

представляет собой огибающую решетчатой корреляционной функции

$$R_y[k] = R_y(\Delta \tau k) = R_y(0, 1k).$$

6. Интересно заметить следующие: рекуррентному выражению решетчатой случайной функции $Y[k]$, аналогичному (58): $Y[k] = 2X[k] + 0,951Y[k-1]$, соответствует усеченное рекуррентное выражение решетчатой корреляционной функции $R_y[k]$. Аналогично этому вероятностному неоднородному дифференциальному уравнению $Y'(t) + 0,5Y(t) = 2X(t)$, определяющему согласно (56) непрерывную случайную функцию $Y(t)$, соответствует усеченное (однородное) дифференциальное уравнение $R_y'(\tau) + 0,5R_y(\tau) = 0$, определяющее при $R_y(0) = D_y = 4$ непрерывную корреляционную функцию (60).

Пример 10. Требуется моделировать $Y(t)$ с корреляционной функцией

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,51|\tau|} + 2e^{-0,2|\tau|}.$$

1. Для определения спектральной плотности $S_y(\omega)$ заметим, что составляющим заданной корреляционной функции

$$R_1(\tau) = 4e^{-0,51|\tau|} \quad \text{и} \quad R_2(\tau) = 2e^{-0,2|\tau|}$$

соответствуют (см. приложение 2) составляющие спектральной плотности

$$S_1(\omega) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 0,5}{\pi(\omega^2 + 0,25)} = \frac{4}{\pi(\omega^2 + 0,25)};$$

$$S_2(\omega) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 0,2}{\pi(\omega^2 + 0,04)} = \frac{0,8}{\pi(\omega^2 + 0,04)}.$$

Поэтому суммарной корреляционной функции $R_y(\tau) = R_1(\tau) + R_2(\tau)$ соответствует суммарная спектральная плотность

$$S_y(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) = (4,8\omega^2 + 0,36)/[\pi(\omega^2 + 0,25)(\omega^2 + 0,04)].$$

2. Находится при $S_x(\omega) = 1/\pi$ выражение

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{0,36 + 4,8\omega^2}{(0,25 + \omega^2)(0,04 + \omega^2)} = \frac{b(\omega)}{a(\omega)},$$

где $a(\omega) = (0,25 + \omega^2)(0,04 + \omega^2)$; $b(\omega) = 0,36 + 4,8\omega^2 = 4,8(0,36/4,8 + \omega^2)$.

3. На основании соответствий (29) получаем

$$A(p) = (0,5 + p)(0,2 + p);$$

$$B(p) = \sqrt{4,8} (0,6/\sqrt{4,8} + p) = 0,6 + \sqrt{4,8} p = 0,6 + 2,191p$$

и находим передаточную функцию

$$W(p) = \frac{2,191p + 0,6}{(p + 0,5)(p + 0,2)} = \frac{A}{p + 0,5} + \frac{B}{p + 0,2} =$$

$$= \frac{(A + B)p + 0,2A + 0,5B}{(p + 0,5)(p + 0,2)}.$$

Из системы уравнений $A + B = 2,191$; $0,2A + 0,5B = 0,6$ находим $A = 1,651$, $B = 0,539$. Поэтому

$$W(p) = \frac{1,651}{p + 0,5} + \frac{0,539}{p + 0,2}.$$

4. На основании таблицы соответствий $f(p) \rightleftharpoons f(z)$ определяем (17) при $\Delta t = 0,1$ с

$$\tilde{W}(z) = \frac{1,651}{z - e^{-0,05}} + \frac{0,539}{z - e^{-0,02}} = \frac{1,651}{z - 0,951} + \frac{0,539}{z - 0,980}$$

и (30)

$$y(z) = \tilde{W}(z) x(z) = \frac{2,191z^2 - 2,132z}{z^2 - 1,931z + 0,932} x(z).$$

5. Далее получаем

$$z^2 y(z) - 1,931z y(z) + 0,932y(z) = 2,191z^2 x(z) - 2,132z x(z) \quad (61)$$

и с учетом выражений (32), (38) и (40)

$$y[k] = 2,191x[k] - 2,132x[k-1] + 1,931y[k-1] - 0,932y[k-2], \quad (62)$$

где $\theta_0 = 2,191$; $\theta_1 = -2,132$; $\bar{\eta}_1 = 1,931$; $\bar{\eta}_2 = -0,932$.

6. Для определения соотношения между дисперсиями D_{y_p} и D_{x_p} согласно соотношениям (41) рассчитываем

$$\begin{aligned} A_2 &= \theta_0^2 + \theta_1^2 + 2\theta_0\theta_1\bar{\eta}_1 = \\ &= 2,191^2 + 2,132^2 - 2 \cdot 2,191 \cdot 2,132 \cdot 1,931 = -8,697; \\ B_2 &= \bar{\eta}_1^2 + \bar{\eta}_2^2 + 2r_1\bar{\eta}_1\bar{\eta}_2 = \\ &= 1,931^2 + 0,932^2 - 2r_1 \cdot 1,931 \cdot 0,932 = 4,600 - 3,602r_1. \end{aligned}$$

Так как

$$R_y(0,1 \cdot 1) = R_1 = 4 \cdot 0,951 + 2 \cdot 0,980 = 5,765;$$

$$r_y(0,1 \cdot 1) = r_1 = R_1/D_y = 5,765/6 = 0,961,$$

то

$$B_2 = 4,600 - 3,602 \cdot 0,961 = 1,139.$$

Согласно выражениям (44) и (62)

$$R_y[k] = 1,931R_y[k-1] - 0,932R_y[k-2] \quad (63)$$

при $R_y[0] = 6$ и $R_y[1] = 5,765$. В результате z -преобразования с учетом (32) имеем

$$z^2 R_y(z) - 1,931z R_y(z) + 0,932R_y(z) = 0.$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вещественные корни $z_1 = 0,951$ и $z_2 = 0,980$. Поэтому соответствующая $R_y(z)$ решетчатая функция-оригинал $R_y[k]$ должна иметь вид

$$R_y[k] = c_1 z_1^k + c_2 z_2^k.$$

Согласно начальным условиям $R_y[0] = c_1 + c_2 = 6$ и $R_y[1] = 0,951c_1 + 0,980c_2 = 5,765$ можно найти $c_1 = 4$ и $c_2 = 2$. Поэтому

$$R_y[k] = 4 \cdot 0,951^k + 2 \cdot 0,980^k = 4e^{-0,05k} + 2e^{-0,02k}.$$

При $D_{y\rho} = D_y = 6$ и $\Delta t = \Delta \tau = 0,1$ с правая ветвь заданной непрерывной корреляционной функции

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,5\tau} + 2e^{-0,2\tau}$$

представляет собой огибающую $R_y[k]$.

7. Рекуррентному вероятностному выражению решетчатой случайной функции $Y[k]$, аналогичному (62),

$$Y[k] = 2,191X[k] - 2,132X[k-1] + 1,931Y[k-1] - 0,932Y[k-2]$$

соответствует усеченное рекуррентное выражение (63) решетчатой корреляционной функции $R_y[k]$. Вероятностному дифференциальному уравнению

$$Y''(t) + 0,7Y'(t) + 0,1Y(t) = 2,191X'(t) + 0,6X(t),$$

определяющему, согласно передаточной функции $W(\rho)$, непрерывную случайную функцию $Y(t)$, соответствует усеченное дифференциальное уравнение

$$R_y''(\tau) + 0,7R_y'(\tau) + 0,1R_y(\tau) = 0,$$

определяющее при $R_y(0) = 6$ и $R_y(0,1) = 5,765$ непрерывную корреляционную функцию $R_y(\tau)$.

Действительно, так как характеристическое уравнение $\rho^2 + 0,7\rho + 0,1 = 0$ имеет корни $\rho_1 = -0,5$ и $\rho_2 = -0,2$, то должно быть

$$R_y(\tau) = c_1 e^{-0,5\tau} + c_2 e^{-0,2\tau}; \quad R_y(0) = c_1 + c_2 = 6;$$

$$R_y(0,1) = c_1 e^{-0,05} + c_2 e^{-0,02} = 5,765,$$

откуда $c_1 = 4$ и $c_2 = 2$.

Пример 11. При исследовании на ЦВМ динамики портального крана требуется моделировать его нагрузку в форме случайного процесса $Y(t)$ с корреляционной функцией [11, 12]

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,5|\tau|} (\cos 5\tau + 0,1 \sin 5|\tau|).$$

1. Для определения спектральной плотности $S_y(\omega)$ заметим, что составляющим $R_y(\tau)$

$$R_1(\tau) = 4e^{-0,5|\tau|} \cos 5\tau; \quad R_2(\tau) = 0,4e^{-0,5|\tau|} \sin 5|\tau|$$

соответствуют (см. приложение 2) составляющие спектральной плотности

$$S_1(\omega) = \frac{4 \cdot 2 \cdot 0,5 (\omega^2 + 0,5^2 + 5^2)}{\pi \{[\omega^2 - (0,5^2 + 5^2)]^2 + 4 \cdot 0,5^2 \omega^2\}} = \frac{4 (\omega^2 + 25,25)}{\pi \{[\omega^2 - 25,25]^2 + \omega^2\}};$$

$$S_2(\omega) = \frac{0,4 \cdot 2 \cdot 5 (0,5^2 + 5^2 - \omega^2)}{\pi \{[\omega^2 - (0,5^2 + 5^2)]^2 + 4 \cdot 0,5^2 \omega^2\}} = \frac{4 \cdot (25,25 - \omega^2)}{\pi \{[\omega^2 - 25,25]^2 + \omega^2\}}.$$

Поэтому суммарной корреляционной функции соответствует суммарная спектральная плотность

$$S_y(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) = 202/[\pi(637,6 - 49,5\omega^2 + \omega^4)].$$

2. Находим при $S_x(\omega) = 1/\pi$ выражение

$$|W(j\omega)|^2 = \frac{202}{637,6 - 49,5\omega^2 + \omega^4} = \frac{b(\omega)}{a(\omega)},$$

причем $a(\omega) = 637,6 - 49,5\omega^2 + \omega^4$; $b(\omega) = 202$.

3. На основании соответствий (29) получаем $A(p) = 25,25 + p + p^2$, $B(p) = \sqrt{202} = 14,21267$ и передаточную функцию

$$W(p) = 14,21/(p^2 + p + 25,25).$$

4. По таблице соответствий $f(p) \rightleftharpoons f(z)$ имеем

$$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \rightleftharpoons \frac{za \sin \beta \Delta t}{z^2 - 2za \cos \beta \Delta t + a^2}; \quad a = e^{-\alpha \Delta t}.$$

Должно быть $p^2 + p + 25,25 = (p + \alpha)^2 + \beta^2 = p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2$ и далее $2\alpha = 1$; $\alpha^2 + \beta^2 = 25,25$.

Отсюда находим $\alpha = 0,5$ и $\beta = 5$. Поэтому при $\Delta t = 0,2$ с имеем

$$\begin{aligned} \frac{14,21}{5} \frac{5}{(p + 0,5)^2 + 5^2} &= \frac{14,21}{5} \frac{ze^{-0,5 \cdot 0,2} \sin 5 \cdot 0,2}{z^2 - 2ze^{-0,1} \cos 1 + e^{-0,2}} = \\ &= \frac{2,842 \cdot 0,9 \cdot 0,841z}{z^2 - 2 \cdot 0,9 \cdot 0,54z + 0,82} = \frac{2,15z}{z^2 - 0,972z + 0,82}. \end{aligned}$$

Согласно выражению (30)

$$y(z) = \frac{2,15z}{z^2 - 0,972z + 0,82} x(z).$$

5. Далее получаем

$$z^2 y(z) - 0,972y(z) + 0,82y(z) = 2,15x(z) \quad (64)$$

и, наконец,

$$y[k] = 2,15x[k] + 0,972y[k-1] - 0,82y[k-2], \quad (65)$$

где $\theta_0 = 2,15$; $\theta_1 = \theta_2 = 0$; $\bar{\eta}_1 = 0,972$; $\bar{\eta}_2 = -0,82$.

6. Согласно соотношениям (41) рассчитываем $A_2 = 2,15^2 = 4,62$; $B_2 = 0,972^2 + 0,82^2 - 2r_1 \cdot 0,972 \cdot 0,82 = 0,945 + 0,671 - 1,592r_1$.

Так как $R_y(0,2 \cdot 1) = R_1 = 4e^{-0,1}(\cos 1 + 0,1 \sin 1) = 3,619(0,540 + 0,1 \cdot 0,842) = 2,26$, то $r_y(0,2 \cdot 1) = r_1 = R_1/D_y = 2,26/4 = 0,565$.

Поэтому $B_2 = 1,616 - 1,592 \cdot 0,565 = 0,717$ и согласно (41)

$$D_{xp} = \frac{1 - B_2}{A_2} \cdot 4 = \frac{1 - 0,717}{4,62} \cdot 4 = 0,24.$$

7. Согласно выражениям (44) и (65)

$$R_y[k] = 0,972R_y[k-1] - 0,82R_y[k-2] \quad (66)$$

при $R_y[0] = 4$ и $R_y[1] = R_1 = 2,26$. В результате z -преобразования с учетом (32) имеем

$$z^2 R_y(z) - 0,972z R_y(z) + 0,82 R_y(z) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет комплексные сопряженные корни $z_{1,2} = 0,486 \pm j0,764$. Поэтому соответствующая решетчатая функция должна иметь вид

$$R_y[k] = c_1 \rho^k \cos \bar{\beta} k + c_2 \rho^k \sin \bar{\beta} k,$$

где $\rho = 0,486^2 + 0,764^2 = 0,905$; $\bar{\beta} = \arctg(0,762/0,486) = \arctg 1,56$, $\bar{\beta} = 1$. Поэтому

$$R_y[k] = c_1 \cdot 0,905^k \cos k + c_2 \cdot 0,905^k \sin k.$$

Согласно начальным условиям $R_y[0] = c_1 = 4$ и $R_y[1] = 0,905 \cdot 0,54c_1 + 0,905 \cdot 0,84c_2 = 2,26$ находим $c_1 = 4$ и $c_2 = 0,4$. Поэтому

$$R_y[k] = 4 \cdot 0,905^k (\cos k + 0,1 \sin k) = 4e^{-0,1k} (\cos k + 0,1 \sin k).$$

При $\Delta t = \Delta \tau = 0,2$ с правая ветвь заданной корреляционной функции

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,5\tau} (\cos 5\tau + 0,1 \sin 5\tau)$$

представляет собой огибающую $R_y[k] = R_y(0,2k)$.

8. Рекуррентному выражению решетчатой случайной функции $Y[k]$, аналогичному (65),

$$Y[k] = 2,15X[k] + 0,972Y[k-1] - 0,82Y[k-2]$$

соответствует усеченное рекуррентное выражение решетчатой корреляционной функции $R_y[k]$. Аналогично этому, вероятностному неоднородному дифференциальному уравнению

$$Y''(t) + Y'(t) + 25,25Y(t) = 14,21X(t),$$

определяющему согласно $W(p)$ непрерывную случайную функцию $Y(t)$, соответствует усеченное (однородное) дифференциальное уравнение

$$R_y''(\tau) + R_y'(\tau) + 25,25R_y(\tau) = 0, \quad (67)$$

определяющее при $R_y(0) = D_y = 4$ и $R_y(0,2) = 2,26$ непрерывную корреляционную функцию $R_y(\tau)$.

Соответствующее уравнению (67) характеристическое уравнение $p^2 + p + 25,25 = 0$ имеет корни $p_{1,2} = -0,5 \pm \sqrt{0,25 - 25,25} = -0,5 \pm j5$. Поэтому решение (60) имеет вид

$$R_y(\tau) = c_1 e^{-0,5\tau} \cos 5\tau + c_2 e^{-0,5\tau} \sin 5\tau.$$

При начальных условиях имеем

$$R_y(0) = c_1 = 4;$$

$$R_y(0,2) = 4e^{-0,5 \cdot 0,2} \cos(5 \cdot 0,2) + c_2 e^{-0,5 \cdot 0,2} \sin(5 \cdot 0,2) = 2,26.$$

Отсюда $c_2 = 0,4$, и окончательно

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,51\tau} (\cos 5\tau + 0,1 \sin 5\tau).$$

Пример 12. При цифровом моделировании силовой автоматической системы управления направлением движения пропашного культиваторного агрегата требуется моделировать [13] входное воздействие $Y(t)$ с корреляционной функцией

$$R_y(\tau) = A_1 e^{-\alpha_1 |\tau|} + A_2 e^{-\alpha_2 |\tau|} \cos \beta \tau.$$

При скорости движения агрегата, равной 3 м/с, параметры $R_y(\tau)$ равны [13, с. 169]: $A_1 = 0,4$; $A_2 = 0,6$; $\alpha_1 = 0,9 \text{ с}^{-1}$; $\alpha_2 = 0,8 \text{ с}^{-1}$; $\beta = 1,25 \text{ с}^{-1}$, так что

$$R_y(\tau) = 0,4e^{-0,91\tau} + 0,6e^{-0,81\tau} \cos 1,25\tau.$$

1. Составляющим $R_y(\tau)$ соответствуют составляющие спектральной плотности

$$S_1(\omega) = \frac{0,72}{\pi(\omega^2 + 0,81)};$$

$$S_2(\omega) = \frac{0,96(\omega^2 + 2,2)}{\pi(\omega^4 - 1,84\omega^2 + 4,84)}.$$

Поэтому

$$S_y(\omega) = S_1(\omega) + S_2(\omega) = \frac{1,68(\omega^4 + 0,93\omega^2 + 3,08)}{\pi(\omega^2 + 0,81)(\omega^4 - 1,84\omega^2 + 4,84)}.$$

2. При $S_x(\omega) = 1/\pi$ находится

$$\frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = |W(j\omega)|^2 = \frac{b(\omega)}{a(\omega)} = \frac{1,68(\omega^4 + 0,93\omega^2 + 3,08)}{\pi(\omega^2 + 0,81)(\omega^4 - 1,84\omega^2 + 4,84)}.$$

3. На основании соответствий (29) получаем $A(p) = (0,9 + p)(2,2 + 1,6p + p^2)$; $B(p) = 1,296(1,76 + 2,11p + p^2)$ и передаточную функцию

$$W(p) = \frac{1,296(p^2 + 2,11p + 1,76)}{(p + 0,9)(p^2 + 1,6p + 2,2)} = 1,296 \left(\frac{0,429}{p + 0,9} + \frac{0,571p + 0,909}{p^2 + 1,6p + 2,2} \right).$$

4. По таблице соответствий $f(p) \rightleftharpoons f(z)$ имеем

$$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \rightleftharpoons \frac{z(z - a \cos \beta \Delta t)}{z^2 - 2za \cos \beta \Delta t + a^2}$$

$$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \rightleftharpoons \frac{za \sin \beta \Delta t}{z^2 - 2az \cos \beta \Delta t + a^2}$$

$$\frac{1}{p + \alpha} \rightleftharpoons \frac{z}{z - a},$$

где $a = \exp(-\alpha \Delta t)$; $a_1 = \exp(-\alpha_1 \Delta t)$.

Должно быть $\rho^2 + 2\alpha\rho + \alpha^2 + \beta^2 = \rho^2 + 1,6\rho + 2,2$; $2\alpha = 1,6$;
 $\alpha^2 + \beta^2 = 2,2$. Отсюда находим $\alpha = 0,8$ и $\beta = 1,25$. Поэтому

$$\frac{0,571\rho + 0,909}{\rho^2 + 1,6\rho + 2,2} = 0,571 \cdot \frac{\rho + 1,592}{(\rho + 0,8)^2 + 1,56} =$$

$$= 0,571 \left[\frac{\rho + 0,8}{(\rho + 0,8)^2 + 1,56} + \frac{0,792}{1,25} \frac{1,25}{(\rho + 0,8)^2 + 1,56} \right].$$

При $\Delta t = 0,1$ с, $a = e^{-0,8 \cdot 0,1} = 0,923$, $a_1 = e^{-0,9 \cdot 0,1} = 0,914$;
 $\cos \beta \Delta t = \cos 1,249 \cdot 0,1 = 0,992$; $\sin \beta \Delta t = \sin 0,125 = 0,125$ имеем

$$\frac{\rho + 0,8}{(\rho + 0,8)^2 + 1,56} \stackrel{z}{=} \frac{z(z - 0,9159)}{z^2 - 1,832z + 0,852};$$

$$\frac{1,25}{(\rho + 0,8)^2 + 1,56} \stackrel{z}{=} \frac{0,119z}{z^2 - 1,832z + 0,852};$$

$$\frac{1}{\rho + 0,9} \stackrel{z}{=} \frac{z}{z - 0,914}.$$

На основании этого получаем

$$\mathcal{W}(\rho) = 1,296 \left[\frac{0,429}{\rho + 0,9} + \frac{0,571\rho + 0,909}{\rho^2 + 1,6\rho + 2,2} \right] \stackrel{z}{=} 1,296 \left[\frac{0,429}{z - 0,914} + \right.$$

$$\left. + 0,571 \left\{ \frac{z(z - 0,916)}{z^2 - 1,832z + 0,852} + 0,634 \frac{0,119z}{z^2 - 1,832z + 0,852} \right\} \right] = \hat{W}(z).$$

Таким образом, согласно выражению (30)

$$y(z) = \frac{1,296(z^3 - 1,788z^2 + 0,805z)}{(z - 0,914)(z^2 - 1,832z + 0,852)} =$$

$$= \frac{1,296 - 2,317z^{-1} + 1,043z^2}{1 - 2,746z^{-1} + 2,526z^{-2} - 0,779z^{-3}} x(z).$$

5. Далее получаем

$$y[k] = 1,296x[k] - 2,317x[k-1] + 1,043x[k-2] +$$

$$+ 2,746y[k-1] - 2,526y[k-2] + 0,779y[k-3], \quad (68)$$

где $\theta_0 = 1,296$; $\theta_1 = -2,317$; $\theta_2 = 1,043$; $\theta_3 = 0$; $\bar{\eta}_1 = 2,746$;
 $\bar{\eta}_2 = -2,526$; $\bar{\eta}_3 = 0,779$.

6. Согласно (46) можно рассчитать

$$A_3 = 1,296 + (-2,317)^2 + 1,043^2 +$$

$$+ 2 \cdot 1,296(-2,317)(2,746 + 1,043) +$$

$$+ 2 \cdot (-2,317) \cdot 1,043 \cdot 2,746 \approx -28;$$

$$B_3 = 2,746^2 + (-2,526)^2 + 0,779^2 +$$

$$+ 2r_1(2,746[-2,526] + [-2,526] \cdot 0,779) + 2r_2 \cdot 2,746 \cdot 0,779 =$$

$$= 14,527 - r_1 \cdot 17,806 + r_2 \cdot 4,276.$$

Так как

$$R_y(0) = D_y = 0,4 + 0,6 = 1;$$

$$R_y(0,1 \cdot 1) = R_1 = 0,4e^{-0,09} + 0,6e^{-0,08} \cos 0,125 = 0,915;$$

$$R_y(0,1 \cdot 2) = R_2 = 0,4e^{-0,18} + 0,6e^{-0,16} \cos 0,25 = 0,829,$$

то $r_1 = R_1/D_y = 0,915$; $r_2 = R_2/D_y = 0,829$.

Поэтому $B_3 = 14,527 - 0,915 \cdot 17,806 + 0,829 \cdot 4,276 = 1,78$ и согласно (46)

$$D_{xp} = \frac{1 - B_3}{A_3} D_{yp} = \frac{1 - 1,78}{-28} \cdot 1 = 0,028.$$

7. Согласно выражениям (49) и (68)

$$R_y[k] = 2,746R_y[k-1] - 2,526R_y[k-2] + 0,779R_y[k-3] \quad (69)$$

при $R_y[0] = D_y = 1$; $R_y[1] = R_1 = 0,915$; $R_y[2] = R_2 = 0,829$

В результате z-преобразования с учетом (32) имеем

$$z^3 R_y(z) - 2,746R_y(z) + 2,526R_y(z) - 0,779R_y(z) = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет корни $z_1 = 0,914$; $z_{2,3} = 0,916 \pm j0,119$. Поэтому соответствующая решетчатая функция должна иметь вид

$$R_y[k] = c_1 \cdot 0,914^k + c_2 \rho^k \cos \bar{\beta}k + c_3 \rho^k \sin \bar{\beta}k,$$

где $\rho = \sqrt{0,916^2 + 0,119^2} = 0,923$; $\bar{\beta} = \arctg(0,119/0,916) = \arctg 0,013 = 0,125$. Поэтому

$$R_y[k] = c_1 \cdot 0,914^k + 0,923^k (c_2 \cos 0,125k + c_3 \sin 0,125k).$$

Согласно начальным условиям $R_y[0] = D_y$; $R_y[1] = R_1$; $R_y[2] = R_2$ можно найти $c_1 = 0,4$; $c_2 = 0,6$; $c_3 = 0$. Поэтому

$$R_y[k] = 0,4e^{-0,09k} + 0,6e^{-0,08k} \cos 0,125k.$$

При $k = \tau/0,1$ получаем

$$R_y(\tau) = 0,4e^{-0,9\tau} + 0,6e^{-0,8\tau} \cos 1,25\tau,$$

т. е. правую ветвь заданной непрерывной корреляционной функции.

8. Рекуррентному выражению решетчатой случайной функции $Y[k]$, аналогичному (68), соответствует усеченное рекуррентное выражение решетчатой корреляционной функции (69). Вероятностному неоднородному дифференциальному уравнению, определяющему согласно $W(p)$ непрерывную случайную функцию $Y(t)$, соответствует однородное дифференциальное уравнение, определяющее при $R_y(0) = D_y = 1$; $R_y(0,1) = R_1$; $R_y(0,2) = R_2$ непрерывную корреляционную функцию $R_y(\tau)$.

Так как соответствующее характеристическое уравнение $(p + 0,9)(p^2 + 1,6p + 2,2) = 0$ имеет корни $p_1 = -0,9$; $p_{2,3} = 0,8 \pm j1,25$, то $R_y(\tau) = c_1 e^{-0,9\tau} + c_2 e^{-0,8\tau} \cos 1,25\tau + c_3 e^{-0,8\tau} \sin 1,25\tau$.

При начальных условиях можно найти $c_1 = 0,4$; $c_2 = 0,6$; $c_3 = 0$ и окончательно

$$R_y(\tau) = 0,4e^{-0,9|\tau|} + 0,6e^{-0,8|\tau|} \cos 1,25\tau.$$

Эти примеры показывают, что воспроизведение непрерывного стационарного случайного процесса с дробно-рациональ-

ной спектральной плотностью на цифровой модели, описываемой дискретной передаточной функцией вида (17), осуществляется точно. Это надо понимать в том смысле, что моделируемый непрерывный случайный процесс $Y(t)$ и моделирующий его решетчатый случайный процесс $Y[k]$ характеризуются «одинаковыми» корреляционными функциями $R_Y(\tau)$ и $R_Y[k]$, причем $R_Y[k] = R_Y(\Delta\tau k)$.

В этих примерах корреляционная функция реакции непрерывной системы в установившемся режиме на белый шум описывается однородным дифференциальным уравнением, соответствующим неоднородному уравнению, описывающему систему. Это справедливо и в общем случае.

Если известны корреляционная функция $R_X(\tau)$ стационарного входного воздействия $X(t)$ и импульсная переходная функция линейной стационарной системы $h(t)$, то правая ветвь корреляционной функции реакции $Y(t)$ в установившемся режиме определяется [14] выражением

$$R_Y(\tau) = \int_0^{\infty} h(t_1) dt_1 \int_0^{\infty} h(t_2) R_X(\tau + t_1 - t_2) dt_2.$$

Получение согласно этой формуле функции $R_Y(\tau)$ в аналитическом виде в общем случае весьма сложно. Задача упрощается, если входное воздействие — белый шум и $R_X(\tau) = \delta(\tau)$. В таком случае $\tau = t_2 - t_1$; $t_2 = \tau + t_1$; $R_X(\tau + t_1 - t_2) = \delta(\tau + t_1 - t_2)$; $h(t_2) = h(\tau + t_1)$; при $t_1 = t$

$$R_Y(\tau) = \int_0^{\infty} h(t) h(\tau + t) dt. \quad (70)$$

Каждому отрицательному вещественному корню $-\alpha_i$ характеристического уравнения линейной системы $A(p) = 0$ соответствует в аналитическом выражении $h(t)$ слагаемое [15]

$$h_i(t) = c_i e^{-\alpha_i t}. \quad (71)$$

Каждому корню $-\alpha_i$ кратности q соответствует слагаемое

$$h_i(t) = (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_q t^{q-1}) e^{-\alpha_i t}. \quad (72)$$

Каждой паре комплексных сопряженных корней $-\alpha_i + j\beta_i$ и $-\alpha_i - j\beta_i$ соответствует

$$h_i(t) = (c_1 \cos \beta_i t + c_2 \sin \beta_i t) e^{-\alpha_i t} = c e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i). \quad (73)$$

Каждой паре комплексных сопряженных корней кратности q соответствует

$$\begin{aligned} h_i(t) &= (c'_1 + c'_2 t + c'_3 t^2 + \dots + c'_q t^{q-1}) e^{-\alpha_i t} \cos \beta_i t + \\ &+ (c''_1 + c''_2 t + c''_3 t^2 + \dots + c''_q t^{q-1}) e^{-\alpha_i t} \sin \beta_i t = \\ &= (c_1 + c_2 t + c_3 t^2 + \dots + c_q t^{q-1}) e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i). \end{aligned} \quad (74)$$

Таким образом, аналитическое выражение $h(t)$ представляет собой в общем случае сумму членов вида (71) — (74). Благодаря этому аналитическое выражение правой ветви корреляционной функции $R_y(\tau)$, получаемое по формуле (71), всегда является сходственным¹ с аналитическим выражением $h(t)$, т. е. отличается от него только аргументом и значениями постоянных коэффициентов. Поэтому если $h(t) = \Phi(t, \alpha, \beta, c_1, \dots, c_n)$, то $R_y(\tau) = \Phi(\tau, \alpha, \beta, c'_1, \dots, c'_n)$.

Пример 13. Пусть

$$h(t) = c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Подынтегральное выражение в (70)

$$\begin{aligned} & (c_1 e^{-\alpha_1 t} + c_2 e^{-\alpha_2 t})(c_1 e^{-\alpha_1(t+\tau)} + c_2 e^{-\alpha_2(t+\tau)}) = \\ & = c_1^2 e^{-\alpha_1 \tau} e^{-2\alpha_1 t} + c_1 c_2 e^{-\alpha_1 \tau} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} + \\ & + c_1 c_2 e^{-\alpha_2 \tau} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} + c_2^2 e^{-\alpha_2 \tau} e^{-2\alpha_2 t}. \end{aligned}$$

Интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c_1^2 e^{-\alpha_1 \tau}}{-2\alpha_1} e^{-2\alpha_1 t} + \frac{c_1 c_2 e^{-\alpha_1 \tau}}{-(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} + \frac{c_1 c_2 e^{-\alpha_2 \tau}}{-(\alpha_1 + \alpha_2)} e^{-(\alpha_1 + \alpha_2)t} + \right. \\ & \left. + \frac{c_2^2 e^{-\alpha_2 \tau}}{-2\alpha_2} e^{-2\alpha_2 t} \right) \Big|_0^{\infty} = c_1' e^{-\alpha_1 \tau} + c_2' e^{-\alpha_2 \tau} = R_y(\tau). \end{aligned}$$

Пример 14. Дано

$$h(t) = c_1 e^{-\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t}.$$

Подынтегральное выражение в (70)

$$\begin{aligned} & (c_1 e^{-\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t})(c_1 e^{-\alpha(t+\tau)} + c_2 e^{-\alpha(t+\tau)} [t + \tau]) = \\ & = (c_1^2 e^{-\alpha \tau}) e^{-2\alpha t} + (c_1 c_2 \tau e^{-\alpha \tau}) e^{-2\alpha t} + (c_1 c_2 e^{-\alpha \tau}) t e^{-2\alpha t} + \\ & + (c_1 c_2 e^{-\alpha \tau}) t e^{-2\alpha t} + (c_2^2 \tau e^{-\alpha \tau}) e^{-2\alpha t} + (c_2^2 e^{-\alpha \tau}) t e^{-2\alpha t} = \\ & = [c_1^2 e^{-\alpha \tau} + (c_1 + c_2 + c_2^2) \tau e^{-\alpha \tau}] e^{-2\alpha t} + [(2c_1 c_2 + c_2^2) e^{-\alpha \tau}] t e^{-2\alpha t}. \end{aligned}$$

Так как согласно [15]

$$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{-2\alpha} e^{-2\alpha t} \Big|_0^{\infty} = 0 - \frac{1}{-2\alpha} = \frac{1}{2\alpha},$$

$$\int_0^{\infty} t e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{4\alpha^2} e^{-2\alpha t} (-2\alpha t - 1) \Big|_0^{\infty} = 0 - \left(-\frac{1}{4\alpha^2} \right) = \frac{1}{4\alpha^2},$$

то

$$R_y(\tau) = \left(\frac{c_1^2}{2\alpha} + \frac{2c_1 c_2 + c_2^2}{4\alpha^2} \right) e^{-\alpha \tau} + \frac{c_1 c_2 + c_2^2}{2\alpha} \tau e^{-\alpha \tau}.$$

¹ Функции называются сходственными [16, 17], если они различаются только переменными и ненулевыми постоянными.

Пример 15. Дано

$$h(t) = c_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Подынтегральное выражение в (70)

$$\begin{aligned} & (c_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t) (c_1 e^{-\alpha(\tau+t)} \cos [\beta\tau + \beta t] + \\ & + c_2 e^{-\alpha(\tau+t)} \sin [\beta\tau + \beta t]) = \left(\frac{c_1^2 + c_2^2}{2} e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau \right) e^{-2\alpha t} + \\ & + \left(\frac{c_1^2}{2} e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau + c_1 c_2 e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau - \frac{c_2^2}{2} e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau \right) e^{-2\alpha t} \cos \beta t + \\ & + \left(-\frac{c_1^2}{2} e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau + c_1 c_2 e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau + \frac{c_2^2}{2} e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau \right) e^{-2\alpha t} \sin \beta t. \end{aligned}$$

Так как согласно [15]

$$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} dt = \frac{1}{2\alpha};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \cos \beta t dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2};$$

$$\int_0^{\infty} e^{-2\alpha t} \sin \beta t dt = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

то

$$R_y(\tau) = c'_1 e^{-\alpha\tau} \cos \beta\tau + c'_2 e^{-\alpha\tau} \sin \beta\tau.$$

Передаточной функции непрерывной линейной стационарной системы (1) соответствуют описывающие $h(t)$ дифференциальные уравнения — неоднородное

$$A(p)h = B(p) \quad (75)$$

при нулевых начальных условиях и однородное

$$A(p)h = 0, \quad p = d/dt \quad (76)$$

при ненулевых начальных условиях $h_0 = h(0)$; $h'_0 = h'(0)$; ... Благодаря сходственности функций $h(t)$ и $R_y(\tau)$ последняя описывается при соответствующих начальных условиях однородным уравнением

$$A(p)R_y = 0, \quad p = d/d\tau. \quad (77)$$

Несмотря на сходственность функций $h(t)$ и $R_y(\tau)$, а также уравнений (76) и (77), подобие [17] этих функций в общем случае невозможно.

Пример 16. В примере 10 имеем

$$W(p) = \frac{2,19p + 0,6}{p^2 + 0,7p + 0,1}.$$

Импульсная переходная функция определяется уравнением (76)

$$p^2h + 0,7ph + 0,1h = 0$$

при $h(0) = 2,19$; $h'(0) = 0,933$ и равна

$$h(t) = 1,65e^{-0,5t} + 0,59e^{-0,2t}. \quad (78)$$

Действительно, переходя от дифференциального уравнения

$$h''(t) + 0,7h'(t) + 0,1h(t) = 2,19\delta'(t) + 0,6\delta(t)$$

к операторному уравнению, необходимо учитывать соответствия

$$h''(t) \doteq p^2h - ph(0) - h'(0); \quad h'(t) \doteq ph - h(0);$$

$$h(t) \doteq h; \quad \delta'(t) \doteq p; \quad \delta(t) \doteq 1,$$

которые позволяют записать неоднородное операторное уравнение (75) в виде

$$p^2h + 0,7ph + 0,1h = [h(0) + 2,19]p + 0,6 + h'(0) + 0,7h(0).$$

Это уравнение станет однородным для начальных условий, полученных из соотношений $h(0) + 2,19 = 0$; $h(0) = -2,19$; $h'(0) + 0,7h(0) + 0,6 = 0$; $h'(0) = 0,933$.

Корреляционная функция определяется уравнением

$$p^2R_y + 0,7pR_y + 0,1R_y = 0$$

при $R_y(0) = 6$; $R'_y(0) = 2,4$ и равна

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,5\tau} + 2e^{-0,2\tau}. \quad (79)$$

Для подобия функций (78) и (79) необходимо выполнение трех условий [17]. Первое условие, заключающееся в сходственности функций, выполняется. Второе условие требует связи сходственных переменных масштабами

$$m_t = t/\tau; \quad m_h = h/R_y.$$

Третье условие требует выбора численных значений масштабов согласно соответствующим выражениям (78) и (79) масштабным уравнениям. Для получения этих уравнений преобразуем (78) и (79) к виду

$$1 = \frac{1,65}{h} e^{-0,5t} + \frac{0,59}{h} e^{-0,2t};$$

$$1 = \frac{4}{R_y} e^{-0,5\tau} + \frac{2}{R_y} e^{-0,2\tau}.$$

Получаем критерии подобия

$$n'_1 = \frac{1,65}{h}; \quad n'_2 = \frac{0,59}{h}; \quad n'_3 = 0,5t; \quad n'_4 = 0,2t;$$

$$n''_1 = \frac{4}{R_y}; \quad n''_2 = \frac{2}{R_y}; \quad n''_3 = 0,5\tau; \quad n''_4 = 0,2\tau$$

и масштабные уравнения

$$\frac{n_1'}{n_1''} = \frac{1,65}{4h/R_y} = \frac{1,65}{4m_h} = 1; \quad \frac{n_2'}{n_2''} = \frac{0,59}{2h/R_y} = \frac{0,59}{2m_h} = 1;$$

$$\frac{n_3'}{n_3''} = \frac{0,5t}{0,5\tau} = m_t = 1; \quad \frac{n_4'}{n_4''} = \frac{0,2t}{0,2\tau} = m_t = 1.$$

Так как два первых уравнения противоречивы, то $h \sim R_y$ невозможно.

В следующей главе будет показано, что представление правой ветви корреляционной функции $R_y(\tau)$ как решения однородного дифференциального уравнения (77) оказывается важным для идентификации непрерывных стационарных случайных процессов.

Возможно [18] получение передаточной функции $W(p)$, необходимой для моделирования случайного процесса $Y(t)$, с заданной корреляционной функцией $R_y(\tau)$, без перехода от $R_y(\tau)$ к соответствующей спектральной плотности $S_y(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} R_y(\tau)$.

Представим выражение $S_y(\omega)$ через $R_y(\tau)$ в виде

$$S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_{-\infty}^0 R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right].$$

Заменяем во втором интеграле переменную τ переменной $\tau_1 = -\tau$ и получаем

$$S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} R_y(-\tau_1) e^{j\omega\tau_1} d\tau_1 \right]$$

или, так как $R_y(\tau_1) = R_y(-\tau_1)$,

$$S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right]. \quad (80)$$

Изображение правой ветви корреляционной функции по Лапласу

$$R_y(p) = \int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{-p\tau} d\tau. \quad (81)$$

Поэтому

$$\int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = R_y(p)_{p=j\omega} = R_y(j\omega);$$

$$\int_0^{\infty} R_y(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau = R_y(p)_{p=-j\omega} = R_y(-j\omega).$$

С учетом этого из выражения (80) имеем

$$S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} [R_y(j\omega) + R_y(-j\omega)].$$

Аналогично

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} [R_x(j\omega) + R_x(-j\omega)],$$

где $R_x(p) = \int_0^{\infty} R_x(\tau) e^{-p\tau} d\tau$; $R_x(j\omega) = R_x(p)_{p=j\omega}$.

Согласно (21)

$$W(j\omega)W(-j\omega) = \frac{S_y(\omega)}{S_x(\omega)} = \frac{R_y(j\omega) + R_y(-j\omega)}{R_x(j\omega) + R_x(-j\omega)}. \quad (82)$$

В результате подстановки $j\omega = p$ получаем

$$W(p)W(-p) = \frac{R_y(p) + R_y(-p)}{R_x(p) + R_x(-p)} \quad (83)$$

— выражение, определяющее передаточную функцию $W(p)$, где $R_y(p)$, $R_x(p)$ — изображения правых ветвей корреляционных функций $R_y(\tau)$, $R_x(\tau)$ по Лапласу.

Корреляционная функция белого шума $R_x(\tau) = \delta(\tau)$ как стационарной случайной функции является четной. Поэтому спектральная плотность белого шума

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{\pi}$$

и, следовательно, должно быть

$$\int_0^{\infty} \delta(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{2}.$$

Согласно этому изображение по Лапласу корреляционной функции белого шума $R_x(\tau) = \delta(\tau)$

$$\delta(p) = \int_0^{\infty} \delta(\tau) e^{-p\tau} d\tau = \frac{1}{2}. \quad (84)$$

В таком случае $\delta(p) + \delta(-p) = 1$ и уравнение (83) принимает вид

$$W(p)W(-p) = R_y(p) + R_y(-p). \quad (85)$$

Пример 17. Дано

$$R_x(\tau) = e^{-|\tau|}; \quad R_y(\tau) = \frac{1}{3} e^{-|\tau|} - \frac{1}{6} e^{-2|\tau|}.$$

По таблице соответствий $f(t) \rightleftharpoons f(p)$ находим

$$R_x(p) = \frac{1}{1+p}; \quad R_y(p) = \frac{1}{3(1+p)} - \frac{1}{6(2+p)}.$$

Так как

$$R_x(p) + R_x(-p) = \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1-p} = \frac{\sqrt{2}}{1+p} \frac{\sqrt{2}}{1-p};$$

$$\begin{aligned} R_y(p) + R_y(-p) &= \frac{1}{3(1+p)} - \frac{1}{6(2+p)} + \frac{1}{3(1-p)} - \frac{1}{6(2-p)} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(1+p)(2+p)} \frac{\sqrt{2}}{(1-p)(2-p)}, \end{aligned}$$

то согласно выражению (82)

$$W(p) = 1/(p+2).$$

Пример 18. Корреляционной функции примера 9 соответствует согласно таблице $f(t) \rightleftharpoons f(p)$ изображение

$$R_y(p) = 4/(p+0,5).$$

Соотношение (85) имеет вид

$$\frac{4}{0,5+p} + \frac{4}{0,5-p} = \frac{2}{0,5+p} \frac{2}{0,5-p}.$$

Отсюда получаем

$$W(p) = 2/(p+0,5),$$

как в примере 9.

Сложность определения передаточной функции $W(p)$ по $R_y(\tau)$ без перехода и с переходом от $R_y(\tau)$ и $S_y(\omega)$ оказывается в общем случае одинаковой. В этом можно убедиться на примерах 10—12.

Соотношение (85) может быть использовано для определения $R_y(\tau)$ по $W(p)$ и $R_x(\tau)$ или определения $R_x(\tau)$ по $W(p)$ и $R_y(\tau)$.

Пример 19. Дано, как и в примере 17,

$$W(p) = 1/(p+2); \quad R_x(\tau) = e^{-|\tau|}.$$

Требуется найти $R_y(\tau)$. Определив

$$R_x(p) + R_x(-p) = \frac{\sqrt{2}}{1+p} \frac{\sqrt{2}}{1-p}.$$

Согласно выражению (83) получаем

$$\begin{aligned} R_y(p) + R_y(-p) &= W(p)W(-p)[R_x(p) + R_x(-p)] = \\ &= \frac{2}{(1+p)(1-p)(2+p)(2-p)} = \\ &= \frac{A}{1+p} + \frac{B}{1-p} + \frac{C}{2+p} + \frac{D}{2-p} = f(p). \end{aligned}$$

Определение значений A, B, C и D методом неопределенных коэффициентов в данном случае затруднительно. Так как все нули знаменателя функции $f(p)$ простые и вещественные, то удобнее воспользоваться для определения коэффициентов A, B, C и D методом вычетов [19]. При этом

$$A [f(p)(1+p)]_{p=-1} = \frac{1}{3}; \quad B = [f(p)(1-p)]_{p=+1} = \frac{1}{3};$$

$$C = [f(p)(2+p)]_{p=-2} = -\frac{1}{6}; \quad D = [f(p)(2-p)]_{p=+2} = -\frac{1}{6}.$$

Таким образом,

$$R_y(p) + R_y(-p) = \frac{1}{3(1+p)} - \frac{1}{6(2+p)} + \frac{1}{3(1-p)} - \frac{1}{6(2-p)},$$

откуда

$$R_y(p) = \frac{1}{3(1+p)} - \frac{1}{6(2+p)}.$$

Согласно таблице соответствий $f(p) \rightleftharpoons f(t)$ находим

$$R_y(\tau) = \frac{1}{3} e^{-|\tau|} - \frac{1}{6} e^{-2|\tau|}.$$

Пример 20. Дано, как и в примерах 17 и 19,

$$W(p) = \frac{1}{p+2}; \quad R_y(\tau) = \frac{1}{3} e^{-|\tau|} - \frac{1}{6} e^{-2|\tau|}.$$

Требуется найти $R_x(\tau)$. Определив, как в примере 17,

$$R_y(p) + R_y(-p) = \frac{\sqrt{2}}{(1+p)(2+p)} \frac{\sqrt{2}}{(1-p)(2-p)},$$

согласно выражению (83) получаем

$$R_x(p) + R_x(-p) = \frac{R_y(p) + R_y(-p)}{W(p)W(-p)} =$$

$$= \frac{2}{(1+p)(1-p)} = \frac{A}{1+p} + \frac{B}{1-p}.$$

Определив $A = B = 1$, имеем

$$\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1-p} = R_x(p) + R_x(-p)$$

и находим

$$R_x(p) = \frac{1}{1+p}; \quad R_x(\tau) = e^{-|\tau|}.$$

Важным вопросом при цифровом моделировании случайных процессов согласно рекуррентным соотношениям (33)–(35) является определение значения $k = k_0$, за пределами которого при $k > k_0$ решетчатую случайную функцию $Y_k = Y[k]$ можно считать стационарной, а режим воспроизведения Y_k — установившимся.

Любая решетчатая функция $\tilde{y}[k]$, получаемая согласно рекуррентному выражению (33), представляет собой сумму двух составляющих [4] — переходной (свободной, общей) и установившейся (вынужденной, частной). Если цифровая модель, реализующая $\tilde{y}[k]$, устойчива, то переходная составляющая с увеличением k стремится к нулю. Форму переходной составляющей определяют корни характеристического уравнения цифровой модели

$$z^n + \eta_1 z^{n-1} + \eta_2 z^{n-2} + \dots + \eta_n = 0. \quad (86)$$

Если все корни различны: z_1, z_2, \dots, z_n , то аналитическое выражение переходной составляющей имеет вид

$$\tilde{y}_n[k] = \sum_1^n \tilde{y}_{nt}[k] = \sum_1^n c_i z_i^k. \quad (87)$$

Вещественному корню $z_i = \bar{\alpha}_i$ соответствует составляющая

$$\tilde{y}_{nt}[k] = c_i (\bar{\alpha}_i)^k,$$

двум комплексным сопряженным $z_{i, i+1} = \bar{\alpha}_i \pm j\bar{\beta}_i$ — две составляющие:

$$\tilde{y}_{nt}[k] = c_i \rho_i^k \cos \varphi_i k; \quad \tilde{y}_{n, i+1}[k] = c_{i+1} \rho_i^k \sin \varphi_i k,$$

где $\rho_i = \sqrt{\bar{\alpha}_i^2 + \bar{\beta}_i^2}$; $\varphi_i = \arctg(\bar{\beta}_i/\bar{\alpha}_i)$.

Переходный процесс можно считать практически затухшим при условии

$$\tilde{y}_n[k_0] = 0,01 \tilde{y}_n[0]$$

или

$$\sum_1^n \tilde{y}_{nt}[k_0] = \sum_1^n c_i z_i^{k_0} = \sum_1^n 0,01 \tilde{y}_{nt}[0] = \sum_1^n 0,01 c_i.$$

Если модуль $|z_i|_m$ -го корня является наибольшим из модулей всех корней, то значение k_0 можно определить из выражения $\tilde{y}_{nt}[k_0] = c_i |z_i|_m^{k_0} = 0,01 \tilde{y}_{nt}[0] = 0,01 c_i$, т. е.

$$k_0 = \frac{\lg 0,01}{\lg |z_i|_m} = \frac{-2}{\lg |z_i|_m}. \quad (88)$$

Так как модули всех остальных корней будут меньше $|z_i|_m$, то остальные слагаемые переходной составляющей $\tilde{y}_n[k]$ будут затухать быстрее, чем $\tilde{y}_{nt}[k]$.

Пример 21. В примере 9 получено $\bar{\eta}_1 = 0,951$.

Характеристическое уравнение $z - 0,951 = 0$ имеет единственный вещественный корень с модулем $|z_i|_m \approx 0,95$. Согласно выражению (88) имеем

$$k_0 = \frac{-2}{-0,022} = 91.$$

Можно принять $k_0 = 100$.

Пример 22. В примере 10 характеристическое уравнение, соответствующее выражениям (62) и (63), имеет вид $z^2 - 1,931z + 0,932 = 0$ и корни $z_1 \approx 0,98$; $z_2 \approx 0,95$. Согласно уравнению (88) имеем

$$k_0 = \frac{-2}{-0,0087} = 230.$$

Можно принять $k_0 = 250$.

Пример 23. В примере 11 характеристическое уравнение, соответствующее выражениям (65) и (66), имеет вид $z^2 - 0,972z + 0,82 = 0$ и корни $z_{1,2} = 0,485 \pm j0,764$ с модулем $\rho = \sqrt{0,485^2 + 0,764^2} \approx 0,905$. Согласно уравнению (88) имеем

$$k_0 = \frac{-2}{-0,043} = 46.$$

Можно принять $k_0 = 50$.

Пример 24. В примере 12 характеристическое уравнение, соответствующее выражению (69), имеет вид $(z - 0,914) \times (z^2 - 1,832z + 0,852) = 0$ и корни $z_1 = 0,914$; $z_{2,3} = 0,916 \pm \pm j0,119$, причем $|z_{2,3}| = \sqrt{0,916^2 + 0,119^2} = 0,923$. Согласно уравнению (88) имеем

$$k_0 = \frac{-2}{-0,03} = 66,66.$$

Можно принять $k_0 = 70$.

Рекуррентным выражениям (33)–(35) соответствует усеченное рекуррентное выражение (55) решетчатой корреляционной функции $R_y[k]$. В результате z -преобразования этого выражения с учетом (32) получаем операторное уравнение

$$z^n R_y(z) + \eta_1 z^{n-1} R_y(z) + \eta_2 z^{n-2} R_y(z) + \dots + \eta_n R_y(z) = 0,$$

которому соответствует характеристическое уравнение (86).

Таким образом, одно и то же характеристическое уравнение (86) соответствует различным разностным уравнениям в рекуррентной форме (33) и (55). Это означает, что переходные составляющие решений уравнений (33) и (55) должны быть идентичными по форме, различаясь только постоянными коэффициентами. Поэтому аналогично выражению (87) должно быть

$$R_y[k] = \sum_1^n c'_i z_i^k,$$

где z_i — корни уравнения (86).

Но решетчатая корреляционная функция $R_y[k]$ имеет огибающей непрерывную корреляционную функцию $R_y(\tau)$, т. е. $R_y[k] = R_y(\Delta\tau k)$. Поэтому

$$R_y(\Delta\tau k) = \sum_1^n c'_i z_i^k. \quad (89)$$

Это выражение позволяет получить наибольший модуль $|z_i|$ корней характеристического уравнения (86), необходимый для определения длительности переходного процесса (88) при цифровом моделировании случайной функции (34), не составляя и не решая уравнения (86).

Пример 25. В примере 9 должно быть $R_y(\tau) = 4e^{-0,51\tau}$. При $\Delta t = \Delta \tau = 0,1$ с

$$R_y(\Delta \tau k) = R_y[k] = 4e^{-0,05k}.$$

Согласно выражению (89) в данном случае $n = 1$ и $z_1 = e^{-0,05} \approx 0,95$.

По формуле (88) найдем то же значение k_0 , что и в примере 21.

Пример 26. В примере 10 при $\Delta t = \Delta \tau = 0,1$ с должно быть

$$R_y(\Delta \tau k) = R_y[k] = 4e^{-0,05k} + 2e^{-0,02k}.$$

Согласно выражению (89) в данном случае $n = 2$ и $z_1 = e^{-0,05} \approx 0,95$; $z_2 = e^{-0,02} \approx 0,98$.

Как и в примере 22, $|z_i|_m = 0,98$.

Пример 27. В примере 11 при $\Delta t = \Delta \tau = 0,2$ с должно быть

$$R_y(\Delta \tau k) = R_y[k] = 4e^{-0,1k} (\cos k + 0,1 \sin k).$$

В данном случае $|z_i|_m = e^{-0,1} \approx 0,905$, как в примере 23.

Пример 28. В примере 12 при $\Delta t = \Delta \tau = 0,1$ с должно быть

$$R_y(\Delta \tau k) = R_y[k] = 0,4e^{-0,09k} + 0,6e^{-0,08k} \cos 0,125k.$$

В данном случае $z_1 = e^{-0,09} \approx 0,91$, $z_{2,3} = e^{-0,08} \approx 0,92$ и $|z_i|_m = 0,92$, как в примере 24.

Шаг дискретизации $\Delta t = \Delta \tau$ моделируемой случайной функции и ее корреляционной функции в большинстве практических случаев определяется задачей, решение которой на ЦВМ требует цифрового моделирования случайной функции.

Совершенно очевидно, что этот шаг должен быть значительно меньше интервала корреляции моделируемой случайной функции τ_k , который определяется из условия

$$R_y(\tau_k) = \varepsilon R_y(0), \quad (90)$$

где $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Если заданная непрерывная корреляционная функция имеет простейший вид $R_y(\tau) = D \exp(-\alpha|\tau|)$, то из выражения (90) при $\varepsilon = 0,1$ следует

$$\tau_k = \lg 0,1 / (\alpha \lg e) \approx 2,3/\alpha. \quad (91)$$

Если заданная корреляционная функция представляет собой сумму нескольких слагаемых, каждое из которых содержит экспоненциальный множитель $\exp(\alpha_i|\tau|)$, то

$$\tau_k = 2,3 / |\alpha_i|_{\mu}, \quad (92)$$

где $|\alpha_i|_{\mu} = \min(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$.

Если слагаемые заданной корреляционной функции содержат сомножители вида $\cos \beta_i \tau = \cos \frac{2\pi}{T_i} \tau$, то в общем случае желательно, чтобы шаг дискретизации удовлетворял условию $\Delta \tau \leq \frac{1}{\nu} (|T_i|_{\mu} / 4)$, где $|T_i|_{\mu} = \min(T_1, \dots, T_l, \dots, T_n)$; $\nu = 3 + 5$:

$$\Delta \tau = \Delta t \leq \frac{|T_i|_{\mu}}{4\nu} = \frac{2\pi}{4\nu |\beta_i|_m} = (0,3 + 0,5) |\beta_i|_m^{-1}. \quad (93)$$

где $|\beta_i|_m = \max(\beta_1, \dots, \beta_l, \dots, \beta_m)$. При этом условии все характерные особенности $R_y(\tau)$ будут отражены в $R_y[k]$, полученной обработкой машинной реализации $y[k]$.

Пример 29. В примере 10 согласно выражению (92)

$$\tau_k = 2,3/0,5 = 4,6 \approx 5 \gg \Delta \tau.$$

Пример 30. В примере 11 $\tau_k \approx 5 \gg \Delta \tau$. Согласно выражению (93)

$$\Delta t = \Delta \tau \leq 0,314/5 \approx 0,06.$$

Заданное в примере 11 значение $\Delta t = 0,2$ с этому условию не удовлетворяет. Вопрос о допустимости цифрового моделирования случайной функции при $\Delta t = 0,2$ с должен решаться на основании анализа задачи, требующей моделирования случайной функции.

Пример 31. В примере 12 согласно выражениям (92) и (93)

$$\begin{aligned} \tau_k &= 2,3/0,31 \approx 2,53 \gg \Delta \tau = 0,1; \\ \Delta t = \Delta \tau &\leq 0,314/1,25 \approx 0,25 > 0,1. \end{aligned}$$

Окончательно методика моделирования случайной функции представляется в следующем виде.

1. Задана корреляционная функция

$$R_y(\tau) = \sum R_i(\alpha_i, \beta_i, \tau).$$

2. По составляющим $R_y(\tau)$ на основании таблицы соответствий $R(\tau) \rightleftharpoons S(\omega)$ определяются составляющие спектральной плотности

$$S_i(\alpha_i, \beta_i, \omega) \rightleftharpoons R_i(\alpha_i, \beta_i, \tau);$$

спектральная плотность

$$S_y(\omega) = \sum S_i(\alpha_i, \beta_i, \omega).$$

3. Определяется выражение

$$|W(j\omega)|^2 = \pi S_y(\omega) = \frac{b(\omega)}{a(\omega)}.$$

и полиномы $a(\omega)$, $b(\omega)$ представляются, аналогично выражению (27), произведениями двучленов $c_i + \omega^2$ и трехчленов $d_i + e_i\omega^2 + \omega^4$.

4. На основании соответствий (29) определяются, аналогично выражению (28), полиномы $A(p)$, $B(p)$ и затем передаточная функция

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \sum W_r(p).$$

5. Анализируются составляющие корреляционной функции $R_i(\alpha_i, \beta_i, \tau)$, и определяются

$$|\alpha_i|_\mu = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n);$$

$$|\beta_i|_m = \max(\beta_1, \dots, \beta_i, \dots, \beta_n).$$

Выбирается шаг дискретизации случайной функции и ее корреляционной функции: $\Delta t = \Delta \tau$.

6. По составляющим передаточной функции $W_r(p)$ на основании таблицы соответствий $f(p) \rightleftharpoons f(z)$ определяются составляющие дискретной передаточной функции

$$\tilde{W}_r(z) \rightleftharpoons W_r(p)$$

и дискретные передаточные функции

$$\hat{W}(z) = \sum \tilde{W}_r(z) = \frac{\theta(z)}{\eta(z)} = \frac{\tilde{y}(z)}{x(z)}.$$

7. На основании $\tilde{y}(z) = \hat{W}(z)x(z)$ получаем рекуррентное выражение (33).

8. Определяется наибольший модуль $|z_i|_m$ корней характеристического уравнения цифровой модели (86) и согласно выражению (88) — длительность переходного процесса этой модели k_0 .

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ИДЕНТИФИКАЦИЯ

НЕПРЕРЫВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Материалы предыдущих параграфов являются основанием метода идентификации непрерывных стационарных случайных процессов с дробно-рациональной спектральной плотностью. Идея этого метода заключается в следующем.

1. Исходным материалом является дискретизированная с шагом Δt реализация $y[x] = y(\Delta t \cdot x)$ идентифицируемого непрерывного стационарного случайного процесса с дробно-рациональной спектральной плотностью $S_y(\omega)$.

Выражение (106) является суммой m элементарных слагаемых $R_j = R_j(\alpha_j\tau, \beta_j\tau)$, приведенных в таблице соответствий $R(\tau) \rightleftharpoons S(\omega)$,

$$R_y(\tau) = \sum_1^m R_j(\alpha_j\tau, \beta_j\tau). \quad (108)$$

Пример 32. В результате обработки соответствующих экспериментальных данных получено рекуррентное выражение решетчатой корреляционной функции (96)

$$R_y[k] = 1,277R_y[k-1] - 0,404R_y[k-2],$$

причем $R_0 = 6$; $R_1 = 3,767$; $\Delta\tau = 0,1$ с. В результате z -преобразования этого выражения получаем уравнение (97)

$$z^2R_y(z) - 1,277zR_y(z) + 0,407R_y(z) = 0$$

и характеристическое уравнение (98)

$$z^2 - 1,277z + 0,407 = 0$$

с двумя вещественными корнями $z_1 = 0,6065$; $z_2 = 0,6703$. Решетчатая корреляционная функция при этом выражается аналитически суммой двух слагаемых вида (99):

$$R_y[k] = c_1 \cdot 0,606^k + c_2 \cdot 0,670^k = c_1 e^{-0,5k} + c_2 e^{-0,4k}.$$

Неопределенные постоянные рассчитываются с помощью системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} R_y[0] &= 6 = c_1 + c_2; \\ R_y[1] &= 3,767 = c_1 \cdot 0,606 + c_2 \cdot 0,670 \end{aligned} \right\}$$

и равны: $c_1 = 4$; $c_2 = 2$. Таким образом,

$$R_y[k] = 4e^{-0,5k} + 2e^{-0,4k}.$$

В результате подстановки $k = \tau/0,1$ получаем правую ветвь соответствующей непрерывной корреляционной функции (106):

$$R_y(\tau) = 4e^{-5\tau} + 2e^{-4\tau}.$$

Окончательно имеем

$$R_y(\tau) = 4e^{-5|\tau|} + 2e^{-4|\tau|}.$$

Задача идентификации стационарного случайного процесса может состоять в определении его спектральной плотности. В такой постановке она может решаться одним из следующих способов.

1. Этот способ заключается в получении $S_y(\omega)$ по аналитическому выражению корреляционной функции (108).

На основании соответствий $R_j(\tau) \rightleftharpoons S_j(\omega)$ получают соответствующую выражению (108) спектральную плотность сна-

чала в виде суммы элементарных слагаемых

$$S_y(\omega) = \sum_1^m S_f(\alpha_f, \beta_f, \omega) \quad (109)$$

и затем в виде дробно-рациональной функции

$$S_y(\omega) = \frac{b(\omega)}{\pi a(\omega)} \quad (110)$$

— см. выражения (22) и (21).

Пример 33. Если в результате обработки экспериментальных данных получено аналитическое выражение $R_y(\tau)$, такое же, как в примере 32, то на основании таблицы соответствий $R(\tau) \rightleftharpoons S(\omega)$ находим спектральную плотность в виде

$$S_y(\omega) = \frac{4}{\pi} \frac{2 \cdot 5}{\omega^2 + 25} + \frac{2}{\pi} \frac{2 \cdot 4}{\omega^2 + 16} = \frac{56\omega^2 + 1040}{\pi(\omega^4 + 41\omega^2 + 400)}.$$

Преобразование суммы (109) в рациональную дробь (110) может быть выполнено ЦВМ.

Слагаемые в выражении (109) являются простейшими дробно-рациональными функциями

$$S_f(\alpha_f, \beta_f, \omega) = S_f(\omega) = \frac{b_f(\omega)}{\pi a_f(\omega)}. \quad (111)$$

Поэтому в функции (110)

$$a(\omega) = a_1(\omega) a_2(\omega) \dots a_m(\omega), \quad (112)$$

но

$$b(\omega) \neq b_1(\omega) b_2(\omega) \dots b_m(\omega).$$

Степень $2n$ полинома $a(\omega)$ равна сумме степеней $2n_f$ полиномов $a_f(\omega)$:

$$2n = \sum_1^m 2n_f. \quad (113)$$

Степень полинома $b(\omega)$, согласно выражению (23), не превышает $2n$, а точнее, согласно соответствиям $S(\omega) \rightleftharpoons R(\tau)$, — $2n - 2$. Поэтому практически

$$S_y(\omega) = \sum_1^m S_f(\omega) = \frac{b(\omega)}{\pi a(\omega)} = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + \dots + b_{n-1}\omega^{2(n-1)}}{\pi a(\omega)}. \quad (114)$$

Введя обозначения

$$\bar{S}_y(\omega) = \pi S_y(\omega); \quad \bar{S}_f(\omega) = \pi S_f(\omega), \quad (115)$$

имеем

$$b(\omega) = a(\omega) \bar{S}_y(\omega) = b_0 + b_1\omega^2 + \dots + b_{n-1}\omega^{2(n-1)}. \quad (116)$$

В конкретном случае при заданных

$$R_y(\tau) = \sum_1^m R_j(\tau), \Delta\omega$$

ЦВМ выполняет следующие операции:

- 1) определяются $a_j(\omega)$, $b_j(\omega)$, $2n_j$;
- 2) рассчитываются степени полиномов $a(\omega)$ и $b(\omega)$: $2n = \sum_1^m 2n_j$, $2n - 2$;
- 3) определяется ряд значений $\omega_i = i\Delta\omega$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$;
- 4) рассчитываются значения $a_j(\omega_i)$;
- 5) определяются значения $b_j(\omega_i)$;
- 6) рассчитываются значения $\bar{S}_j(\omega_i) = b_j(\omega) / a_j(\omega)$;
- 7) рассчитываются $\bar{S}_y(\omega_i) = \sum_1^m S_j(\omega_i)$;
- 8) рассчитываются $a(\omega_i) = a_1(\omega_i) \dots a_m(\omega_i)$;
- 9) рассчитываются $b(\omega_i) = a(\omega_i) \bar{S}_y(\omega_i)$;
- 10) решением системы n линейных алгебраических уравнений

$$b(\omega_i) = b_0 + b_1\omega_i^2 + \dots + b_{n-1}\omega_i^{2(n-1)} \quad (117)$$

определяются коэффициенты b_0, b_1, \dots, b_{n-1} полинома $b(\omega)$;

11) определяются согласно выражению (112) коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n полинома $a(\omega)$.

В результате определяется аналитическое выражение

$$S_y(\omega) = \frac{b_0 + b_1\omega^2 + \dots + b_{n-1}\omega^{2(n-1)}}{\pi(a_0 + a_1\omega^2 + \dots + a_n\omega^{2n})}. \quad (118)$$

Пример 34. Задано, как в примерах 32 и 33,

$$R_y(\tau) = 4e^{-5|\tau|} + 2e^{-4|\tau|}, \Delta\omega = 1.$$

- 1) $a_1(\omega) = \omega^2 + 5^2 = \omega^2 + 25$; $a_2(\omega) = \omega^2 + 4^2 = \omega^2 + 16$; $b_1(\omega) = 4 \cdot 2 \cdot 5 = 40$; $b_2(\omega) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$;
- 2) $2n = 2 \cdot 2 = 4$; $2n - 2 = 4 - 2 = 2$;
- 3) $\omega_i = 0; 1$;
- 4) $a_1(0) = 25$; $a_1(1) = 1 + 25 = 26$; $a_2(0) = 16$; $a_2(1) = 1 + 16 = 17$;
- 5) $b_1(0) = b_1(1) = 40$; $b_2(0) = b_2(1) = 16$;
- 6) $\bar{S}_1(0) = 40/25 = 1,6$; $\bar{S}_1(1) = 40/26 = 1,54$; $\bar{S}_2(0) = 16/16 = 1$;
- 7) $\bar{S}_y(0) = 1,6 + 1 = 2,6$; $\bar{S}_y(1) = 1,54 + 0,94 = 2,48$;
- 8) $a(0) = 25 \cdot 16 = 400$; $a(1) = 26 \cdot 17 = 442$;
- 9) $b(0) = 400 \cdot 2,6 = 1040$; $b(1) = 442 \cdot 2,48 = 1096$;

10) Система уравнений (117)

$$\left. \begin{aligned} 1040 &= b_0; \\ 1096 &= b_0 + b_1 \end{aligned} \right\}$$

имеет решение $b_0 = 1040$; $b_1 = 56$;

11) $(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 16) = \omega^4 + 41\omega^2 + 400$; $a_0 = 400$; $a_1 = 41$; $a_2 = 1$.

2. Этот способ заключается в получении $S_y(\omega)$ по аналитическому выражению решетчатой корреляционной функции $R_y[k]$.

Непрерывному случайному процессу $Y(t)$ и непрерывной корреляционной функции $R_y(\tau)$ соответствует спектральная плотность

$$S_y(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_y(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (119)$$

Аналогично этому решетчатому случайному процессу $Y[k] = Y(\Delta tk)$ и решетчатой корреляционной функции $R_y[k] = R_y(\Delta\tau k)$ можно поставить в соответствие спектральную плотность

$$S_{yp}(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} R_y[k] e^{-j\omega\Delta\tau k}. \quad (120)$$

Если в выражении (119) положить $d\tau = \Delta\tau$; $\tau = \Delta\tau k$; $R_y(\tau) = R_y(\Delta\tau k)$ и заменить интеграл суммой, то получим

$$S_y(\omega) \approx \Delta\tau S_{yp}(\omega). \quad (121)$$

При $\Delta\tau \rightarrow 0$ это приближенное выражение переходит в точное:

$$S_y(\omega) = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \Delta\tau S_{yp}(\omega). \quad (122)$$

Так как

$$\begin{aligned} & \sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_y[k] e^{-j\omega\Delta\tau k} = \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} R_y[k] e^{-j\omega\Delta\tau k} + \sum_{k=0}^{-\infty} R_y[k] e^{-j\omega\Delta\tau k} - R_y[0] \end{aligned}$$

и при $\exp(j\omega\Delta\tau) = z$ первое слагаемое

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_y[k] z^{-k} = R_y(z),$$

а второе —

$$\sum_{k=0}^{+\infty} R_y[-k] e^{j\omega\Delta\tau k} = \sum_{k=0}^{+\infty} R_y[k] (z^{-1})^{-k} = R_y(z^{-1}),$$

то согласно выражению (119)

$$S_{yp}(\omega) = \frac{1}{\pi} \{R_y(z) + R_y(z^{-1}) - R_y[0]\}. \quad (123)$$

Здесь $R_y(z)$ есть z -преобразование $R_y[k]$, $R_y[0] = D_{yp}$.

Пример 35. Если

$$R[k] = a^k; \quad a = e^{-a\Delta\tau}; \quad R(z) = z/(z-a),$$

то согласно выражению (123)

$$S_p(\omega) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{z}{z-a} + \frac{z^{-1}}{z^{-1}-a} - 1 \right) = \frac{1-a^2}{\pi(1+a^2-a[z+z^{-1}])}.$$

Так как

$$z + z^{-1} = e^{j\omega\Delta\tau} + e^{-j\omega\Delta\tau} = 2 \cos \omega\Delta\tau,$$

то окончательно

$$S_p(\omega) = \frac{1-a^2}{\pi(1+a^2-2a \cos \omega\Delta\tau)}.$$

Для соответствий $S_p(\omega) \rightleftharpoons R[k]$ можно составить таблицу, аналогичную таблице соответствий $S(\omega) \rightleftharpoons R(\tau)$.

Если в общем случае

$$R_y[k] = \sum R_j[k], \quad (124)$$

то, определив $S_{pj}(\omega) \rightleftharpoons R_j[k]$, получают

$$S_{yp}(\omega) = \sum S_{pj}(\omega). \quad (125)$$

Спектральные плотности $S_{yp}(\omega)$ и $S(\omega)$ связаны соотношением [20, 21]

$$\Delta\tau S_{yp}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} S_y\left(\omega + \frac{2\pi}{\Delta\tau} k\right). \quad (126)$$

Это означает, что спектральная плотность $S_{yp}(\omega)$ решетчатого случайного процесса может быть получена путем сдвига спектральной плотности $S_y(\omega)$ непрерывного случайного процесса на $2\pi k/\Delta\tau$ при $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и поэтому является периодической функцией с периодом $2\pi/\Delta\tau$.

Пусть спектральная плотность $S_y(\omega)$ имеет вид функции «шапочки» [22] — см. рис. 1, а, и характеризуется частотой среза ω_c , причем $S_y(|\omega| > \omega_c) = 0$. Рассмотрим различные случаи соотношения между частотой среза ω_c и частотой дискретизации $\omega_d = 2\pi/\Delta\tau$.

1. Если

$$\omega_d = 2\pi/\Delta\tau \geq 2\omega_c; \quad (127)$$

$$\Delta\tau \leq \pi/\omega_c, \quad (128)$$

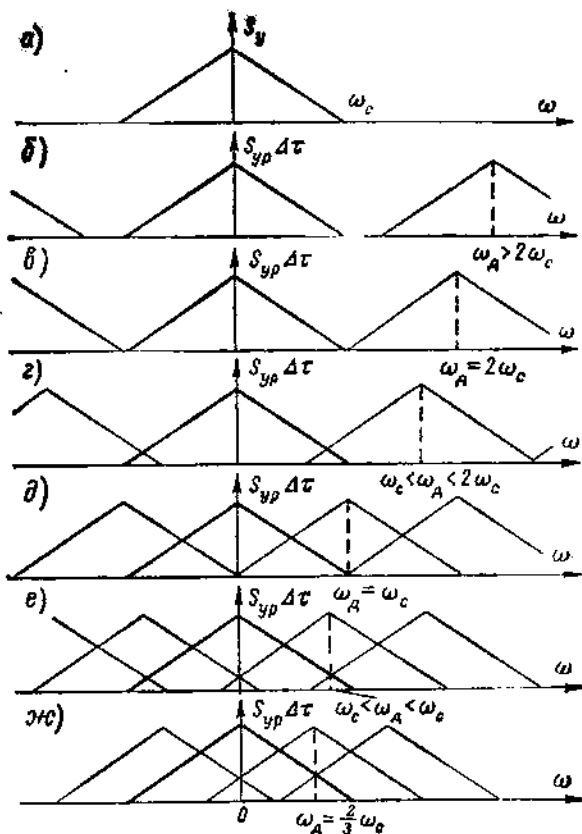


Рис. 1. График спектральной плотности в форме «шалочки»

то согласно рис. 1, а — в

$$\Delta\tau S_{yp}(\omega) = S_y(\omega); |\omega| \leq \omega_c. \quad (129)$$

2. Если

$$\omega_c < \omega_d = 2\pi/\Delta\tau < 2\omega_c; \quad (130)$$

$$\pi/\omega_c < \Delta\tau < 2\pi/\omega_c, \quad (131)$$

то согласно рис. 1, а — г

$$\Delta\tau S_{yp}(\omega) = S_y(\omega), |\omega| \leq \omega_d - \omega_c; \quad (132)$$

3. Если

$$\omega_d = 2\pi/\Delta\tau = \omega_c; \Delta\tau = 2\pi/\omega_c, \quad (133)$$

то согласно рис. 1, а и д

$$\Delta\tau S_{yp}(\omega) = S_y(\omega) + S_y(\omega_d - \omega), |\omega_c| < \omega_d. \quad (134)$$

4. Если

$$\omega_d = 2\pi/\Delta\tau < \omega_c; \Delta\tau = 2\pi/\omega_c, \quad (135)$$

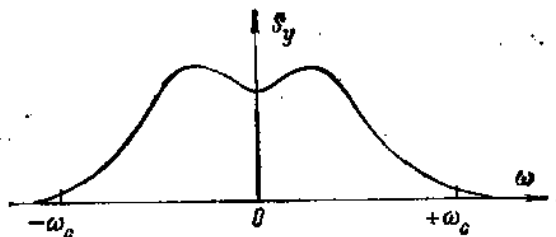


Рис. 2. График спектральной плотности в форме «широкополой шляпы»

то согласно рис. 1, а, е и ж соотношение между $S_{yp}(\omega)$ и $S_y(\omega)$ становится более сложным.

На основании соотношений (127) и (130) спектральная плотность $S_y(\omega)$ может быть получена на $S_{yp}(\omega)$ простым ее умножением на $\Delta\tau$.

Практически спектральная плотность $S_y(\omega)$ имеет вид функции «широкополой шляпы» (рис. 2). Однако всегда можно указать некоторое значение ω_c , за пределами которого $S_y(\omega \geq \omega_c) = 0$, и аппроксимировать функцию «широкополоую шляпу» функцией «шапочкой» с частотой среза ω_c .

При этом $\Delta\tau S_{yp}(\omega) > S_y(\omega)$ и погрешность $\Delta\tau S_{yp}(\omega) - S_y(\omega) > 0$.

Пример 36. Дано, как в примере 23,

$$R_y(\tau) = 4e^{-0,51\tau}; \quad S_y(\omega) = 4/[\pi(\omega^2 + 0,25)];$$

$$\Delta\tau = 0,1 \text{ с}; \quad a = \exp(-0,5\Delta\tau) = 0,951; \quad R_y[k] = 4 \cdot 0,951^k$$

При $\omega = 10$ имеем

$$S_y(\omega) = 4/[\pi(100 + 0,25)] \approx 0,01$$

и можно принять $\omega_c = 10$. Так как $\omega_d = 2\pi/\Delta\tau = 63 > 20 = 2\omega_c$, то согласно выражениям (127) и (129) $0,1S_{yp}(\omega) \approx S_y(\omega)$, $|\omega| \leq 10$.

Рассчитываем

$$S_y(0) = \frac{4}{\pi \cdot 0,25} = \frac{16}{\pi}; \quad S_y(1) = \frac{4}{\pi \cdot 1,25} = \frac{3,2}{\pi};$$

$$S_y(2) = \frac{4}{\pi \cdot 4,25} = \frac{0,9412}{\pi}.$$

Воспользовавшись результатом примера 35, имеем

$$\begin{aligned} \Delta\tau S_{yp}(\omega) &= \frac{4\Delta\tau}{\pi} \frac{1-a^2}{1+a^2-2a \cos \omega\Delta\tau} = \\ &= \frac{0,4(1-0,951^2)}{\pi(1+0,951^2-2 \cdot 0,951 \cos 0,1\omega)} = \frac{0,038}{\pi(1,905-1,902 \cos 0,1\omega)} = \\ &= \frac{0,02}{\pi(1,001 - \cos 0,1\omega)}. \end{aligned}$$

Рассчитываем

$$\Delta\tau S_{yp}(0) = 0,02/[\pi(1,001 - 1)] = 16,005/\pi;$$

$$\Delta\tau S_{yp}(1) = 0,02/[\pi(1,001 - 0,995)] = 3,203/\pi;$$

$$\Delta\tau S_{yp}(2) = 0,02/[\pi(1,001 - 0,980)] = 0,944/\pi.$$

Значения $S_y(\omega)$ и $\Delta\tau S_{yp}(\omega)$ совпадают достаточно хорошо, особенно при $\omega = 0$ и $\omega = 1$.

Возможность получения при заданном $\omega = \omega_i$ значения $S_y(\omega_i)$ в виде $\Delta\tau S_{yp}(\omega_i)$ позволяет определить аналитическое выражение спектральной плотности $S_y(\omega)$ по аналитическому выражению решетчатой корреляционной функции $R_y[k]$ через $S_{yp}(\omega)$. Однако этот способ получения $S_y(\omega)$ не проще первого.

Пример 37. Экспериментально при $\Delta t = \Delta\tau = 0,1$ с определена корреляционная функция

$$R_y[k] = 4a_1^k + 2a_2^k = R_1[k] + R_2[k],$$

где $a_1 = 0,606 = e^{-0,5}$; $a_2 = 0,670 = e^{-0,4}$.

Воспользовавшись результатом, полученным в примере 35, имеем

$$\begin{aligned} S_{yp}(\omega) &= S_{p1}(\omega) + S_{p2}(\omega) = \frac{1 - a_1^2}{\pi(1 + a_1^2 - 2a_1 \cos \omega\Delta\tau)} + \\ &+ \frac{1 - a_2^2}{\pi(1 + a_2^2 - 2a_2 \cos \omega\Delta\tau)} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4 \cdot 0,6322}{1,368 - 1,213 \cos 0,1\omega} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \cdot 0,551}{1,449 - 1,341 \cos 0,1\omega} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{2,0848}{1,128 - \cos 0,1\omega} + \frac{0,822}{1,081 - \cos 0,1\omega} \right). \end{aligned}$$

Решетчатой корреляционной функции $R_y[k]$ соответствуют непрерывная корреляционная функция

$$R_y(\tau) = 4e^{-5|\tau|} + 2e^{-4|\tau|}$$

и спектральная плотность $S_y(\omega)$ вида

$$S_y(\omega) = \frac{A_1}{\pi(\omega^2 + 25)} + \frac{A_2}{\pi(\omega^2 + 16)} = \frac{b_0 + b_1\omega^2}{\pi(\omega^2 + 25)(\omega^2 + 16)} = \frac{b(\omega)}{\pi a(\omega)}.$$

Полином $a(\omega)$ определяется так же, как и при первом способе (пример 34):

$$a(\omega) = 400 + 41\omega^2 + \omega^4.$$

Для определения коэффициентов полинома $b(\omega)$ необходимо составить систему двух уравнений вида

$$b(\omega) = \Delta\tau S_{yp}(\omega) \pi a(\omega) = b_0 + b_1\omega^2.$$

При ω , равной 0 и 1, находим $a(0) = 400$; $a(1) = 442$;
 $0,1S_{yp}(0)\pi = 2,618$; $0,1S_{yp}(1)\pi = 2,5264$.

Из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} 2,618 \cdot 400 &= 1047 = b_0; \\ 2,526 \cdot 442 &= 1116 = b_0 + b_1 \end{aligned} \right\}$$

находим $b_0 = 1047$ и $b_1 = 69$. Эти значения превосходят полученные в примере 34 точные значения. Объясняется это тем, что в данном случае условия (127) не соблюдаются. Действительно, при $\omega = 70$ имеем

$$S_y(70) = (1040 + 56 \cdot 4900) / (\pi \cdot 4926 \cdot 4916) \approx 0,004$$

и можно принять $\omega_c = 70$. Так как $\omega_d = 2\pi/\Delta t \approx 63$, то вместо (127) имеем $\omega_d < \omega_c$.

Простейшим способом получения аналитического выражения $S_y(\omega)$ является первый.

Решение системы (95) предлагается вести методом наименьших квадратов, полагая последовательно $n = 1, 2, 3, \dots$

При $n = 1$ система (95) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_0 &= D_y; \\ \bar{R}_1 &= \bar{\eta}_1 \bar{R}_0; \\ \bar{R}_2 &= \bar{\eta}_1 \bar{R}_1; \\ &\dots \\ \bar{R}_m &= \bar{\eta}_1 \bar{R}_{m-1}. \end{aligned} \right\} \quad (136)$$

На основании выражений

$$e_k = \bar{R}_k - \bar{\eta}_1 \bar{R}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, m;$$

$$\begin{aligned} \Sigma &= \sum_1^m e_k^2 = \sum_1^m (\bar{R}_k - \bar{\eta}_1 \bar{R}_{k-1})^2 = \sum_1^m \bar{R}_k^2 - 2\bar{\eta}_1 \sum \bar{R}_k \bar{R}_{k-1} + \\ &+ \bar{\eta}_1^2 \sum_1^m \bar{R}_{k-1}^2; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial \bar{\eta}_1} = 2 \sum_1^m \bar{R}_k \bar{R}_{k-1} - 2\bar{\eta}_1 \sum_1^m \bar{R}_{k-1}^2 = 0;$$

$$\sum_1^m \bar{R}_k \bar{R}_{k-1} = [\bar{R}_k \bar{R}_{k-1}]_1;$$

$$\sum_1^m \bar{R}_{k-1}^2 = [\bar{R}_{k-1} \bar{R}_{k-1}]_1$$

При $n = 3$ система (95) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{R}_0 &= D_y; \\ \bar{R}_1 &= \bar{\eta}_1 \bar{R}_0 + \bar{\eta}_1 \bar{R}_1 + \bar{\eta}_3 \bar{R}_2 + c_{31}; \\ \bar{R}_2 &= \bar{\eta}_1 \bar{R}_1 + \bar{\eta}_2 \bar{R}_0 + \bar{\eta}_3 \bar{R}_1 + c_{32}; \\ \bar{R}_3 &= \bar{\eta}_1 \bar{R}_2 + \bar{\eta}_2 \bar{R}_1 + \bar{\eta}_3 \bar{R}_0; \\ \bar{R}_4 &= \bar{\eta}_1 \bar{R}_3 + \bar{\eta}_2 \bar{R}_2 + \bar{\eta}_3 \bar{R}_1; \\ &\dots \\ \bar{R}_m &= \bar{\eta}_1 \bar{R}_{m-1} + \bar{\eta}_2 \bar{R}_{m-2} + \bar{\eta}_3 \bar{R}_{m-3}. \end{aligned} \right\} (143)$$

Чтобы определить оценочное значение коэффициентов η_1 , η_2 и η_3 , необходимо решить систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} [\bar{R}_{k-1} \bar{R}_{k-1}]_3 \bar{\eta}_1 + [\bar{R}_{k-1} \bar{R}_{k-2}]_3 \bar{\eta}_2 + [\bar{R}_{k-1} \bar{R}_{k-3}]_3 \bar{\eta}_3 &= [\bar{R}_k \bar{R}_{k-1}]_3; \\ [\bar{R}_{k-1} \bar{R}_{k-2}]_3 \bar{\eta}_1 + [\bar{R}_{k-2} \bar{R}_{k-2}]_3 \bar{\eta}_2 + [\bar{R}_{k-2} \bar{R}_{k-3}]_3 \bar{\eta}_3 &= [\bar{R}_k \bar{R}_{k-2}]_3; \\ [\bar{R}_{k-1} \bar{R}_{k-3}]_3 \bar{\eta}_1 + [\bar{R}_{k-2} \bar{R}_{k-3}]_3 \bar{\eta}_2 + [\bar{R}_{k-3} \bar{R}_{k-3}]_3 \bar{\eta}_3 &= [\bar{R}_k \bar{R}_{k-3}]_3, \end{aligned} \right\} (144)$$

полученную путем применения метода наименьших квадратов.

Аналогичным образом с помощью выражений (138) и (142) рассчитываются оценочные значения

$$\tilde{R}[k] = \bar{\eta}_1 \tilde{R}[k-1] + \bar{\eta}_2 \tilde{R}[k-2] + \bar{\eta}_3 \tilde{R}[k-3], \quad (145)$$

причем $\tilde{R}_0 = \bar{R}_0$, и разности $\tilde{R}_k - \bar{R}_k$. Определяется по формуле (139) погрешность Δ_3 .

Если $\Delta_3 \leq \Delta_{\text{дон}} > 0$, то система (143) решена.

Если $\Delta_{\text{дон}} < \Delta_3 < \Delta_2$ следует принять $n = 4$. Аналогичным образом исследуются более сложные случаи. Неравенство $\Delta_3 > \Delta_2$ может означать, что непрерывный стационарный случайный процесс, реализация которого исследуется, на самом деле нестационарен.

Важным вопросом при идентификации непрерывных стационарных случайных процессов является выбор шага дискретизации $\Delta t = \Delta \tau$. Будем исходить при этом из того, что этот шаг соответствует кусочно-линейной аппроксимации неизвестной корреляционной функции $R_y(\tau)$ и узлами этой аппроксимации являются значения соответствующей решетчатой функции $R_y[k] = R_y(\Delta \tau k)$.

Можно показать [26], что максимальная погрешность при такой аппроксимации

$$|\Delta R_y|_m = \frac{1}{8} |R_y''|_m (\Delta \tau)^2, \quad (146)$$

где $|R_y''|_m = \left| \frac{d^2 R_y}{d\tau^2} \right|_{\text{max}}$. Максимальной абсолютной погрешности $|\Delta R_y|_m$ соответствует [23] максимальная приведенная относи-

$$|\delta R_y|_m = |\Delta R_y|_m / R_y|_m, \quad (147)$$

где $|R_y|_m = |R_y(\tau)|_{\max}$. Согласно выражениям (146) и (147) имеем

$$(\Delta\tau)^2 = 8 (\delta R_y)_m (|R_y''|_m / R_y|_m)^{-1}. \quad (148)$$

Характеристикой «кажущейся частоты» непрерывного случайного процесса может служить [24] математическое ожидание \bar{N}_0 числа нулей процесса в секунду N_0 , причем для нормального процесса

$$\bar{N}_0 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{-R_y''(0)}{R_y(0)} \right)^{1/2}.$$

Если спектральная плотность процесса имеет вид дробно-рациональной функции, а корреляционная функция представляет собой сумму экспоненциально затухающих составляющих, то $-R_y''(0) = |R_y''|_m$, $R_y(0) = |R_y|_m$ и

$$(\bar{N}_0)^2 = \frac{1}{\pi^2} \frac{|R_y''|_m}{|R_y|_m}. \quad (149)$$

Согласно выражениям (146) и (147) имеем

$$\Delta\tau = \frac{2}{\pi \bar{N}_0} \sqrt{2 |\delta R_y|_m}.$$

Если принять $|\delta R_y|_m = 0,05$ и положить $\bar{N}_0 \approx N_0$, где N_0 — среднее число нулей в секунду, полученное в результате анализа непрерывной реализации $y(t)$, то

$$\Delta\tau = \Delta t \leq 0,2 / \bar{N}_0. \quad (150)$$

Вопрос о том, при каком $k = k_m$ следует приостановить определение значений $R_y[k]$ по реализации $y[k]$, связан с погрешностью этих значений $\Delta R_y[k]$.

Средняя квадратическая погрешность $\sigma(\Delta D_y)$ экспериментального значения дисперсии $D_y = R_y[0]$, как известно [9],

$$\sigma(\Delta D_y) \approx \sqrt{2/N D}.$$

При этом с доверительной вероятностью не менее 0,9 можно принять максимальную погрешность

$$|\Delta D_y|_m = 3\sigma(\Delta D_y) = 3(D_y/N)^{1/2}. \quad (151)$$

Так как максимальные погрешности всех других экспериментальных значений корреляционной функции $R_y[k]$ не превышают максимальной погрешности дисперсии [25, 26], то

$$R_y[k] - |\Delta D_y|_m \leq R_y[k] \leq R_y[k] + |\Delta D_y|_m. \quad (152)$$

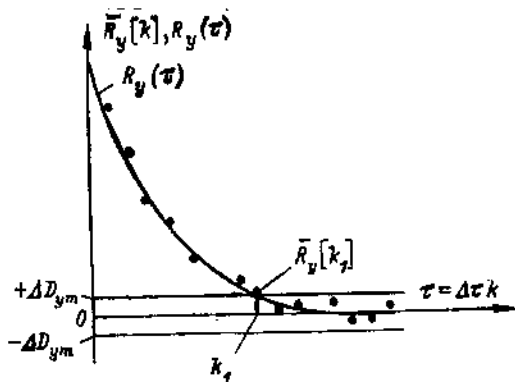


Рис. 3. Определение числа экспериментальных значений корреляционной функции, имеющей экспоненциально затухающий вид

Определение экспериментальных значений корреляционной функции теряет смысл при условии

$$|R_y[k]| \leq |\Delta D_y|_m. \quad (153)$$

При монотонной экспоненциально затухающей $R_y(\tau)$ — рис. 3, имеется одно критическое значение $k = k_1 = k_m$.

При колебательной экспоненциально затухающей $R_y(\tau)$ — рис. 4, критическими значениями k являются $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 = k_m$, причем $k_1 \approx T/(4\Delta\tau)$; $k_3 \approx 3k_1$; $k_5 \approx 5k_1$ (T — период колебаний; $k_1 \geq 10$).

На основании этого рекомендуется следующий порядок определения k_m после определения $D_y = R_y[0]$.

1. Вычисляются значения $R_y[k]$ при $k = 1, 2, \dots, k_1, \dots, 3k_1$. Если в пределах $k_1 < k \leq 3k_1$ условие (153) выполняется, то принимают $k_m = k_1$, если нет, то фиксируют k_3 .

2. Вычисляются значения $R_y[k]$ при $k = 3k_1 + 1, 3k_1 + 2, \dots, 3k_1 + 2k_1$. Если в пределах $3k_1 < k \leq 5k_1$ условие (153) выполняется, то принимают $k_m = k_3$, если нет, то фиксируют k_5 .

3. Вычисляются значения $R_y[k]$ при $k = 5k_1 + 1, 5k_1 + 2, \dots, 5k_1 + 2k_1$. Если в пределах $5k_1 < k \leq 7k_1$ условие (153) выполняется, то принимают $k_m = k_5$, если нет, то фиксируют k_7 , и т. д.

Будем называть критическими значения корреляционной функции, наиболее близко расположенные к коридору, опре-

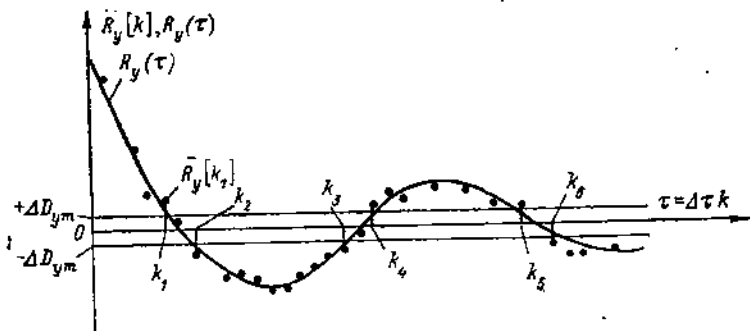


Рис. 4. Определение числа экспериментальных значений корреляционной функции, имеющей колебательный характер

деляемому неравенством (153), и обозначать последовательностью символов k_i ($i = 1, 2, \dots$).

Окончательно методика идентификации непрерывного стационарного случайного процесса представляется в следующем виде:

- 1) задается центрированная реализация $y(t)$;
- 2) в соответствии с выражением (150) определяется шаг дискретизации $\Delta t = \Delta \tau$;
- 3) реализация $y(t)$ дискретизируется с шагом Δt ; определяется число отсчетов $N = T/\Delta t$ соответствующей дискретизированной реализации $y[k] = y(\Delta tk)$;
- 4) по дискретизированной реализации определяется оценка дисперсии D_y

$$\bar{D}_y = \sum_{k_0}^{N-k_0} y^2[k]/(N - k_0)$$

и ее максимальная погрешность $|\Delta D_y|_m = 3\sigma(\Delta D_y)$, причем $|\Delta R_y|_m = |\Delta D_y|_m \leq |\Delta R_y|_{\text{дон}}$;

5) определяются экспериментальные значения $\bar{R}_k = \bar{R}_y[k] = \bar{R}_y(\Delta \tau k)$ и их число m ;

6) на основании экспериментальных значений $\bar{R}_0, \bar{R}_1, \dots, \bar{R}_m$ составляется система линейных алгебраических уравнений (95); эта система решается относительно коэффициентов η_1 при различных значениях $n = 1, 2, \dots$, начиная с $n = 1$;

7) рассчитывается оценочное значение $\tilde{\eta}_1$ и оценочные значения функции $\tilde{R}_y[k] = \tilde{\eta}_1 \tilde{R}_y[k-1]$, причем $\tilde{R}[0] = \bar{R}_0$, и разности $\tilde{R}_y[k] - \bar{R}_y[k]$;

8) проводится анализ разностей; если условие $\Delta_1 = |\tilde{R}_y[k] - \bar{R}_y[k]|_m \leq \Delta D_{ym}$ не выполняется, то переходят к п. 9, если условие выполняется, то — к п. 14;

9) изменяется n на единицу, т. е. $n := n + 1$;

10) принимается $n = 2$, определяются оценочные значения коэффициентов $\tilde{\eta}_1$ и $\tilde{\eta}_2$ методом наименьших квадратов;

11) рассчитываются оценочные значения функции $\tilde{R}_y[k] = \tilde{\eta}_1 \tilde{R}_y[k-1] + \tilde{\eta}_2 \tilde{R}_y[k-2]$, причем $\tilde{R}_y[0] = \bar{R}_0$, $\tilde{R}_y[1] = \bar{R}_1$, и разности $\tilde{R}_y[k] - \bar{R}_y[k]$;

12) проводится анализ разностей и определяется значение $\Delta_2 = |\tilde{R}_y[k] - \bar{R}_y[k]| \leq \Delta D_{ym}$; если это условие выполняется, то переходят к п. 14, если не выполняется, то — к п. 13;

13) анализируются разности Δ_1, Δ_2 ; если $\Delta_2 > \Delta_1$, то считается, что процесс, реализация которого подвергается обработке, нестационарен, если $\Delta_2 < \Delta_1$, то переходят к п. 9; все последующие пункты выполняются в той же последовательности при $n = 3, 4, \dots$, причем при $n > 2$ в п. 13 анализируются разности Δ_{n-1}, Δ_n ; если $\Delta_n < \Delta_{n-1}$, то переходят к п. 9, если $\Delta_n > \Delta_{n-1}$, то принимаются соответствующие результаты для $n = 1$;

14) по результатам решения системы уравнений (96) составляется рекуррентное выражение в виде $\bar{R}_y[k] = \bar{\eta}_1 \times \bar{R}_y[k-1] + \bar{\eta}_2 \bar{R}_y[k-2] + \dots + \bar{\eta}_n \bar{R}_y[k-n]$; оно подвергается z-преобразованию;

15) решается соответствующее характеристическое уравнение (98);

16) по результатам п. 15 составляется аналитическое выражение оценки решетчатой корреляционной функции вида (104); каждому вещественному корню соответствуют слагаемые вида (99) и (100), каждой паре комплексно-сопряженных корней — слагаемые вида (102) и (103):

$$R_y[k] = \sum (\alpha_i k, \beta_i k, c_1, c_2, \dots, c_n);$$

17) постоянные c_i находятся путем решения системы уравнений (105);

18) с учетом подстановки $k \equiv \tau/\Delta\tau$ получают аналитическое выражение оценки непрерывной корреляционной функции в виде суммы экспоненциальных составляющих: $\bar{R}_y(\tau) = \sum R_i(\alpha_i, \beta_i, \tau)$;

19) используя таблицы соответствия $R(\tau) \equiv S(\omega)$, переходят к аналитическому выражению непрерывной спектральной плотности в виде суммы элементарных табличных составляющих: $\bar{S}(\omega) = \sum \bar{S}_i(\alpha_i, \beta_i, \omega)$, где $\bar{S}_i(\alpha_i, \beta_i, \omega) \equiv \bar{R}_i(\alpha_i, \beta_i, \tau)$, а затем переходят к спектральной плотности в виде дробно-рационального выражения

$$S_y(\omega) = \frac{b(\omega)}{pa(\omega)}.$$

Пример 38. Получены экспериментальные значения корреляционной функции непрерывного стационарного случайного процесса, описывающего поведение силового электропривода промышленной установки в условиях переменной нагрузки. Максимальная погрешность дисперсии $|\Delta D_y|_m = 0,354$ при условии, что длина реализации процесса $N = 1000$.

Требуется определить аналитическое выражение корреляционной функции и соответствующей спектральной плотности процесса $Y(t)$.

На основании этих экспериментальных значений определяется оценочное значение коэффициента $\bar{\eta}_1$

$$\bar{\eta}_1 = \frac{[\bar{R}_k \bar{R}_{k-1}]_1}{[\bar{R}_{k-1} \bar{R}_{k-1}]_1} = \frac{59,709}{63,441} = 0,941;$$

рассчитываются оценочные значения корреляционной функции и разности $\bar{R}_y[k] - \bar{R}_y[k]$.

Так как $\Delta_1 = |\bar{R}_y[k] - \bar{R}_y[k]|_m = 0,222$, что меньше, чем $|\Delta D_y|_m$, то принимается $n = 1$. Таким образом, рекуррентное

выражение для решетчатой корреляционной функции имеет вид

$$\bar{R}_y[k] = 0,941 \tilde{R}_y[k-1].$$

В результате z -преобразования этого выражения получается уравнение

$$z \tilde{R}_y(z) - 0,941 \tilde{R}_y(z) = 0,$$

где $z = 0,941$ — корень этого уравнения. Согласно этому решетчатая корреляционная функция выражается аналитически:

$$\tilde{R}_y[k] = cz^k = 2,681 \cdot 0,941^k = 2,681 e^{-0,06k}.$$

После подстановки $k = \tau/0,1$ получается правая ветвь корреляционной функции

$$\tilde{R}_y(\tau) = 2,681 e^{-0,61\tau}.$$

Аналитическое выражение соответствующей спектральной плотности определяется путем использования таблицы соответствий $R(\tau) \doteq S(\omega)$

$$S(\omega) = \frac{D}{\pi} \frac{2\alpha}{(\alpha^2 + \omega^2)} = \frac{3,22}{\pi(\omega^2 + 0,36)}.$$

В табл. 1 приведены экспериментальные значения корреляционной функции и результаты расчета.

Таблица 1

| \bar{R}_k | \tilde{R}_k | $ \tilde{R}_k - \bar{R}_k $ | \bar{R}_k | \tilde{R}_k | $ \tilde{R}_k - \bar{R}_k $ |
|-------------|---------------|-----------------------------|-------------|---------------|-----------------------------|
| 2,681 | 2,522 | 0,018 | 0,830 | 0,718 | 0,112 |
| 2,504 | 2,373 | 0,049 | 0,809 | 0,676 | 0,133 |
| 2,324 | 2,233 | 0,035 | 0,805 | 0,636 | 0,169 |
| 2,198 | 2,101 | 0,033 | 0,804 | 0,598 | 0,206 |
| 2,068 | 1,977 | 0,057 | 0,785 | 0,563 | 0,222 |
| 1,787 | 1,861 | 0,074 | 0,732 | 0,530 | 0,202 |
| 1,662 | 1,751 | 0,089 | 0,686 | 0,499 | 0,187 |
| 1,557 | 1,648 | 0,091 | 0,652 | 0,469 | 0,183 |
| 1,476 | 1,550 | 0,074 | 0,619 | 0,442 | 0,177 |
| 1,381 | 1,459 | 0,078 | 0,589 | 0,415 | 0,174 |
| 1,295 | 1,402 | 0,107 | 0,559 | 0,391 | 0,168 |
| 1,226 | 1,319 | 0,093 | 0,531 | 0,368 | 0,163 |
| 1,148 | 1,242 | 0,094 | 0,506 | 0,346 | 0,160 |
| 1,095 | 1,168 | 0,073 | 0,480 | 0,326 | 0,154 |
| 1,035 | 1,099 | 0,064 | 0,456 | 0,307 | 0,149 |
| 0,986 | 1,034 | 0,048 | 0,434 | 0,288 | 0,146 |
| 0,957 | 0,973 | 0,016 | 0,412 | 0,271 | 0,141 |
| 0,923 | 0,916 | 0,007 | 0,391 | 0,255 | 0,136 |
| 0,901 | 0,862 | 0,039 | 0,372 | 0,240 | 0,132 |
| 0,894 | 0,811 | 0,083 | 0,353 | 0,226 | 0,127 |
| 0,868 | 0,763 | 0,105 | | | |

СООТВЕТСТВИЯ $f(p) \rightleftharpoons f(t) \rightleftharpoons f[k] \rightleftharpoons f(z)$ [26]

$$1) \frac{1}{p} \rightleftharpoons 1(t) \rightleftharpoons 1 \rightleftharpoons 1[k] \rightleftharpoons 1 \rightleftharpoons \frac{z}{z-1}$$

$$2) \frac{1}{p+\alpha} \rightleftharpoons e^{-\alpha t} \rightleftharpoons a^k \rightleftharpoons \frac{z}{z-a} \quad (\text{здесь и далее } a = e^{-\alpha \Delta t})$$

$$3) \frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2} \rightleftharpoons e^{-\alpha t} \cos(\beta t) \rightleftharpoons a^k \cos(bk) \rightleftharpoons \frac{z(z-a \cos b)}{z^2-z \cdot 2a \cos b+a^2}$$

(здесь и далее $b = \beta \Delta t$)

$$4) \frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2} \rightleftharpoons e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \rightleftharpoons a^k \sin(bk) \rightleftharpoons \frac{za \sin b}{z^2-z \cdot 2a \cos b+a^2}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

СООТВЕТСТВИЯ $R(\tau) \rightleftharpoons S(\omega)$ [26]

$$1) e^{-\alpha|\tau|} \rightleftharpoons \frac{2\alpha}{\pi(\omega^2+\alpha^2)}$$

$$2) e^{-\alpha|\tau|} |\tau| \rightleftharpoons \frac{2(\alpha^2-\omega^2)}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^2}$$

$$3) e^{-\alpha|\tau|} \tau^2 \rightleftharpoons \frac{4\alpha(\alpha^2-3\omega^2)}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^3}$$

$$4) e^{-\alpha|\tau|} |\tau^3| \rightleftharpoons \frac{12(\omega^4+\alpha^4-6\alpha^2\omega^2)}{\pi(\omega^2+\alpha^2)^4}$$

$$5) e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau) \rightleftharpoons \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha(\omega^2+\alpha^2+\beta^2)}{[\omega^2-(\alpha^2+\beta^2)]^2+4\alpha^2\omega^2}$$

$$6) e^{-\alpha|\tau|} \sin(\beta|\tau|) \rightleftharpoons \frac{1}{\pi} \frac{2\beta(\alpha^2+\beta^2-\omega^2)}{[\omega^2-(\alpha^2+\beta^2)]^2+4\alpha^2\omega^2}$$

$$7) cR(\tau) \rightleftharpoons cS(\omega)$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 3 |
| ГЛАВА ПЕРВАЯ. ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕАКЦИИ НЕПРЕРЫВНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ | 4 |
| ГЛАВА ВТОРАЯ. ЦИФРОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ | 14 |
| ГЛАВА ТРЕТЬЯ. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ | 45 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 1. СООТВЕТСТВИЯ $f(p) \rightleftharpoons f(t) \rightleftharpoons f[k] \rightleftharpoons f(z)$ | 64 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ 2. СООТВЕТСТВИЯ $R(\tau) \rightleftharpoons S(\omega)$ | - |
| СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ | |

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Теория автоматического управления/Под ред. А. А. Воронова.— Ч. 1.— М.: Высшая школа, 1977.—303 с.
2. Цыпкин Я. З. Теория импульсных систем.— М.: Физматгиз, 1958.—724 с.
3. Суевалов Л. Ф. Справочник по расчетам судовых автоматических систем.— Л.: Судостроение, 1977.—376 с.
4. Лебедев А. Н. Решетчатые функции в автоматическом управлении и цифровом моделировании.— Л.: ЛЭТИ, 1983.—124 с. Деп. в ВИНТИ 04.05.83, № 2383.
5. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем.— М.: Наука, 1977.—559 с.
6. Быков В. В. Цифровое моделирование в статистической радиотехнике.— М.: Советское радио, 1971.—326 с.
7. Борисов Ю. П. Математическое моделирование радиосистем.— М.: Советское радио, 1976.—296 с.
8. Пугачев В. С. Теория случайных функций.— М.: Физматгиз, 1960.—883 с.
9. Вентцель Е. С., Овчаров Л. А. Прикладные задачи теории вероятностей.— М.: Радио и связь, 1983.—416 с.
10. Лебедев А. Н., Стеклова Г. А. Идентификация непрерывных САУ с помощью спектральных плотностей входного и выходного сигналов.— Л.: ЛЭТИ, 1982.—93 с. Деп. в ВИНТИ 22.12.82, № 6338.
11. Гайдукевич В. И., Титов В. С. Случайные нагрузки силовых электроприборов.— М.: Энергоатомиздат, 1983.—160 с.
12. Жежеленко И. В., Степанов В. П., Быховская О. В. Вероятностное моделирование электрических нагрузок специальных промышленных установок//Известия вузов. Электротехника.— 1983.— № 12.— С. 11—14.
13. Моделирование сельскохозяйственных агрегатов и их систем управления/А. Б. Лурье, И. С. Нагорный, В. Г. Озеров и др.; Под ред. А. Б. Лурье.— Л.: Колос, 1979.—312 с.
14. Соколов Н. Н. Аналитический метод синтеза линеаризованных САР.— М.: Машиностроение, 1966.—328 с.
15. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике.— М.: ГИТТЛ, 1956.—608 с.
16. Лебедев А. Н. Основы теории моделирования.— Пенза: Пензенский политехнический ин-т, 1977.—80 с.
17. Лебедев А. Н. Теория моделирования и ее методы//Электронное моделирование.— 1980.— № 3.— С. 3—11.
18. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— Т. 2.— М.: Наука, 1966.—800 с.
19. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений.— Т. 2.— М.: Физматгиз, 1959.—620 с.
20. Склиаревич А. Н. Операторные методы в статистической динамике автоматических систем.— М.: Наука, 1965.—459 с.
21. Лебедев А. Н. Применение аналоговых вычислительных устройств в судовых системах автоматического управления.— Л.: Судостроение, 1970.—312 с.
22. Кузин Л. Г. Расчет и проектирование дискретных систем управления.— М.: Машгиз, 1962.—683 с.
23. Математические основы теории автоматического регулирования/Под ред. Б. К. ЧеMODанова.— М.: Высшая школа, 1977.—455 с.
24. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе.— М.: Мир, 1974.—126 с.
25. Штокало И. З. Операционное исчисление.— Киев: Наукова думка, 1972.—303 с.
26. Лебедев А. Н. Счетно-решающие устройства.— М.: Машиностроение, 1966.—424 с.
27. Бендат Дж. Основы теории случайных шумов и ее применения.— М.: Наука, 1965.—464 с.
28. Кириллов В. В., Моисеев В. С. Аналоговое моделирование динамических систем.— Л.: Машиностроение, 1977.—287 с.
29. Лебедев А. Н., Недосекин Д. Д., Стеклова Г. А. Цифровое моделирование и идентификация стационарных случайных процессов.— Л.: ЛЭТИ, 1983.—118 с. Деп. в ВИНТИ 24.11.83, № 6248.