

APPLIED
TIME
SERIES
ANALYSIS

VOLUME 1
BASIC TECHNIQUES

Robert K. Otnes

Electromagnetic Systems Laboratories, Sunnyvale, California

Loren Enochson

GenRad Inc.

Acoustics, Vibration and Analysis Division

A Wiley-Interscience Publication

John Wiley and Sons

New York · Chichester · Brisbane · Toronto
1978

Р. ОТНЕС
Л. ЭНОКСОН

ПРИКЛАДНОЙ
АНАЛИЗ
ВРЕМЕННЫХ
РЯДОВ

ОСНОВНЫЕ
МЕТОДЫ

Перевод с английского

В. И. ХОХЛОВА

под редакцией

И. Г. ЖУРБЕНКО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1982

к решению таких упражнений, читателю следует сначала просмотреть приложение А, с тем чтобы найти и переписать тестовую программу и программы, связанные с ней.

Изрядное количество материала, включенное в книгу для полноты изложения, можно без ущерба опустить при отборе материала для чтения лекций по этому предмету. Это относится, например, к большей части гл. 4 о расчете цифровых фильтров и большей части гл. 6, в которой обсуждаются детали быстрого преобразования Фурье. При первом знакомстве с книгой можно опустить и разделы гл. 9, посвященные многомерным процессам.

Нам хотелось бы поблагодарить профессоров Августина Х. Грея (Калифорнийский университет, Санта-Барбара), Лоуренса П. Мак-Нейми (Калифорнийский университет, Лос-Анджелес) и Руперта Стритса (Университет Калгари) за полезные замечания при чтении черновика рукописи; Стива Барбера, Лэрри Моултона и Эда Онстиды за помощь в графическом оформлении книги; Луизу Бозин и Джуди Хелблинг за большую работу по подготовке рукописи; Беатрис Шубе, нашего терпеливого редактора; наконец, студентов, помогавших нам выявлять и устранять неточности в первоначальной редакции книги.

Роберт К. Отнес
Лорен Эноксон

Пало-Альто, Калифорния
Лос-Альто, Калифорния
Февраль 1978

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Обзор основных математических и статистических понятий, необходимых для чтения книги, приводится в двух первых главах. Содержание этой главы составляют математические методы, применяемые при анализе временных рядов. Среди них наиболее важный — преобразование Фурье и его модификации. Преобразование Фурье и его быстрая реализация на цифровых устройствах в последнее время обрели особую важность и служат основным инструментом, используемым в книге.

Понятия линейных систем, переходных функций и свертки, приведенные вместе, весьма важны для понимания дальнейшего материала.

В конце главы помещены упражнения. Для решения некоторых из них потребуются написать небольшие программы. Если читатель намерен решать задачи, ему лучше всего сразу ознакомиться с приложением А, в котором содержатся подпрограммы для ЭВМ, упрощающие написание программ. Кроме того, в упражнениях даны численные значения для тестов и соответствующие результаты. Прежде чем пытаться использовать программы, рекомендуется прогнать тесты и сверить ответы.

1.2. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Квадратный корень из -1 , как принято в технической литературе, будем обозначать буквой j (в отличие от обозначения i , принятого в математике): $j = \sqrt{-1}$, а комплексное число c — записывать в виде $c = a + jb$. Здесь a — действительная, а b — мнимая части c ; соответствующие обозначения: $\operatorname{Re} c = a$, $\operatorname{Im} c = b$. Число $c^* = \operatorname{Re} c - j \operatorname{Im} c$ называется комплексно-сопряженным с c .

Сумма, произведение и частное комплексных чисел вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}(a + jb) + (g + jh) &= a + g + j(b + h), \\(a + jb)(g + jh) &= ag - bh + j(ah + bg), \\ \frac{a + jb}{g + jh} &= \frac{a + jb}{g + jh} \cdot \frac{g - jh}{g - jh} = \frac{ag + bh}{g^2 + h^2} + j \frac{bg - ah}{g^2 + h^2}\end{aligned}$$

(в последнем случае предполагается, что $g^2 + h^2 \neq 0$). Абсолютная величина, или модуль комплексного числа $c = a + jb$ обозначается $|c|$; имеем

$$|c| = \sqrt{cc^*} \text{ или } |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

ибо $cc^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2$. Ясно, что

$$\left| \frac{a + jb}{g + jh} \right| = \frac{|a + jb|}{|g + jh|},$$

если $g^2 + h^2 \neq 0$.

Соотношение Эйлера. Следующая формула, известная под названием соотношения Эйлера:

$$e^{j\theta} = \exp(j\theta) = \cos \theta + j \sin \theta,$$

будет постоянно использоваться на протяжении всей книги. Ее доказательство можно найти во многих учебниках, поэтому оно здесь не приводится. Для $\theta = \pi$ соотношение можно переписать в виде $e^{j\pi} + 1 = 0$. Эта формула, несомненно, — одно из самых красивых выражений в математике; оно устанавливает связь пяти самых распространенных величин.

Для комплексного числа $(a + jb)$ можно ввести *полярные координаты* по правилу $r = |a + jb|$, $\operatorname{tg} \theta = b/a$; при этом $a + jb = r \exp(j\theta)$.

Примером функции комплексного переменного может служить $f(z) = z^2 + z + 1$, где $z = x + jy$ (x и y — действительные переменные). Ее можно переписать в виде

$$f(x, y) = (x + jy)^2 + (x + jy) + 1 = (x^2 - y^2 + x + 1) + j(2xy + y).$$

Пусть $f(z)$ — дробно-рациональная функция от z , т. е. отношение двух полиномов от z :

$$f(z) = \frac{N(z)}{D(z)}.$$

Если полиномы $N(z)$ и $D(z)$ не имеют общих корней, то нулями $f(z)$ называются корни уравнения $N(z) = 0$. Корни уравнения $D(z) = 0$ называются *полюсами* $f(z)$. Полюсы и нули дробно-рациональной функции определяют ее с точностью до постоянного множителя. Иными словами, если z_1^n, \dots, z_k^n — нули функции $f(z)$, а z_1^d, \dots, z_d^d — ее полюсы, то найдется такое число c , что

$$f(z) = c \prod_{i=1}^N (z - z_i^n) / \prod_{k=1}^D (z - z_k^d).$$

Хорошо известная основная теорема алгебры утверждает, что любой (отличный от постоянного) многочлен в поле комплексных чисел имеет нули.

1.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Преобразование Фурье — главный инструмент, используемый в книге. Хотя большая часть необходимого материала изложена в следующих главах, читателю, совершенно незнакомому с преобразованием Фурье, рекомендуем обратиться к книгам Колмогорова и Фомина (1976), Винера (1963) или Су (1967).

По-видимому, читателю знакома та форма преобразования Фурье, которая переводит временную функцию $x(t)$ в частотную функцию $X(f)$ посредством интегрального соотношения

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt.$$

Иногда его записывают в виде

$$X(f) = F[x(t)].$$

Исходная независимая переменная t для времени, измеряемая, как правило, в секундах, изменяется в интервале $(-\infty, \infty)$. Единицами измерения новой независимой переменной служат герцы, обозначаемые Гц. Интервалом ее изменения также будет $(-\infty, \infty)$. Иногда вместо f используется переменная ω ; соотношение между ними определяется равенством $\omega = 2\pi f$. Величина ω измеряется в *радианах* за единицу времени.

Размерности ω и f одинаковы и равны $1/t$. Как будет видно из дальнейшего, в некотором отношении функция $X(f)$ имеет свойства, похожие на «обращения» соответствующих свойств $x(t)$, и обратно

Для произвольной функции $x(t)$ не всегда существует функция $X(f)$. Можно привести целые классы функций, не имеющих преобразования Фурье. На практике это не столь уж важная проблема. Все функции, которые встретятся в этой книге, такое преобразование будут иметь.

Преобразование Фурье обратимо. Данное выше определение может быть обращено:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df.$$

Это соотношение иногда записывается в виде

$$x(t) = F^{-1}[X(f)].$$

Результат этого преобразования было бы лучше обозначать $\hat{x}(t)$, поскольку встречаются «патологические» случаи, в которых исходная функция $x(t)$ и результат $\hat{x}(t)$ обращения преобразо-

вания Фурье функции $x(t)$ незначительно отличаются. Пользуясь математической терминологией, можно сказать, что $x(t)$ и $\hat{x}(t)$ равны почти всюду. «Почти всюду» означает, что существует множество точек, в которых они не совпадают, но не найдется ни одного интервала, на котором они не совпадали бы¹⁾. Эта проблема для функций тех типов, которые будут рассматриваться ниже, большого значения не имеет.

Если вместо переменной f используется переменная ω , то приведенное выше уравнение примет вид

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(j\omega t) d\omega.$$

Дельта-функции. С преобразованием Фурье тесно связано понятие дельта-функции. Дельта-функцию $\delta(t)$ можно попытаться представить себе как функцию, график которой имеет бесконечную высоту, нулевую ширину и площадь, равную единице. Такое описание нельзя считать строгим в математическом смысле. С точки зрения использования дельта-функций полезными будут следующие два замечания: 1) они предназначаются для использования в интегралах и 2) должны аппроксимироваться последовательностью функций, предел которой обладает соответствующими свойствами.

Первое утверждение приводит к следующему математически более строгому определению дельта-функции:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt.$$

Отметим, что левая часть этого равенства постоянна. Поэтому применение дельта-функции и интегрирование в правой части могут представляться в виде процесса, дающего значение $x(t)$ при определенном значении t_0 .

В качестве последовательности, о которой шла речь во втором утверждении, можно взять последовательность ($i = 1, 2, \dots$)

$$d_i(t) = \begin{cases} i, & \text{если } -\frac{1}{2i} \leq t < \frac{1}{2i}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

График этой функции имеет высоту i , ширину $1/i$ и ограничивает площадь, равную 1.

¹⁾ Это неточное определение выражения «почти всюду». Тем, кого интересует этот вопрос, рекомендуются книги Колмогорова и Фомина (1976) и Дина и Маккина (1972).

Определим последовательность $x_i(t_0)$ с помощью интеграла

$$x_i(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) d_i(t - t_0) dt.$$

Очевидно, что

$$x_i(t_0) = i \int_{t_0 - (2i)^{-1}}^{t_0 + (2i)^{-1}} x(t) dt.$$

Для достаточно хорошей функции $x(t)$ и при достаточно большом i эту функцию можно аппроксимировать на малом интервале $(t_0 - (2i)^{-1}, t_0 + (2i)^{-1})$ ее значением в центре интервала. В этом случае предыдущее соотношение можно записать в виде

$$x_i(t_0) \cong ix(t_0) \int_{t_0 - (2i)^{-1}}^{t_0 + (2i)^{-1}} dx = ix(t_0) t \Big|_{t_0 - (2i)^{-1}}^{t_0 + (2i)^{-1}} = x(t_0).$$

Если приведенные выше соображения формализовать, то получится доказательство того факта, что последовательность $x_i(t_0)$ сходится к пределу $x(t_0)$.

Рассуждения такого типа применяются всякий раз, когда необходима формализация. Заметим, что функция $d_i(t)$, приведенная выше, определяется не единственным способом. Есть немало последовательностей, которые отвечают цели так же хорошо. Рассмотрим, например, последовательность $e_i(t)$, определенную следующим образом:

$$e_i(t) = \begin{cases} -|t|^2 + i, & |t| \leq i^{-1}, \\ 0, & |t| > i^{-1}. \end{cases}$$

Графики этих функций представляют собой равнобедренные треугольники с высотой i и основанием $2/i$.

В дальнейшем такие последовательности и предельные переходы рассматриваться не будут. Вместо них всегда будет использоваться определение через интеграл.

Продemonстрируем использование дельта-функции в области частот. Предположим, что требуется получить обратное преобразование функции $\delta(f - f_0)$. Его можно записать и вычислить следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f - f_0) \exp(j2\pi ft) df = \exp(j2\pi f_0 t).$$

Таким образом, дельта-функция выделяет значение показательной функции при определенном значении f_0 . Полученное обратное преобразование представляет собой комплексную функцию времени. Если применить соотношение Эйлера, то результат

можно переписать в виде

$$\exp(j2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t).$$

Непосредственно из этого равенства можно определить преобразование Фурье $\cos(2\pi f_0 t)$ и $\sin(2\pi f_0 t)$. Для этого сначала находят преобразование Фурье функции $\delta(f + f_0)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f + f_0) \exp(j2\pi f t) df &= \exp(-j2\pi f_0 t) = \\ &= \cos(2\pi f_0 t) - j \sin(2\pi f_0 t). \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим обратное преобразование Фурье суммы двух дельта-функций:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2} \exp(j2\pi f t) df &= \\ = \frac{1}{2} (\cos(2\pi f_0 t) + j \sin(2\pi f_0 t)) + \frac{1}{2} (\cos(2\pi f_0 t) - j \sin(2\pi f_0 t)) &= \\ = \cos(2\pi f_0 t). \end{aligned}$$

Значит, преобразование Фурье $\cos(2\pi f_0 t)$ есть сумма двух дельта-функций $\delta(f - f_0)$ и $\delta(f + f_0)$, каждая из которых берется с

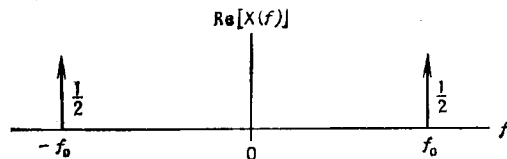


Рис. 1.1. Преобразование Фурье косинуса.

множителем 1/2. Заметим, что функции — действительные, здесь j не фигурирует.

На рис. 1.1 изображено такое преобразование Фурье. Дельта-функции обычно обозначают стрелками, поскольку на графике бесконечную высоту изобразить невозможно. При этом их множители помещают обычно рядом со стрелками по одну сторону от них.

Этот график показывает, что косинус во временной области переходит в сумму двух дельта-функций в области частот, причем дельта-функции расположены во взятых с минусом и плюсом частотах, соответствующих частоте косинуса. Таким образом, вся информация о $\cos(2\pi f_0 t)$ после преобразования в область частот сконцентрирована в частотах $\pm f_0$ Гц.

Подобная процедура, примененная к $\sin(2\pi f_0 t)$, дает

$$\frac{\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)}{2j}.$$

Сравнение особенностей преобразований $\cos(2\pi f_0 t)$ и $\sin(2\pi f_0 t)$ предоставим читателю. Здесь отметим следующее: 1) преобразование $\cos(2\pi f_0 t)$ дает чисто вещественный результат, в то время как $\sin(2\pi f_0 t)$ — чисто мнимый; 2) оба преобразования имеют вид двух дельта-функций, расположенных в частотах f_0 Гц и $-f_0$ Гц; 3) преобразование косинуса — четная, а преобразование синуса — нечетная функции (определение см. ниже).

Действуя примерно в том же духе, рассмотрим обратное преобразование $\delta(f)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f) \exp(j2\pi f t) dt = \exp(0) = 1.$$

Отсюда видно, что преобразование Фурье константы есть дельта-функция в 0 Гц. Тот же результат можно получить, если в преобразовании Фурье $\cos(2\pi f_0 t)$ положить значение f_0 равным нулю.

Симметрические и антисимметрические функции. Функцию $x(t)$ называют *симметрической* (или *четной*), если

$$x(t) = x(-t).$$

Подобно этому, функцию $x(t)$ называют *антисимметрической* (или *нечетной*), если

$$x(t) = -x(-t).$$

Всякую действительную функцию можно представить в виде суммы двух функций, одна из которых симметрическая, а другая — антисимметрическая. Если, например, $x_s(t)$ и $x_a(t)$ — симметрическая и антисимметрическая составляющие функции $x(t)$, то определить их можно из соотношений

$$x(t) = x_s(t) + x_a(t), \quad x(-t) = x_s(t) - x_a(t).$$

Решая эти уравнения, получим

$$x_s(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad x_a(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

Например, если $x(t)$ — полином третьей степени от t , т.е. $x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, то $x(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 - a_3 t^3$, поэтому

$$x_s(t) = a_0 + a_2 t^2, \quad x_a(t) = a_1 t + a_3 t^3.$$

Если функция $x(t)$ записана в виде $x_s(t) + x_a(t)$ и показательная функция в преобразовании Фурье — в виде $(\cos(2\pi f t) -$

— $j \sin(2\pi ft)$), то определение преобразования можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x_s(t) + x_a(t)] [\cos(2\pi ft) - j \sin(2\pi ft)] df = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \cos(2\pi ft) dt + \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \cos(2\pi ft) dt \\ &\quad - j \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \sin(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sin(2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

Необходимо отметить три дополнительных факта: 1) интеграл от нечетной функции по отрезку $[-A, A]$, где A — любое положительное число, равен 0; 2) произведение двух четных или двух нечетных функций есть четная функция; 3) произведение четной и нечетной функций есть нечетная функция.

Из предыдущего можно видеть, что произведения $x_a(t)\cos(2\pi ft)$ и $x_s(t)\sin(2\pi ft)$ — нечетные функции, и значит, интегралы от них равны 0. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} x_s(t) \cos(2\pi ft) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) \sin(2\pi ft) dt. \end{aligned}$$

Наконец, если $x(t)$ — четная функция, и следовательно, $x_a(t) = 0$ для всех t , то последний результат сведется к равенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt.$$

Причина, по которой мы на этом остановились, состоит в том, что преобразования четных функций всегда действительны и, кроме того, могут быть записаны как косинус-преобразования. Оба этих обстоятельства постоянно используются в примерах. В частности, преобразования симметрических функций изучать намного проще, так как их преобразования — действительные функции — легче изобразить графически.

Важнейшие соотношения, связанные с преобразованием Фурье. Те свойства преобразования Фурье, которые важны для нашей книги, сведены в табл. 1.1 и 1.2. Они составляют лишь малую

Таблица 1.1

Преобразование Фурье — функциональные соотношения

Функция	Преобразование Фурье
1. $x(t)$ $F^{-1}\{X(f)\}$	$X(f)$ $F\{x(t)\}$
$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) df$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt$
2. $y(t)$	$Y(f)$
3. $x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(\eta)Y(f-\eta)d\eta$
$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$	$X(f)Y(f)$
4. $x(t-t_0)$ $x(t)e^{j2\pi f t_0}$	$X(f)e^{-j2\pi f t_0}$ $X(f-f_0)$
5. $\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi f X(f)$
6. $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(f)$ в том случае, если $X(0) = 0$
7. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} X(f) ^2 df$ (равенство Парсеваля)

долю всего класса теорем о преобразовании Фурье, имеющих в настоящее время в литературе, но их достаточно для решения тех задач, которые нам встретятся.

Для примера приведем вывод соотношения 4 из табл. 1.1. Пусть, как обычно, $X(f)$ есть преобразование Фурье $x(t)$ и требуется найти преобразование функции $x(t-t_0)$, т. е. функции $x(t)$, смещенной вправо на величину t_0 . По определению таким преобразованием служит

$$F\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0) \exp(-j2\pi ft) dt.$$

Если произвести замену переменной $\tau = t - t_0$, то $d\tau = dt$, и предыдущее выражение примет вид

$$F\{x(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp[-j2\pi f(\tau+t_0)] d\tau.$$

Таблица 1.2

Преобразование Фурье — некоторые пары преобразований

$x(t)$	$X(f)$
1. $x(t) = \begin{cases} 1, & -P/2 \leq t < P/2 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$	$\frac{\sin(\pi f P)}{\pi f}$
2. $\cos(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$
3. $\sin(2\pi f_0 t)$	$\frac{1}{2j} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$
4. $x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{2} \delta(f) + \frac{1}{j2\pi f}$
5. $x(t) = 1$ при всех t	$\delta(f)$
6. $x(t) = \delta(t)$	$X(f) = 1$ при всех f
7. $\exp(j2\pi f_0 t)$	$\delta(f - f_0)$
8. $\exp\left(-\frac{t^2}{2a^2}\right)$	$\sqrt{2\pi a^2} \exp\left(-\frac{(2\pi f a)^2}{2}\right)$
9. $\frac{2 \sin(2\pi B t)}{2\pi t}$	$X(f) = \begin{cases} 1, & -B \leq f < B \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$

Бесконечные пределы при этом не изменятся, поскольку они сдвинуты лишь на конечную величину t_0 .

Экспонента с показателем, содержащим t_0 , может быть вынесена за знак интегрирования:

$$\begin{aligned} F[x(t - t_0)] &= \exp(-j2\pi f t_0) \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau = \\ &= \exp(-j2\pi f t_0) X(f), \end{aligned}$$

т. е., после того как эта экспонента вынесена, остается интеграл, который представляет собой просто определение преобразования $X(f)$.

Таким образом, запаздыванию во временной области соответствует умножение на комплексную экспоненту в области частот. Эта теорема о преобразовании Фурье — наиболее важный факт, который используется в работе с выборочными данными.

1.4. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ИМПУЛЬС И ЕГО ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Преобразование первой из функций в табл. 1.2 также заслуживает особого рассмотрения. Как принято в этой книге, обозначим ее $u(t)$ и определим на временной прямой соотношением

$$u(t) = \begin{cases} 1, & -P/2 \leq t < P/2, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как показано на рис. 1.2,а, график этой функции имеет вид симметричного относительно оси $u(t)$ прямоугольника, имеющего ширину P .

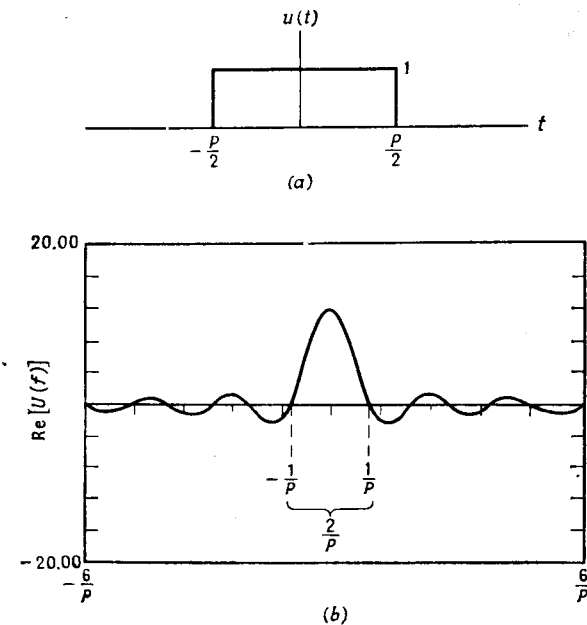


Рис. 1.2. а — прямоугольный импульс; б — его преобразование Фурье, $P = 12$.

Получить преобразование Фурье этой функции несложно:

$$\begin{aligned} U(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-j2\pi f t) dt = \int_{-P/2}^{P/2} \exp(-j2\pi f t) dt = \\ &= -\frac{1}{j2\pi f} \exp(-j2\pi f t) \Big|_{-P/2}^{P/2} = \frac{\sin(\pi f P)}{\pi f}. \end{aligned}$$

Оно оказывается четной функцией, представляющей собой произведение двух нечетных функций $\sin(\pi f P)$ и $1/(\pi f)$. Максимальное значение достигается при $f=0$. Его можно вычислить по правилу Лопиталя:

$$\lim_{f \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi f P)}{\pi f} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{d}{df} (\sin(\pi f P)) \left(\frac{d}{df} (\pi f) \right)^{-1} = \lim_{f \rightarrow 0} \frac{\pi P \cos(\pi f P)}{\pi} = P.$$

Первые пересечения нулевого уровня происходят при $\pi f P = \pm \pi$, т. е. при $f = \pm P^{-1}$. Поэтому ширина центрального выступа равна $2P^{-1}$, и значит, ширина в области частот обратно пропорциональна ширине во временной области. Это свойство взаимной

свратимости двух интервалов лучше всего видно для других трех преобразований, приведенных в табл. 1.2.

1. В пятой строке таблицы константа, равная единице на всей бесконечной временной области, преобразуется в дельта-функцию на частотной области. Последняя имеет бесконечно малую ширину.

2. Обратно, как показывает шестая строка таблицы, дельта-функция на временной области, имеющая бесконечно малую ширину, преобразуется в постоянную функцию в области частот, имеющую бесконечный носитель.

3. Как видно из восьмой строки, колоколообразная кривая во временной области переходит в колоколообразную кривую в частотной области. Если взять точки перегиба на каждой из этих кривых, то расстояние между ними для кривой во временной области будет равно $2a$, а расстояние для кривой в частотной области будет равно $(\pi a)^{-1}$, так что эти два расстояния обратно пропорциональны.

1.5. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

В этом параграфе рассматриваются функции $x(t)$ и $y(t)$, между которыми установлено *линейное соотношение*. В частности, здесь рассматриваются функциональные соотношения вида

$$D^{(1)}[y(t)] = D^{(2)}[x(t)],$$

где $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ — линейные дифференциальные операторы. Например, оператор $D^{(1)}$ может иметь вид

$$D^{(1)} = \left[a \frac{d^2}{dt^2} + b \frac{d}{dt} + c \right],$$

где a , b и c — постоянные. Предположим, что и для $x(t)$ имеется подобное выражение. Это означает, что $x(t)$ и $y(t)$ связаны *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*.

Как будет показано ниже, существуют еще два способа записи такого соотношения — через *импульсную функцию отклика* и ее преобразование Фурье (или, иначе, *передаточную функцию*)¹⁾.

Проиллюстрируем содержание этих понятий с помощью одного примера. Допустим, что соотношение определено равенством

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = x(t).$$

Здесь

$$D^{(1)} = \left[\frac{d^2}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{d}{dt} + \omega_n^2 \right], \quad D^{(2)} = 1.$$

¹⁾ Нередко импульсную функцию отклика называют импульсной характеристикой, а передаточную функцию — частотной характеристикой. — Прим. перев.

С помощью табл. 1.1 можно найти преобразование Фурье этого равенства и получить соотношение

$$-(2\pi f)^2 Y(f) + (j2\pi f) 2\zeta\omega_n Y(f) + \omega_n^2 Y(f) = X(f),$$

где $X(f)$ и $Y(f)$ суть преобразования Фурье соответственно $x(t)$ и $y(t)$. Полагая $\omega_n = 2\pi f_n$ и вынося общий член $Y(f)$ за скобки, после перегруппировки получим

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \left[\omega_n^2 \left(1 - \left(\frac{f}{f_n} \right)^2 + \frac{j2\zeta f}{f_n} \right) \right]^{-1}.$$

Отношение $Y(f)/X(f)$, обозначаемое $H(f)$, определяет для каждой системы *передаточную функцию* между двумя функциями.

Об этом отношении можно говорить иначе — как о действии *фильтра* между $x(t)$ и $y(t)$: функция $y(t)$ получается *фильтрацией* функции $x(t)$, а $H(f)$ есть передаточная функция фильтра.

Коэффициент усиления фильтра равен абсолютному значению передаточной функции. В нашем примере для коэффициента усиления мы имеем следующее выражение:

$$|H(f)| = \left| \frac{Y(f)}{X(f)} \right| = \left[\omega_n^2 \left(\left[1 - \left(\frac{f}{f_n} \right)^2 \right]^2 + \left(\frac{2\zeta f}{f_n} \right)^2 \right)^{1/2} \right]^{-1}.$$

Фазовый угол (или просто *фаза*) передаточной функции определяется функцией $\varphi(f)$ по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi(f) = \frac{\operatorname{Im} [H(f)]}{\operatorname{Re} [H(f)]}.$$

Так определенная фаза измеряется в радианах. Нередко эту величину переводят в градусы, умножая на $180/\pi$, и обозначают $\varphi_d(f)$.

В нашем примере

$$\varphi(f) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\frac{2\zeta f/f_n}{1 - (f/f_n)^2} \right).$$

На рис. 1.3 приведены графики коэффициента усиления и фазы этого фильтра для $f_n = 100$ и $\zeta = 0.1$. Функция коэффициента усиления достигает максимума примерно при 100 Гц. На самом деле максимальное значение достигается в точке f_p (ее часто называют *пиковой частотой*), определяемой по формуле $f_p = f_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Для этого примера $f_p = 100 \sqrt{1 - 0.02} \approx 98.99$ Гц. Если величина ζ близка к 0, что часто выполняется в физических системах, то f_p и f_n почти одинаковы.

Определение передаточной функции можно переписать и в другом виде:

$$|Y(f)| = |H(f)| |X(f)|.$$

Такая форма записи помогает выявить тот факт, что абсолютная величина преобразования Фурье $y(t)$ есть просто произведение абсолютной величины преобразования Фурье функции $x(t)$ и

модуля функции $H(f)$. Обратное преобразование Фурье равенства $Y(f) = H(f) X(f)$ дает *свертку* функции $x(t)$ и новой функции

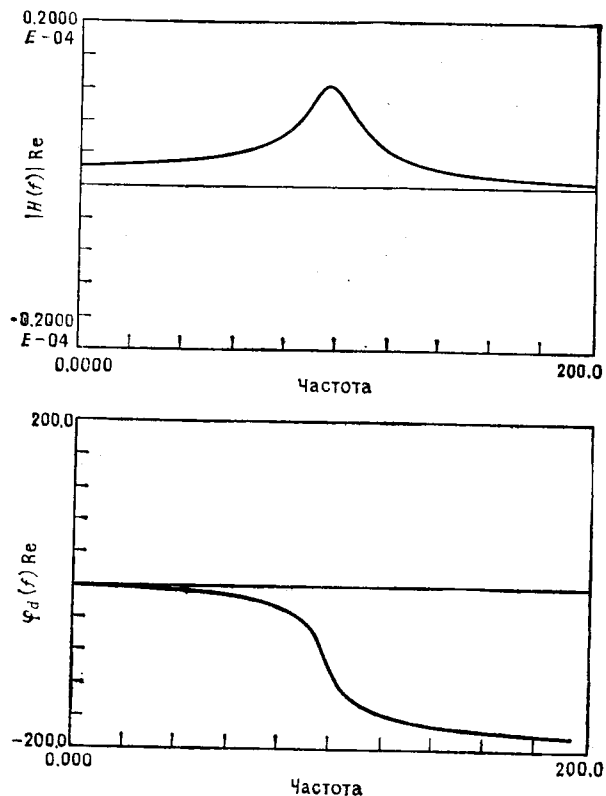


Рис. 1.3. Коэффициент усиления и фаза фильтра, определенного формулой (4.1) при $f_n = 100$ и $\zeta = 0.1$. Нижний индекс d у фазы означает градусы.

$h(t)$, представляющей собой обратное преобразование Фурье $H(f)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau.$$

В нашем примере функция $h(t)$ находится из формулы

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi ft} \left[\omega_n^2 \left(1 - \left(\frac{f}{f_n} \right)^2 + j2\zeta \frac{f}{f_n} \right) \right]^{-1} df = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ e^{-2\pi f_n \zeta t} \frac{\sin(2\pi f_n (1 - \zeta^2)^{1/2} t)}{2\pi f_n (1 - \zeta^2)^{1/2}}, & t \geq 0. \end{cases}$$

Эту функцию, представляющую собой обратное преобразование Фурье функции $H(f)$, часто называют *импульсной функцией отклика*. Если в качестве функции $x(t)$ взять дельта-функцию, то функция $y(t)$ будет равна $h(t)$.

Таким образом, с помощью интеграла свертки получаем

$$y(t) = (2\pi f_n \sqrt{1 - \zeta^2})^{-1} \int_0^t e^{-2\pi f_n \zeta \tau} \sin 2\pi f_n \sqrt{1 - \zeta^2} \tau \cdot x(t - \tau) d\tau.$$

Конечные пределы интегрирования появились здесь в силу того, что как $h(t)$, так и $x(t)$ для отрицательных значений равны нулю.

Здесь лучше всего остановиться и подвести некоторые итоги. Если $x(t)$ и $y(t)$ связаны линейным дифференциальным уравнением, то существуют такие функции $h(t)$ и $H(f)$, что 1) функция $H(f)$ есть преобразование Фурье функции $h(t)$, 2) в частотной области $Y(f) = H(f) X(f)$, 3) во временной области выполняется соотношение

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau,$$

4) если $x(t) = \delta(t)$, то $y(t) = h(t)$, 5) исходному дифференциальному уравнению может быть сопоставлено эквивалентное ему интегральное уравнение.

1.6. СВЕРТКА И ФИЗИЧЕСКАЯ ОСУЩЕСТВИМОСТЬ

В предыдущем параграфе отмечалось, что для $y(t)$ и $x(t)$, связанных линейным соотношением, представляющим собой линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, существует такая функция $h(t)$, что

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau.$$

Интеграл такого вида имеет специальное название — *свертка*.

Поясним на примере, что происходит при этой операции. Допустим, что требуется вычислить $y(t)$ при $t = t_0$, т. е.

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t_0 - \tau) d\tau.$$

Кроме того, предположим, что в качестве функций $h(t)$ и $x(t)$ выбраны следующие:

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases} \quad h(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Их графики изображены на рис. 1.4,а; на рис. 1.4,б те же функции изображены в области изменения переменной τ . Как и следовало ожидать, $h(\tau)$ и $h(t)$ совпадают. Что же касается функции $x(t)$, то она отражается вдоль своей оси и смещается на t_0 единиц (подразумевается, что в этом примере величина t_0 положительна). Отдельное значение $y(t_0)$ получается перемножением двух получившихся функций и последующим интегрированием этого произведения.

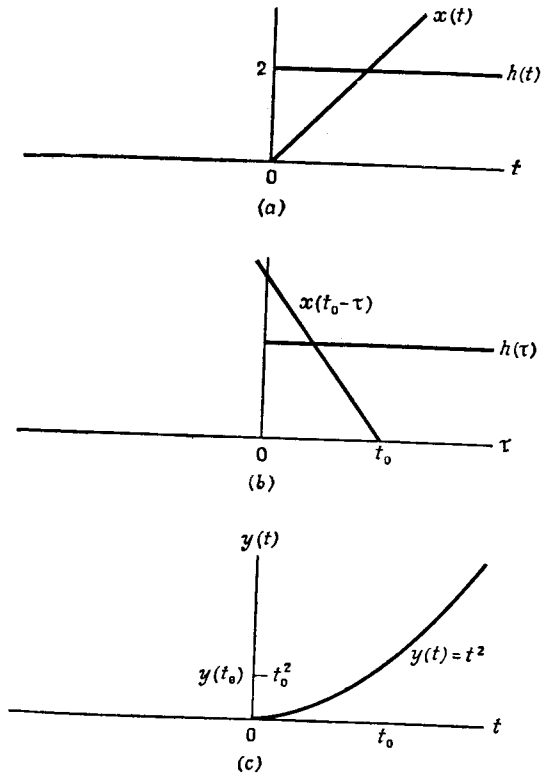


Рис. 1.4. Получение свертки для функций $h(t)$ и $x(t)$ в точке t_0 , рассматриваемых в примере. а — исходные функции; б — те же функции в области τ . Функция $x(t)$ обращается и сдвигается на t_0 единиц; в — окончательный результат — свертка функций $x(t)$ и $h(t)$ из примера.

Интегрирование проводится следующим образом:

$$y(t_0) = \int_0^{t_0} 2(t_0 - \tau) d\tau = 2t_0\tau - \tau^2 \Big|_0^{t_0} = 2t_0^2 - t_0^2 = t_0^2.$$

Следовательно, $y(t) = t^2$ для каждого t . Полученная для рассмотренных функций кривая изображена на рис. 1.4,в.

Важную роль играет теорема о коммутативности свертки, которая утверждает, что в определении свертки функции $x(t)$ и $h(t)$ можно поменять местами, т. е.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau.$$

Для произведения функций во временной области справедливо двойственное правило, заключающееся в том, что произведение $y(t)$ двух функций $h(t)$ и $x(t)$ при преобразовании Фурье переходит в свертку функций $H(f)$ и $X(f)$ в частотной области, т. е. если $y(t) = h(t)x(t)$, то

$$Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} H(\eta) X(f - \eta) d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} H(f - \eta) X(\eta) d\eta.$$

Как мы увидим, это соотношение имеет важное значение в изучении того, что подразумевается под конечным тестированием. Под *тестом* мы понимаем проведение эксперимента или испытания (например, структурного вибрационного испытания), при котором для последующего анализа некоторым методом записываются данные временного ряда.

Возвращаясь к дифференциальным уравнениям, приводившим к импульсным функциям отклика, заметим, что существуют условия, которые следует налагать на функцию $h(t)$, чтобы она соответствовала многим физическим ситуациям, а именно чтобы она стала *физически осуществимой*. Это достигается требованием невырожденности функции $h(t)$ лишь для времен, больших или равных 0, т. е.

$$h(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \text{любая функция} & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Это условие эквивалентно требованию, чтобы функция $y(t)$ не давала отклика прежде, чем поступит $x(t)$.

1.7. ЭФФЕКТЫ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ ВЫБОРКИ

Большинство рассмотренных до сих пор функций определялось на бесконечном временном интервале. Этим функциям соответствовали бы эксперименты бесконечной продолжительности. Но такие эксперименты проводить невозможно, и возникает естественный вопрос об эффектах, обусловленных конечной длиной записи.

Вероятно, наиболее полно ответил на него в своей работе Деннис Габор (1946), больше известный, пожалуй, своими исследованиями по голографии.

Конечная длина записи будет моделироваться нами при помощи прямоугольного импульса $u(t)$. Предположим, что функция $x(t)$ определена на интервале $-\infty < t < \infty$ и имеет преобразование Фурье $X(f)$. Если время наблюдения ограничено промежутком $-P/2 \leq t < P/2$, то сужение функции $x(t)$ на этот интервал, обозначаемое $x_p(t)$, можно записать в виде

$$x_p(t) = x(t) u(t).$$

Таким образом, после умножения $x(t)$ на прямоугольный импульс получилась функция $x_p(t)$, которая равна 0 вне интервала $-P/2 \leq t < P/2$. Это значит, что функция x_p отвечает выборке длины P .

Преобразование Фурье функции $u(t)$ известно, а для функции $x(t)$ оно задано по предположению. Поэтому можно определить функциональный вид $x_p(t)$. Поскольку функция $x_p(t)$ — произведение двух функций во временной области, ее преобразование Фурье, согласно третьей формуле в табл. 1.1, должно быть сверткой $X(f)$ и $U(f)$ в области частот. Обозначив символом $X_p(f)$ преобразование Фурье функции $x_p(t)$, получим

$$\begin{aligned} F[x_p(t)] = X_p(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) U(f-\eta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(\eta) \frac{\sin(\pi(f-\eta)P)}{\pi(f-\eta)} d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} X(f-\eta) \frac{\sin(\pi\eta P)}{\pi\eta} d\eta. \end{aligned}$$

Поэтому эффект перехода к конечной длине записи сводится, вообще говоря, к свертке преобразования исходной функции с бесконечной длиной записи и функции $(\sin x)/x$. Как станет видно из дальнейшего, это приводит к «размыванию».

Рассмотрим важный пример с косинусом, имеющим единичную амплитуду и частоту f_0 . Как было показано, преобразование Фурье этой функции на бесконечном интервале имеет вид

$$X(f) = 1/2 [\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)].$$

Поэтому для преобразования Фурье сужения косинуса на конечный интервал получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} 1/2 [\delta(\eta-f_0) + \delta(\eta+f_0)] \frac{\sin(\pi(f-\eta)P)}{\pi(f-\eta)} d\eta = \\ = \frac{\sin(\pi(f-f_0)P)}{2\pi(f-f_0)} + \frac{\sin(\pi(f+f_0)P)}{2\pi(f+f_0)}. \end{aligned}$$

Эта функция изображена на рис. 1.5. На части *a* этого рисунка показаны исходные дельта-функции, а на части *b* — те же

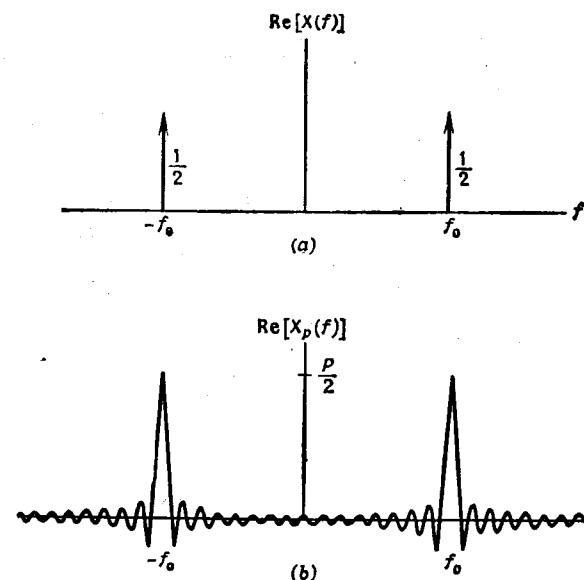


Рис. 1.5. Преобразование Фурье функции $\cos(2\pi f_0 t)$. *a* — без размывания, область неограниченна; *b* — с размыванием, область определения косинуса ограничена отрезком $-P/2, P/2$.

дельта-функции, но уже свернутые с функцией $(\sin x)/x$, появление которой обусловлено переходом к интервалу конечной длины. Следует обратить внимание на следующее:

1. Центры функций $(\sin x)/x$ располагаются в частотах $\pm f_0$, поэтому в этих точках располагаются максимумы¹⁾. Следовательно, большая часть информации концентрируется вблизи частот, $\pm f_0$ Гц.

2. С другой стороны, функция $X_p(f)$ нигде не обращается в нуль, за исключением самых крайних точек. Это и приводит к эффекту, называемому размыванием. Информация размывается по всей области частот, а не концентрируется точно в частотах $\pm f_0$ Гц.

3. Высота центрального выступа функции $(\sin x)/x$ равна $P/2$, а ширина $2/P$. Значит, если запись сделать длиннее, т. е. увеличить P , то высота главных выступов увеличится, а ширина —

¹⁾ Это не совсем точно, поскольку хвост каждой из функций $(\sin x)/x$ добавляется к центральному всплеску другой и, значит, вносит искажения. Для больших значений P это несущественно.

уменьшится. Если P устремить в бесконечность, то функции $(\sin x)/x$ перейдут в дельта-функции.

О синусоиде на бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$ можно говорить как о чистом тоне, вся информация о котором сконцентрирована в двух дельта-функциях. Переход к конечному интервалу приводит из-за свертки с $(\sin x)/x$ к размыванию и потере чистоты тона. Таким образом, из-за использования во всяком эксперименте моделей с конечной длиной записи имеется только размытая частотная информация.

С конечной длиной записи связан и другой эффект. Он заключается в невозможности точного измерения частоты. Поскольку информация размыта, точно определить максимум главного всплеска практически невозможно и, значит, точно оценить частоту по конечной выборке синусоиды нельзя¹⁾. Эта неопределенность связана не только с длиной записи, но и с частотой синусоиды. Более высокие частоты определять легче, так как взаимное влияние двух функций $(\sin x)/x$ при их отдалении уменьшается.

1.8. ВЫБОРОЧНЫЕ ДАННЫЕ И ЧАСТОТА НАЙКВИСТА

Выборочными (квантованными) данными назовем данные, выбираемые через равные промежутки T , где T измеряется в секундах. Выборочная функция $x(i)$, как и ее непрерывный аналог, определяется формулой

$$x(i) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(iT - \tau) d\tau.$$

Таким образом, выборочная функция представляет собой последовательность дискретных величин, соответствующих моментам времени iT .

Преобразование Фурье функции $x(i)$, как и прежде, обозначим $X(f)$, однако его определение для выборочных данных станет другим:

$$X(f) = T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp(-j2\pi fiT).$$

Это определение можно считать аппроксимацией предыдущего определения, хотя, пожалуй, лучше считать их определениями двух форм одного и того же преобразования (есть еще две формы, так что всего их четыре, см. Отнес и Эноксон (1972, с. 12)).

¹⁾ Если нет каких-то других сигналов и отсутствует шум, то для определения частоты f достаточно трех равноотстоящих точек. Точное значение частоты f равно $(2\pi T)^{-1} \arccos \{ [x(t) + x(t-2T)] / (2x(t-T)) \}$. При этом предполагается, что $x(t-T) \neq 0$ и выборочные значения определены точно.

Одна из главных проблем, связанных с выборками, — явление *подмены частот*. Если с интервалом T производится выборка значений синусоиды с частотой, большей $1/(2T)$, то такую выборку можно перепутать с выборкой синусоиды меньшей частоты. Значит, наряду с истинной частотой в выборке появляется и другая (меньшая) — частота подмены. В качестве иллюстрации рассмотрим пример с синусоидой

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t), \quad f_0 = \frac{p+q}{2T},$$

где p — целое число, а q — дробная часть, меньшая единицы. Допустим, например, что $T = 0.005$ и $f_0 = 1025$ Гц. Тогда

$$(2T)^{-1} = 100, \quad p = 10, \quad q = 0.25.$$

Подставив выбранное значение f_0 и заменив t на iT , для $x(t)$ получим

$$\begin{aligned} \sin(2\pi f_0 iT) &= \sin\left(2\pi \left(\frac{p+q}{2T}\right) iT\right) = \sin(\pi(p+q)i) = \\ &= \sin(\pi pi) \cos(\pi qi) + \cos(\pi pi) \sin(\pi qi) = \cos(\pi pi) \sin(\pi qi), \end{aligned}$$

поскольку $\sin(\pi pi) = 0$ для всех i .

Теперь в зависимости от четности p имеется две возможности.

1. Если p — четное, то $\cos(\pi pi) = 1$ для всех i , поэтому

$$x(i) = \sin(\pi qi).$$

2. Если p — нечетное, то

$$x(i) = (-1)^i \sin(\pi qi).$$

В первом случае оставшийся угол можно переписать в виде

$$\pi qi = \pi qi \frac{2T}{2T} = 2\pi \left(\frac{q}{2T}\right) iT.$$

В результате получается частота, равная $q/(2T)$. Обозначим ее f'_0 .

В нашем примере $p = 10$, и, следовательно, p — четное. Значит, полученная частота f'_0 составляет $(0.25)(100) = 25$ Гц. Таким образом, выборка синусоиды частоты 1025 Гц с интервалом $T = 0.005$ с, или, что то же, со скоростью 200 выб/с (выборки в секунду), не различается с синусоидой частоты 25 Гц!

Частоту $(2T)^{-1}$, играющую для цифровых данных особую роль, с этого момента будем обозначать специальным символом F (от англ. *folding*), т. е.

$$F = (2T)^{-1} = S/2,$$

где S — скорость выборки, измеряемая числом выборок в секунду. Ее часто называют *частотой Найквиста* в честь Найквиста, написавшего главную работу по этому вопросу (1924).

Возвращаясь ко второму случаю, в котором p — нечетное, получаем

$$\begin{aligned} x(i) &= (-1)^i \sin(\pi qi) = \cos(\pi i) \sin(\pi qi) = \\ &= \cos(\pi i) \sin(\pi qi) - \sin(\pi i) \cos(\pi qi) = \\ &= -\sin(\pi i - \pi qi) = -\sin(\pi i(1 - q)). \end{aligned}$$

Если умножить числитель и знаменатель на $2T$, то для оставшегося угла получим выражение

$$\pi i(1 - q) = \pi i(1 - q) \frac{2T}{2T} = 2\pi \left(\frac{1}{2T} - \frac{q}{2T} \right) iT = 2\pi (F - f_0) iT,$$

что опять указывает на возможность подмены частот.

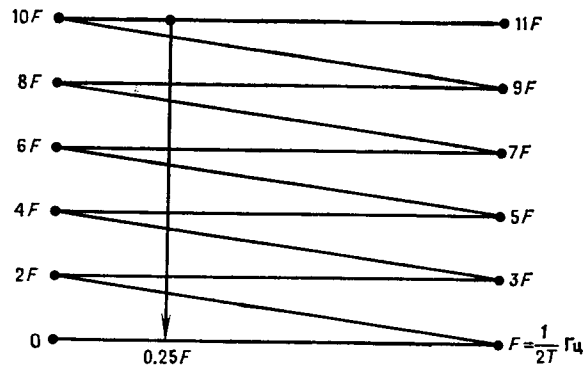


Рис. 1.6. Первые 11 складок диаграммы подмен Найквиста.

На рис. 1.6 эти результаты показаны на диаграмме подмен. Ось частот сложена гармошкой над интервалом $0 - F$ Гц кусками по F Гц. Чтобы показать, как работать с диаграммой, вернемся к нашему примеру. Частота 1025 Гц отвечает при скорости выборок 200 выб/с величине $10.25 F$. Если из этой точки опустить перпендикуляр, то получится $0.25 F$. То же значение получится, если взять $1.75 F$, $2.25 F$, $3.75 F$, $4.25 F$, $5.75 F$, $6.25 F$, $7.75 F$, $8.25 F$, $9.75 F$ и т. д.

Такую диаграмму очень часто полезно рисовать, чтобы по ней узнавать, где может происходить подмена частот для данного сигнала. Предположим, что в нашем примере появляется синусоида частоты 80 Гц, чего нельзя было ожидать, исходя из известной физической ситуации. В этом примере $F = 100$ Гц, и

сигнал в 80 Гц мог бы оказаться сигналом в 120 Гц¹⁾, получившим из-за подмены частот меньшее значение.

Теорема о выборке. Основной вопрос, который возникает при выборке временных функций, заключается в том, насколько хорошо выборочные данные представляют исходную функцию. Как утверждает *теорема о выборке*, такое представление будет очень хорошим, если выполняются определенные условия. Такая теорема приводится Шенноном (1963).

Эти условия, которые принимаются как гипотезы, состоят в следующем.

1. Функция $x(t)$ определена при $-\infty < t < \infty$.
2. Существует преобразование Фурье $X(f)$ функции $x(t)$.
3. Функция $X(f)$ имеет ограниченный носитель, т. е. $|X(f)| = 0$ при $|f| > F$ Гц.

Если эти условия выполняются, то справедлив следующий вывод.

Теорема²⁾. Пусть T' — такой интервал квантования, что $T' \leq (2F)^{-1}$. Тогда функция $x(t)$ может быть восстановлена по последовательности $x(i)$ единственным образом, за исключением, быть может, изолированного множества точек.

Идея доказательства, которое мы не приводим, основана на следующем факте. Поскольку существует $X(f)$, множества точек $x(i)$, определенных соотношением

$$x(i) = \int_{-F}^F X(f) \exp(j2\pi fiT) df,$$

оказывается достаточно, чтобы построить по нему $X(f)$:

$$X(f) = T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp(-j2\pi fiT).$$

Так как $X(f)$ можно восстановить по значениям $x(i)$, то функцию $x(t)$ можно восстановить по последовательности $x(i)$. Выражение для $x(i)$ можно рассматривать как свертку во временной области, соответствующую произведению $X(f)$ и прямоуголь-

¹⁾ Во многих приложениях переменный ток 110 В, 60 Гц преобразуется в постоянный ток посредством использования выпрямительных устройств. Обычно эти устройства используют полное волновое выпрямление, которое изменяет переменный ток в постоянный добавлением гармоник 120 Гц и выше, причем гармоника 120 Гц имеет наибольшую амплитуду. Если их должным образом не удалять, то они могут появиться в данных.

²⁾ Этот результат получен В. А. Котельниковым. — Прим. перев.

ного импульса в области частот:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-F}^F X(f) \exp(j2\pi ft) df = \\ &= \int_{-F}^F T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp(-j2\pi fiT) \exp(j2\pi ft) df = \\ &= T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \int_{-F}^F \exp[j2\pi f(t-iT)] df = \\ &= T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \frac{2 \sin[2\pi F(t-iT)]}{2\pi(t-iT)}. \end{aligned}$$

Заметим, что при $t = kT$

$$\frac{2 \sin[2\pi F(kT-iT)]}{2\pi(kT-iT)} = \begin{cases} 2F, & i = k, \\ 0, & i \neq k, \end{cases}$$

поэтому

$$x(kT) = Tx(k) 2F = x(k).$$

Таким образом, выражение, полученное для $x(t)$, полностью совпадает с выражением для $x(i)$ при $t = iT$. В промежуточных точках это выражение служит интерполяционной схемой, которая восстанавливает функцию $x(t)$ по величинам $x(i)$. Как и следовало ожидать, с наибольшими весами берутся те величины $x(i)$, индексы i которых соответствуют наиболее близким к t значениям.

1.9. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ ДЛИНЫ N

Две формы преобразования Фурье уже рассматривались:

$$\begin{aligned} X(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \\ X(f) &= T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp(-j2\pi fiT). \end{aligned}$$

Введем теперь новую форму преобразования Фурье, в которой как X , так и x дискретны, а пределы суммирования конечны. Оно определяется для $x(i)$ ($i = 0, 1, \dots, N-1$) следующим образом:

$$X(k) = T \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \exp\left(-j\frac{2\pi ik}{N}\right).$$

Такая форма преобразования играет важнейшую роль в книге. Она не только позволяет вычислять преобразование Фурье и обратное к нему на цифровых ЭВМ. Как будет показано в гл. 6, при некоторых значениях N вычисления по этой формуле могут выполняться гораздо быстрее, чем это следует из ее общего вида.

Указанную форму преобразования можно отнести к преобразованиям второго типа (для дискретных $x(i)$ на бесконечном интервале). Для этого нужно только 1) положить $x(i) = 0$ для $i < 0$, $i > N-1$ и 2) определить величину $f_k = k/(NT)$. Если это сделано, то

$$\begin{aligned} X(f_k) &= T \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \exp(-j2\pi f_k iT) = \\ &= T \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \exp\left[-j2\pi \left(\frac{k}{NT}\right) iT\right] = \\ &= T \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \exp\left(-j\frac{2\pi ik}{N}\right). \end{aligned}$$

Подобным образом определяется обратное преобразование Фурье:

$$x(i) = b \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(\frac{j2\pi ik}{N}\right),$$

где $b = (NT)^{-1}$ и $f_k = kb = k/(NT)$ (здесь $k = 0, \dots, N-1$). Следует обратить внимание на интерпретацию этих частот. Частота Найквиста равна $(2T)^{-1}$, поэтому соответствующее значение k определяется из равенства

$$\frac{k}{NT} = \frac{1}{2T},$$

или $k = N/2$.

Докажем обратимость введенных преобразований:

$$\begin{aligned} b \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(\frac{j2\pi ik}{N}\right) &= \\ &= b \sum_{k=0}^{N-1} \left[T \sum_{p=0}^{N-1} x(p) \exp\left(-j\frac{2\pi pk}{N}\right) \right] \exp\left(\frac{j2\pi ik}{N}\right) = \\ &= bT \sum_{p=0}^{N-1} x(p) \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j\frac{2\pi k(p-i)}{N}\right). \end{aligned}$$

Здесь $bT = N^{-1}$, а для внутренней суммы выполняется соотношение

$$\sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j\frac{2\pi k(p-i)}{N}\right) = \begin{cases} N, & i = p, \\ 0, & i \neq p, \end{cases}$$

поскольку для $i = p$

$$\sum_{k=0}^{N-1} 1 = N,$$

а для $i \neq p$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N-1} \exp\left(-j \frac{2\pi k(p-i)}{N}\right) &= \\ &= [1 - \exp(-j2\pi(p-i))] \left[1 - \exp\left(-\frac{j2\pi(p-i)}{N}\right)\right]^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, частота Найквиста соответствует середине последовательности $X(k)$.

При детальном рассмотрении этой формы преобразования Фурье обнаруживается ряд весьма интересных свойств. Первое из них — периодичность функций $x(i)$ и $X(k)$. Она понимается в том смысле, что для определения значений функций $x(i)$ и $X(k)$ вне множества $0, \dots, N-1$ достаточно брать значения их индексов по модулю N .

Например, допустим, что $i = pN + q$, где p и q — целые числа, причем $0 \leq q \leq N-1$. Подставим в выражение обратного преобразования Фурье

$$x(i) = b \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(\frac{j2\pi ik}{N}\right)$$

новое значение i :

$$\begin{aligned} x(pN + q) &= b \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(\frac{j2\pi k(pN + q)}{N}\right) = \\ &= b \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp\left(\frac{j2\pi kq}{N}\right) \exp\left(\frac{j2\pi kpN}{N}\right). \end{aligned}$$

Крайний правый член в последней сумме равен единице, так как

$$\exp\left(\frac{j2\pi kpN}{N}\right) = \exp(j2\pi kp) = 1.$$

Следовательно, в этом случае

$$x(i) = x(q).$$

Аналогичное соотношение можно доказать и для прямого преобразования Фурье $x(i)$.

Рис. 1.7 иллюстрирует такую периодичность для $N = 16$.

Поскольку значениям k в промежутке $0, \dots, N/2$ соответствуют частоты, не превосходящие частоту Найквиста, закономерен вопрос о смысле, который имеют величины $X(k)$ при $k > N/2$.

Оказывается, этим величинам соответствуют отрицательные частоты. Покажем, как это получается. Предположим, что индекс k в определении величины $X(k)$ заменен на $-p$, т. е.

$$X(-p) = T \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \exp\left(-\frac{j2\pi i(-p)}{N}\right).$$

После умножения экспоненциального члена на величину $\exp(-j2\pi i N/N)$, равную единице, получим

$$\begin{aligned} T \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \exp\left(-\frac{j2\pi i(-p)}{N}\right) \exp\left(-\frac{j2\pi i N}{N}\right) &= \\ &= T \sum_{i=0}^{N-1} x(i) \exp\left(-\frac{j2\pi i(N-p)}{N}\right) = X(N-p). \end{aligned}$$

Таким образом, $X(-1) = X(N-1)$, $X(-2) = X(N-2)$ и т. д. Итак, второй половине преобразования отвечает преобразование для отрицательных значений k .

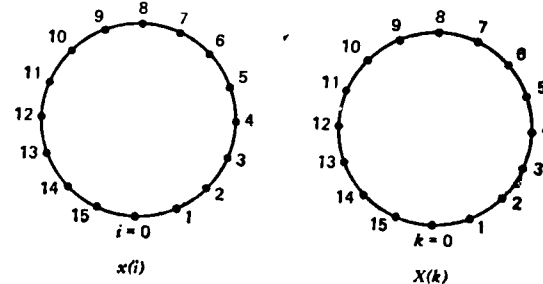


Рис. 1.7. Периодичность рядов $x(i)$ и $X(k)$ при $N = 16$. Частоте Найквиста соответствует $k = 8$.

Если $x(i)$ — действительные числа, что бывает довольно часто, то $X(-k) = X^*(k)$, как и следовало ожидать.

Второе важное свойство связано со сверткой. Предположим, что заданы величины $y(i)$ и для них преобразование Фурье определяется по формуле

$$Y(k) = T \sum_{i=0}^{N-1} y(i) \exp\left(-\frac{j2\pi ik}{N}\right).$$

Если частотная функция $Z(k)$ определяется соотношением

$$Z(k) = X(k) Y(k),$$

то вполне естественно ожидать, что ее обратное преобразование Фурье $z(i)$ будет сверткой $x(i)$ и $y(i)$.

В этом случае так и оказывается. Сложность заключается в том, что результирующая свертка тоже периодична. Приведем для нее формулы

$$z(i) = T \sum_{p=0}^{N-1} x(p) y(i-p) = T \sum_{p=0}^{N-1} x(i-p) y(p).$$

Индексы $(i-p)$ должны пониматься по модулю N , как показано на рис. 1.8. Оба множества значений $x(i)$ и $y(i)$ изображены как точки на окружностях. Значения $y(i)$ располагаются

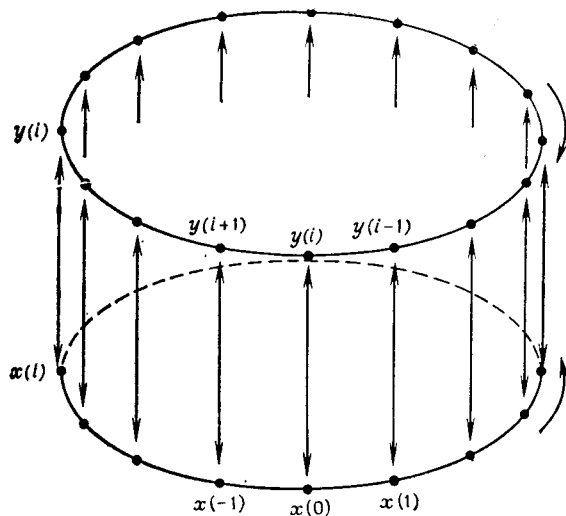


Рис. 1.8. Круговая свертка. Члены последовательности $y(i)$ располагаются в обратном по отношению к $x(i)$ порядке, причем напротив $y(i)$ располагается $x(0)$. Одно значение $z(i)$ получается суммированием всех попарных произведений противостоящих значений с последующим умножением на T .

на окружности в обратном порядке. Для того чтобы вычислить $z(i)$, все величины $y(i)$ так сдвигаются против часовой стрелки, чтобы напротив $x(0)$ расположилась величина $y(i)$. Все стоящие друг против друга величины перемножаются. Затем все произведения складываются и сумма умножается на T . Получается одно значение $z(i)$.

В качестве примера рассмотрим свертку функций

$$x(i) = \begin{cases} T^{-1}, & i = 7, \\ 0, & i \neq 7, \end{cases} \quad y(i) = 1 - \frac{i}{15},$$

где $i = 0, \dots, 15, N = 16$.

Они изображены на рис. 1.9 вместе со сверткой $z(i)$. Как видно из рисунка, значение $z(i)$ оказывается равным

$$T \sum_{p=0}^{N-1} x(p) y(i-p) = y((i-7) \pmod{16}),$$

поэтому

$$z(0) = y(9), \quad z(1) = y(10), \quad \dots, \quad z(7) = y(0), \quad \dots, \quad z(15) = y(8).$$

Таким образом, значения $z(i)$ равны значениям $y(i)$, сдвинутым на семь точек.

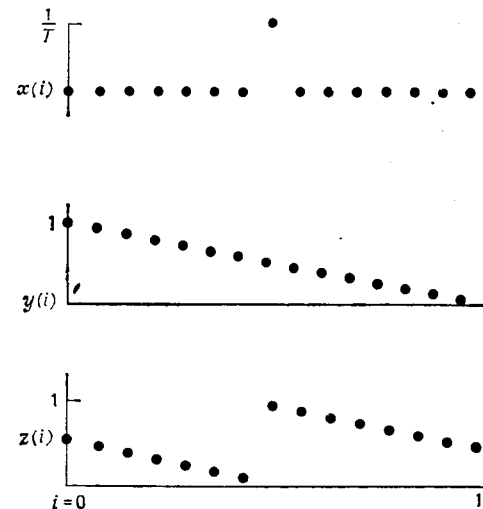


Рис. 1.9. Свертка функций $x(i)$ и $y(i)$, определенных в тексте. Здесь $N=16$.

С этой формой преобразования связана еще одна особенность. Использование свертки, полученной только что рассмотренным способом, при попытке построения моделей причинных систем может вызывать явление наложения, обусловленного периодичностью, и приводить к сильным искажениям данных. Такая опасность преодолевается добавлением нулей. Этот прием будет рассмотрен в гл. 6.

Вычисление дискретного преобразования Фурье. Обычная форма дискретного преобразования Фурье получается довольно просто. На рис. 1.10 приводится небольшая программа для вычисления преобразования 16 действительных величин.

Строки 4—14 отвечают за получение функции данных. Здесь задаются параметры f_0 , φ и вычисляются значения синусоиды

$$x(i) = \cos\left(\frac{2\pi i f_0}{N} + \varphi\right), \quad i = 0, \dots, 15.$$


```

C   МЕДЛЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
    DIMENSION XC(16),XS(16),X(16)
    FACT=2.*3.14159265
5   READ (5,101 ICASE,FO,PHI
10  FORMAT (16,2F15.6)
    IF (ICASE.LE.0) STOP
    WRITE (6,15) ICASE,FO,PHI
15  FORMAT (23H1 SLOW FOURIER TRANSFORM,/,
    117HOTEST CASE NUMBER,16,/,
    26HOFO =,F15.6,/,
    36HOPHI =,F15.6,/,
    436HO  K          REAL      IMAGINARY,/)
    DO 20 I=1,16
20  X(I)=COS(FACT*FLOAT(I-1)*FO+PHI)
    DO 30 KK=1,16
    K=KK-1
    SUMC=0.
    SUMS=0.
    DO 25 II=1.16
    I=II-1
    ANG=FACT*FLOAT(I*K)/16.
    SUMC=SUMC+X(II)*COS(ANG)
25  SUMS=SUMS-X(II)*SIN(ANG)
    XC(KK)=SUMC
    XS(KK)=SUMS
30  WRITE(6,10) K,SUMC,SUMS
    GO TO 5
    END

```

Рис. 1.10. FORTRAN-программа для получения синусоиды и вычисления ее преобразования Фурье.

```

SLOW FOURIER TRANSFORM
TEST CASE NUMBER      1
FO =                   0.2500000
PHI =                   0.0000000

      K          REAL      IMAGINARY.
0      0.000002      0.000000
1     -0.000001      0.000001
2     -0.000001     -0.000001
3     -0.000000     -0.000001
4      8.000000      0.000001
5     -0.000001     -0.000001
6      0.000004     -0.000001
7     -0.000001      0.000001
8     -0.000001      0.000000
9      0.000001      0.000001
10     0.000001      0.000001
11     0.000000      0.000003
12     8.000000     -0.000001
13     0.000001      0.000001
14     0.000002      0.000001
15     -0.000001     -0.000001

```

Рис. 1.11. Распечатка результатов прогона теста при FO=0.25, PHI=0.

Параметр N фиксирован и равен 16. Это сделано в учебных целях и предохраняет от расхода неприемлемо большого машинного времени. Интервал T выбран равным единице, поэтому $F = 1/2$, а частоты f_k равны $k/16$ при $k=0, \dots, 8$ и $1/2 - k/16$ при $k=9, \dots, 15$.

В двойном цикле (строки 15—26) происходит вычисление преобразования Фурье и печать результатов. Запоминание результатов в XC и XS необязательно, однако оно упростит выполнение некоторых упражнений.

Эффективность этой программы возрастет, если синусы и косинусы будут вычисляться рекурсивно. Этот прием рассмотрен в гл. 4.

На рис. 1.11 приводятся результаты прогона тестовой программы со значениями $f_0 = 1/4$ и $\varphi = 0$. Обратите внимание, что, как и следовало ожидать, действительные части для $K=4$ и $K=12$ одинаковы.

1.10. z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Определение z-преобразования может быть дано несколькими способами. По-видимому, проще всего сначала записать еще раз преобразование Фурье второго типа для функции $x(i)$:

$$X(f) = T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) \exp(-j2\pi f iT)$$

и заменить затем $\exp(j2\pi f T)$ на z :

$$X(z) = T \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(i) z^{-i}$$

Это преобразование можно использовать при решении многочисленных задач обработки цифровых сигналов.

Сразу отметим, что запись этого преобразования проще — вместо десяти символов для $\exp(j2\pi f T)$ нужен всего лишь один для z . Но дело не только в удобстве записи. Это преобразование стало появляться в усовершенствованных системах для решения задач, связанных с выборочными данными. Читателям, которые хотят глубже изучить этот вопрос, рекомендуем книгу Стейглица (1974)¹⁾.

Задачи анализа временных рядов, вообще говоря, могут решаться с помощью z-преобразования, и во многих случаях решения упрощаются. Однако в приложениях, затронутых в этой книге, обращение к z-преобразованию мало что меняет. Поэтому,

¹⁾ Изучение свойств соответствующих комплексных функций можно найти в книге Шабата (1976). — Прим. ред.

кроме редких случаев обращения к более удобной записи, это преобразование нигде появляться не будет.

Упражнения

1.1. Докажите, что

$$\left| \frac{a+jb}{g+jh} \right| = \frac{|a+jb|}{|g+jh|}.$$

1.2. Найдите преобразование Фурье следующих функций $x(t)$:

$$a) x(t) = \begin{cases} e^{-at} & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Ответ: $(a + j2\pi f)^{-1}$.

$$b) x(t) = e^{-a|t|}.$$

Ответ: $2a/(a^2 + (2\pi f)^2)$.

с) (Треугольный импульс.)

$$x(t) = \begin{cases} \left(\frac{a}{P}\right)t + a & \text{при } -P < t < 0, \\ \left(-\frac{a}{P}\right)t + a & \text{при } 0 < t < P, \\ 0 & \text{при остальных значениях } t. \end{cases}$$

Ответ: $aP (\sin^2(\pi f P))/(\pi f P)^2$.

d) (Колоколообразный косинус.)

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \cos(\pi t/P)) & \text{при } -P < t < P, \\ 0 & \text{при остальных значениях } t. \end{cases}$$

Ответ:

$$\frac{\sin(2\pi f P)}{2\pi f} + \frac{P^2 2\pi f \sin(2\pi f P)}{\pi^2 - (2\pi f P)^2}.$$

1.3. Функции с разрывами часто имеют в преобразовании Фурье дельта-функции, как, например, функция 4 в табл. 1.2. Используя это преобразование и соотношение 4 в табл. 1.1, укажите другой способ вычисления преобразования Фурье прямоугольного импульса. Что происходит с дельта-функциями?

1.4. Дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t),$$

в котором $x(t) = 0$ при $t < 0$.

- Вычислите преобразование Фурье этого уравнения.
- Найдите передаточную функцию между двумя функциями.
- Определите коэффициент усиления передаточной функции.
- Определите фазу передаточной функции.
- Начертите графики коэффициента усиления и фазы как функций частот.
- Вычислите импульсную функцию отклика в предположении, что она осуществима.

1.5. Вычислите свертки функций $x(t)$ и $h(t)$. Во всех случаях $x(t)$, $h(t)$ и ответы равны нулю при t , меньших 0.

$$a) x(t) = t, h(t) = t \quad [t^3/6].$$

$$b) x(t) = e^t, h(t) = e^t \quad [te^t].$$

$$c) x(t) = t+1, h(t) = t-1 \quad [t^3/6 - t].$$

$$d) x(t) = e^t, h(t) = \sin t \quad [1/2(e^t - \sin t - \cos t)].$$

1.6. Вычислите интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi \eta P)}{\pi \eta} \frac{\sin(\pi(f-\eta)Q)}{\pi(f-\eta)} d\eta.$$

Ответ: $(\sin(\pi f P))/(\pi f)$ при $P < Q$; $(\sin(\pi f Q))/(\pi f)$ при $P > Q$.

Задачи для решения на ЭВМ.

1.7. Отперфорлируйте программу с рис. 1.10 и прогоните ее при следующих значениях:

Номер случая	f_0	φ
2	0.25	-1.5707963
3	0.5	0.0000000
4	0.3125	0.7853982

Объясните полученные результаты.

1.8. Напишите дополнительную программу, которая вычисляла бы и обратное преобразование Фурье после вычисления прямого преобразования. Прогоните все четыре случая.

1.9. Измените программу так, чтобы

$$x(i) = \begin{cases} 1 & \text{для } i=0, 1, 2, 14, 15, \\ 0 & \text{для остальных } i, \end{cases}$$

и вычислите преобразование Фурье. Прокомментируйте результаты.